

การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจาก
วัสดุที่ไม่เชิงเส้นจำพวกลุดวิกแบบไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำที่
เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติกคา

LARGE DEFLECTION OF VARIABLE V – ARC - LENGTH ELASTICA
MADE FROM BI-MODULUS NONLINEAR MATERIAL OBEYING
LUDWICK' S LAW UNDER FOLLOWER LOAD

ขจรเกียรติ รักษา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีการศึกษา 2562

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

การแอนตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจาก
วัสดุที่ไม่เชิงเส้นจำพวกลุดวิกแบบไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำที่
เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติกคา



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2562
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การแอ่นตัวมากของอีลาสติคที่มีควมยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่เชิงเส้นจำพวกลูตวิกแบบไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอีลาสติค

Large Deflection of Variable-Arc-Length Elastica Made from Bi-Modulus Nonlinear Material Obeying Ludwick's Law under Follower Load

ชื่อ - นามสกุล

นายขจรเกียรติ รักษา

สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.

ปีการศึกษา

2562

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิรัตน์ เจียมมีปรีชา, ปร.ด.)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิระศักดิ์ ละอองจันทร์, Dr.-Ing.)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)

วันที่ 11 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2562

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแอนตัวมากของอีลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่เชิงเส้นจำพวกลูตวิกแบบไบโมดูลัส ภายใต้การกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสีรูของอีลาสติคคา
ชื่อ - นามสกุล	นายขจรเกียรติ รักษา
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2562

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาพฤติกรรมของการแอนตัวมากของอีลาสติคคาที่มีสมบัติไม่เชิงเส้นแบบลูตวิก โดยมีโมดูลัสต้านรับแรงอัดและแรงดึงแตกต่างกัน (Bi-modulus) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบติดตามที่เปลี่ยนแปลงไปตามการเสีรูของอีลาสติคคา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอีลาสติคคาเมื่อค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วนของโมดูลัสต้านรับแรงอัดและแรงดึง E_c / E_t และขนาดของหน้าตัดมีการแปรผัน

การศึกษาในครั้งนี้ จะทำการศึกษาพฤติกรรมของอีลาสติคคาเมื่อน้ำหนักบรรทุก \bar{P} กระทำที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ 0.50 และ 0.75 โดยในแต่ละตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกจะทำการแปรผันพารามิเตอร์ที่สำคัญเพื่อสังเกตถึงอิทธิพลของพารามิเตอร์เหล่านี้ต่อพฤติกรรมของอีลาสติคคา อาทิเช่น ค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วน E_c / E_t และขนาดของหน้าตัด โดยสมการครอบคลุมปัญหาประกอบด้วยสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ และความสัมพันธ์ของรูปร่างทางเรขาคณิต เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เชิงตัวเลข งานวิจัยนี้ได้ใช้วิธียิงเป้าโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขกับระบบสมการอนุพันธ์ ซึ่งภายหลังจากการอินทิเกรตผลลัพธ์ที่ได้ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา มิฉะนั้นแล้วกระบวนการกระทำซ้ำของนิวตัน - ราฟสัน จะถูกนำมาใช้เพื่อปรับแก้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ผลการศึกษาพบว่า การเปลี่ยนแปลงของค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วน E_c / E_t และอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของหน้าตัด (\bar{b} / \bar{h}) ที่ต่างกัน มีผลต่อพฤติกรรมของอีลาสติคคา อาทิเช่น สติฟเนส รูปร่างสมดุล และน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของอีลาสติคคา

คำสำคัญ: การแอนตัวมาก โมดูลัสต้านรับแรงอัดและแรงดึงแตกต่างกัน วัสดุชนิดลูตวิก น้ำหนัก

บรรทุกแบบติดตามตามการเสีรูของอีลาสติคคา ระเบียบวิธียิงเป้า

Thesis Title	Large Deflection of Variable-Arc-Length Elastica Made from Bi-Modulus Nonlinear Material Obeying Ludwick's Law under Follower Load
Name - Surname	Mr. Khajonkiat Ruksa
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Assistant Professor Boonchai Phungpaigam, Ph.D.
Academic Year	2019

ABSTRACT

This thesis aimed to investigate the large deflection behavior of a variable-arc-length elastica made of nonlinear material (Ludwick's material) where compression modulus was different from tension modulus (Bi-modulus). The load applied on the elastica was the follower load which could be changed according to the deflection of the elastica. To investigate the behavior of the elastica when the material constant n , ratio of compression and tension modulus E_c / E_t , and dimension of the cross section varied.

In this study, the behavior of the elastica was to study when the load \bar{P} was at α were 0.25, 0.50, and 0.75 respectively. At each position, the important parameters could be varied by observing the influence of these parameters on the behavior of the elastica such as material constant n , ratio of E_c / E_t , and dimension of the cross section of the elastica. The governing differential equations consisted of equilibrium, moment-curvature relation, and geometric relations. In order to obtain the numerical results, the shooting method was employed in this study. The numerical integration was performed on the system of differential equations. After the integration, the results needed to be satisfied with the constraint conditions. Otherwise, the Newton-Raphson iterative scheme would be applied to adjust the unknown variables.

The results of the study was found that changes of material constant n , ratios of E_c / E_t and the aspect ratio of the cross section \bar{b} / \bar{h} significantly affect the large deflection behavior of the elastica such as stiffness, equilibrium shapes and critical load of the elastica.

Keywords: large deflection, bi-modulus, Ludwick's material, follower load, shooting method

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะสำเร็จลุล่วงไปไม่ได้หากไม่ได้รับความกรุณา และความอนุเคราะห์เป็นอย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ท่านได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ตลอดจนติดตามความก้าวหน้าในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้อย่างใกล้ชิดด้วยดีตลอดมานับตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จเรียบร้อยสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิกเกต ประธานกรรมการสอบและ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วีระศักดิ์ ละอองจันทร์ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาในการแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆของงานวิจัย รวมทั้งเสียสละเวลามาเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิวัฒน์ เจียมมีปรีชา กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก จากคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่กรุณาให้เกียรติเสียสละเวลามาร่วมเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำในด้านต่างๆอันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา(สอศ.) ที่ได้มอบทุนการศึกษาจนจบตามหลักสูตรของทางมหาวิทยาลัย และผู้อำนวยการวิทยาลัยเทคนิคสระแก้วที่ได้มอบโอกาสอันดีแก่ผู้วิจัย ขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกๆท่าน เพื่อนสนิทมิตรสหายและทุกคนในครอบครัว ที่คอยให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจด้วยดีในการจัดทำวิทยานิพนธ์ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา ซึ่งประโยชน์อันใดที่ได้จากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ย่อมถือเป็นผลที่เกิดจากความกรุณาของท่านทั้งหลาย ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะ เป็นประโยชน์สำหรับ ผู้ที่สนใจศึกษางานวิจัยทางด้านนี้ และหากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ขาดตกบกพร่อง หรือไม่มีความสมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขอภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ขจรเกียรติ รักษา

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	(3)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	(4)
กิตติกรรมประกาศ.....	(5)
สารบัญ.....	(6)
สารบัญตาราง.....	(8)
สารบัญรูป.....	(10)
บทที่ 1 บทนำ.....	15
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	15
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	16
1.3 สมมติฐานการวิจัย.....	16
1.4 ขอบเขตของการวิจัย.....	17
1.5 ขั้นตอนการวิจัย.....	17
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	17
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	19
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	19
2.2 สมการการโค้งตัวมากในกรณีทีวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น.....	23
2.3 สมการการโค้งตัวมากในกรณีทีวัสดุเป็นแบบไม่เชิงเส้น.....	26
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	29
3.1 สมมติฐานในการวิเคราะห์.....	29
3.2 ความสัมพันธ์โมเมนต์ตัดและความโค้ง.....	31
3.3 สมการครอบคลุมปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต.....	32
3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ตัดและความโค้งของวัสดุไบโมดูลัส.....	35
3.5 สมการครอบคลุมปัญหาในตัวแปรไร้มิติ.....	39
3.6 กระบวนการคำนวณปัญหา.....	40

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	
4.1 การเปรียบเทียบผลงานวิจัยในอดีต.....	43
4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับความยาวส่วนโค้ง.....	45
4.3 น้ำหนักบรรทุกวิกฤต.....	59
4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับมุมที่ปลายคาน.....	65
4.5 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน $\gamma = E_c / E_f$	69
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย การอภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	70
5.1 ค่าคงที่ของวัสดุมีผลต่อการต้านทานน้ำหนักบรรทุกของวัสดุ.....	71
5.2 อัตราส่วนของ $\gamma = E_c / E_f$	71
5.3 อัตราส่วนของหน้าตัด.....	71
5.4 ข้อเสนอแนะของการทำวิจัยต่อไปในอนาคต.....	72
บรรณานุกรม.....	73
ภาคผนวก.....	76
ภาคผนวก ก ระเบียบวิธีรุงเง - คุดตา (Runge - Kutta Method).....	77
ภาคผนวก ข ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน.....	79
ภาคผนวก ค ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting Method).....	82
ภาคผนวก ง ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ.....	85
ภาคผนวก จ ผลการคำนวณเชิงตัวเลข.....	89
ภาคผนวก ฉ ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่.....	113
ประวัติผู้เขียน.....	130

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น เมื่อ $n=1, h=b, E_c = E_t$ และ $\gamma=0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha=0.25$ กับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม.....	44
ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น เมื่อ $n=1, h=b, E_c = E_t$ และ $\gamma=0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha=0.50$ กับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม.....	44
ตารางที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น เมื่อ $n=1, h=b, E_c = E_t$ และ $\gamma=0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha=0.75$ กับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม.....	45
ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$	50
ตารางที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$	51
ตารางที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$	52
ตารางที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$	53
ตารางที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$	54
ตารางที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$	55
ตารางที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$	56
ตารางที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$	57
ตารางที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ ที่ $\gamma = 0.50, 1.0$ และ 2.0 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$	58

สารบัญตาราง(ต่อ)

	หน้า
ตารางที่ 4.13 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P}_{CR} เมื่อขนาดของหน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลง กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นประเภทลวดวิชชนิดไบโมดูลัส ที่ค่า $n=0.85, 1$ และ 2 ที่อัตราส่วน $\gamma = 0.50$	61
ตารางที่ 4.14 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P}_{CR} เมื่อขนาดของหน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลง กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นประเภทลวดวิชชนิดไบโมดูลัส ที่ค่า $n=0.85, 1$ และ 2 ที่อัตราส่วน $\gamma = 1.0$	62
ตารางที่ 4.14 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P}_{CR} เมื่อขนาดของหน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลง กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นประเภทลวดวิชชนิดไบโมดูลัส ที่ค่า $n=0.85, 1$ และ 2 ที่อัตราส่วน $\gamma = 2.0$	63

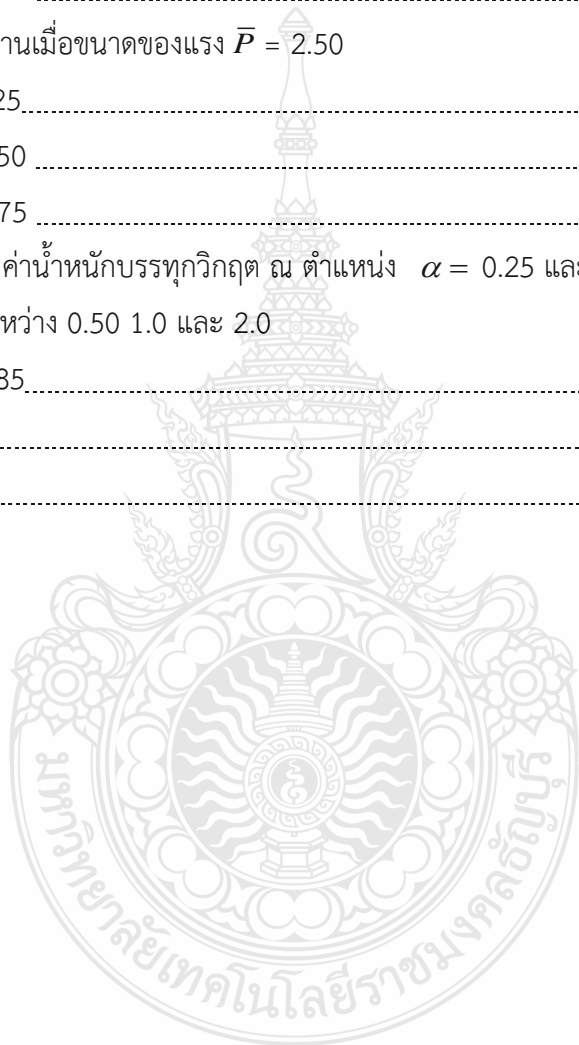


สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้งานท่อส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติ.....	16
รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งยืดหยุ่นและโมเมนต์ดัดของอิลาสติกคา.....	24
รูปที่ 2.2 รูปร่างอิลาสติกคาเมื่อเกิดการเสียรูป.....	25
รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งอิลาสติกคาของวัสดุประเภท ไปโมดูลัส.....	27
รูปที่ 3.1 รูปร่างของอิลาสติกคาทดสอบและตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกกระทำ	
(ก) รูปร่างอิลาสติกคาทดสอบก่อนถูกน้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	30
(ข) เมื่ออิลาสติกคารับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบติดตาม.....	30
รูปที่ 3.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้เมื่อเกิดการเสียรูป.....	31
รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุประเภทลวดวิก.....	32
รูปที่ 3.4 ผังวัตถุอิสระเพื่อใช้ในการวิเคราะห์.....	33
รูปที่ 3.5 ผังวัตถุอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในช่วง $s < \alpha L$	34
รูปที่ 3.6 ผังวัตถุอิสระของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาในช่วง $s > \alpha L$	34
รูปที่ 3.7 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของอิลาสติกคา.....	38
รูปที่ 3.8 เงื่อนไขขอบเขตของอิลาสติกคาช่วงเดียวที่ถูกกระทำด้วยน้ำหนักบรรทุกแบบติดตาม	40
รูปที่ 3.9 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB.....	42
รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างและความยาวส่วนโค้ง ที่ตำแหน่ง α ที่ทำการศึกษา.....	46
รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้งที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$	47
รูปที่ 4.3 ผลกระทบของเส้นโค้งเบี่ยงเบนของแรงที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่มีค่าการเปลี่ยนแปลง อัตราส่วน \bar{h} / \bar{b}	
(ก) เมื่ออัตราส่วน $\bar{h} = \bar{b}$	48
(ข) เมื่อ $n = 0.50$ 0.85 และ 1 ที่ $\bar{h} / \bar{b} = 1.0$ 1.5 และ 2.0	48
(ค) เมื่อ $n = 1$ 2 และ 3 ที่ $\bar{h} / \bar{b} = 1.0$ 1.5 และ 2.0	49
รูปที่ 4.4 เส้นโค้งวิกฤต กรณีอัตราส่วน $E_c / E_t = 0.50$ และ $\bar{h} = 1.5\bar{b}$	60
รูปที่ 4.5 เส้นแรงวิกฤต กรณีอัตราส่วน $E_c / E_t = 0.50$ และ $\bar{h} = 2\bar{b}$	60
รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับมุมที่ปลายคานที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ 0.50 และ 0.75	65

สารบัญรูป (ต่อ)

	65
รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุกกับมุมที่ปลายคานที่ค่า n ต่าง ๆ	
(ก) $\alpha = 0.25$	
(ข) $\alpha = 0.50$	66
(ค) $\alpha = 0.75$	66
รูปที่ 4.8 รูปร่างของคานเมื่อขนาดของแรง $\bar{P} = 2.50$	
(ก) $\alpha = 0.25$	67
(ข) $\alpha = 0.50$	67
(ค) $\alpha = 0.75$	68
รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ และอัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t ระหว่าง 0.50 1.0 และ 2.0	
(ก) $n = 0.85$	68
(ข) $n = 1$	69
(ค) $n = 2$	69



คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

A	ตัวกำกับกลางแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบข้อหมุน
B	ตัวกำกับกลางแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน
C	ตัวกำกับกลางแสดงตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกกระทำ
E	โมดูลัสความยืดหยุ่น
E_c	โมดูลัสความยืดหยุ่นในส่วนของแรงด้นอัด
E_t	โมดูลัสความยืดหยุ่นในส่วนของแรงด้นดึง
σ	ความเค้น
σ_c	ความเค้นอัด
σ_t	ความเค้นดึง
ε	ความเครียด
ε_c	ความเครียดอัด
ε_t	ความเครียดดึง
n	ค่าคงที่ของวัสดุ
γ	อัตราส่วนระหว่างโมดูลัสด้นอัดต่อโมดูลัสด้นดึง
β	สัมประสิทธิ์ตัวคูณลดความสูงของหน้าตัดอิลาสติคคา
I_0	โมเมนต์ของความเฉื่อย
I_n	โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัสดุประเภทลวดวิก
I^*	โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัสดุประเภทลวดวิกชนิดไบโมดูลัส
P	แรงกระทำแบบจุด กระทำในแนวตั้งติดตามการเสียรูปของอิลาสติคคา
L	ความยาวช่วงของอิลาสติคคา
α	ตำแหน่งที่แรงกระทำ
θ	มุมหมุนของอิลาสติคคา
H_A	แรงในแนวราบที่จุด A
V_A	แรงในแนวตั้งที่จุด A
R_B	แรงในแนวตั้งที่จุด B
M	โมเมนต์ดัด
x	ระยะตามแนวราบของอิลาสติคคา
y	ระยะตามแนวตั้งของอิลาสติคคา

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

x^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอีลาสติคคา
y^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวตั้งของอีลาสติคคา
s	ความยาวส่วนโค้งของอีลาสติคคา
S_t	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอีลาสติคคา
κ	ค่าความโค้ง
ρ	รัศมีความโค้ง
b	ความกว้างของอีลาสติคคา
h	ความสูงของอีลาสติคคา
\bar{x}	ระยะตามแนวราบของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{x} = \frac{x}{L} \right]$
\bar{y}	ระยะตามแนวตั้งของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{y} = \frac{y}{L} \right]$
\bar{x}^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอีลาสติคคา แบบไร้หน่วย $\left[\bar{x}^* = \frac{x^*}{L} \right]$
\bar{y}^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวตั้งของอีลาสติคคา แบบไร้หน่วย $\left[\bar{y}^* = \frac{y^*}{L} \right]$
\bar{b}	ความกว้างของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{b} = \frac{b}{L} \right]$
\bar{h}	ความสูงของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{h} = \frac{h}{L} \right]$
\bar{s}	ความยาวส่วนโค้งของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{s} = \frac{s}{L} \right]$
\bar{S}_t	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอีลาสติคคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{S}_t = \frac{S_t}{L} \right]$
\bar{P}	แรงกระทำแบบจุด กระทำในแนวตั้งอยู่เสมอโดยไม่มีารติดตามการเสียรูป แบบไร้หน่วย $\left[\bar{P} = \frac{PL^{n+1}}{EI_n} \right]$
\bar{M}	โมเมนต์ดัดแบบไร้หน่วย $\left[\bar{M} = \frac{ML^{n+1}}{EI_n} \right]$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

\bar{I} โมเมนต์ของความเฉื่อยแบบไร้หน่วย $\left[\bar{I}_o = \frac{I_o}{L^4} \right]$

\bar{I}^* ค่าสติฟเนสของสปริงแบบไร้หน่วย $\left[\bar{I}^* = \frac{I^*}{L \frac{3n+1}{n}} \right]$

Arc - Length	ความยาวส่วนโค้ง
Boundary Condition	เงื่อนไขขอบเขต
Critical Load	น้ำหนักบรรทุกทุกวิกฤติ
Elastica	อีลาสติกา
Euler - Bernoulli	ทฤษฎีของออยเลอร์ - แบรินูลลี
Flowchart	แผนผังแสดงขั้นตอนของการทำงาน
Geometric Relation	ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต
Governing Equation	สมการครอบคลุมของปัญหา
Instability	ความไร้เสถียรภาพ
Large Deflection	การโก่งตัวมาก
Newton - Raphson Method	วิธีนิวตัน - ราฟสัน
Runge - Kutta Method	วิธีรุงเง - คุตตา
Shooting Method	วิธียิงเป้า
Stable Equilibrium	สมดุลแบบมีเสถียรภาพ
Static	สถิตศาสตร์
Strain	ความเครียด
Stress	ความเค้น
Stiffness	ความแข็ง
Total - Arc - Length	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด
Unstable Equilibrium	สมดุลแบบไร้เสถียรภาพ
Variable - Arc - Length Elastica	อีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้
Bi-modulus	วัสดุที่มีความต่างกันของโมดูลัสต้านอัดและดึง
Ludwick's Material	วัสดุประเภทลุดวิก

บทที่ 1

บทนำ

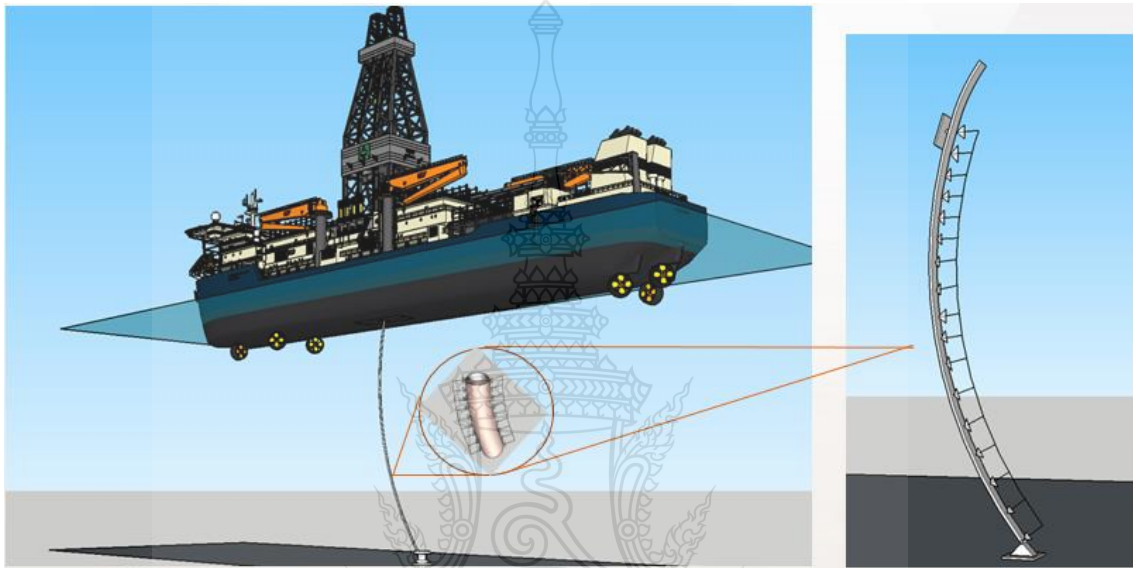
การศึกษาปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาในปัจจุบันมีความหลากหลายในการศึกษา มากขึ้น โดยมีการนำวัสดุที่มีพฤติกรรมที่ไม่เชิงเส้นเข้ามาใช้เป็นแบบจำลองในการศึกษาพฤติกรรม การรับน้ำหนักบรรทุกทุกในแบบต่าง ๆ มากขึ้น เพื่อตอบสนองการใช้งานโครงสร้างที่ต้องการการแอ่นตัวที่มาก แต่ยังคงมีความปลอดภัยในการใช้งาน โดยในงานวิจัยนี้ได้ทำนำเอาวัสดุที่ไม่เชิงเส้นประเภทลวดวิกประเภทไบโมดูลัส มาเป็นแบบจำลองในการวิจัย เพื่อศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่รับภาระกระทำแบบติดตามตามการเสียรูปของอิลาสติคคา โดยในบทนี้ได้ทำการศึกษาความเป็นมาของปัญหา จุดมุ่งหมาย สมมติฐาน ขั้นตอน ขอบเขต ผลที่คาดว่าจะได้ ของปัญหาที่จะทำการศึกษาเพื่อให้บรรลุเป้าหมายในการศึกษาปัญหาดังกล่าวได้เป็นอย่างดี

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันปัญหาเกี่ยวกับอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นแบบจำลองหรือนำไปใช้ในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในหลายสาขา หนึ่งในนั้นคือ ท่อลำเลียงของไหล (Risers) ที่ใช้ลำเลียงปิโตรเลียม (Petroleum) หรือก๊าซธรรมชาติ (Gas) ในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่ง ซึ่งท่อเหล่านี้ต้องรับน้ำหนักบรรทุกเนื่องจากสภาพแวดล้อมที่มีความรุนแรง และความยาวของท่อจะต้องสามารถปรับเปลี่ยนความยาวได้เพื่อลดความเสียหายที่จะเกิดขึ้นกับท่อลำเลียง โดยปัญหาดังกล่าวสามารถจำลองได้เป็นอิลาสติคคาช่วงเดียวที่ปลายด้านหนึ่งที่ติดกับแท่นขุดเจาะเปรียบเสมือนเป็นจุดรองรับแบบยึดหมุน ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งที่ติดกับเรือเปรียบเสมือนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานเพื่อให้ความยาวของท่อสามารถปรับเปลี่ยนได้ตามสภาพแวดล้อมการรับแรง ส่วนน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อท่อลำเลียงจะเป็นน้ำหนักบรรทุกแบบติดตามตามการเสียรูปของอิลาสติคคา ส่วนในด้านของวัสดุที่ใช้ในการทำท่อลำเลียงนั้นจะต้องมีคุณสมบัติในการรับน้ำหนักบรรทุกได้เป็นอย่างดี ซึ่งวัสดุที่ใช้นั้นอาจไม่จำเป็นต้องใช้วัสดุที่มีพฤติกรรมความเป็นเชิงเส้นแต่เพียงอย่างเดียว นั่นคือ อาจมีค่าโมดูลัสต้านรับแรงอัดและแรงดึงที่แตกต่างกัน (E_c / E_t) และมีค่าคงที่ n ที่ไม่เท่ากันทั้งในส่วนดึงและส่วนอัดเป็นต้น เพื่อตอบสนองการใช้งานตามที่ได้กำหนดไว้

สำหรับงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นแบบ Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติคคา โดยใช้แบบจำลองของวัสดุแบบ ลุดวิก (Ludwick's material) โดยการศึกษาพารามิเตอร์ที่

มีผลต่อพฤติกรรมการรับน้ำหนักบรรทุกของอิลาสติกคา ได้แก่ ค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วน E_c / E , และสัดส่วนความกว้างต่อความสูงของหน้าตัด (\bar{b} / \bar{h}) โดยใช้วิธีการยิงเป้าร่วมกับเทคนิคการอินทิกรัลเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุดตา (Runge - Kutta method) และเงื่อนไขที่เหมาะสมในการแก้ไขปัญหา และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลองที่ได้ถูกจัดเตรียมขึ้นเพื่อยืนยันความถูกต้องของผลการศึกษา



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กับงานท่อส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติ

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นโดยใช้แบบจำลองความความสัมพันธ์ระหว่างเค้น - ความเครียดแบบลูตวิก จำพวกไบโมดูลัส (Bi-modulus) รับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสีรูปร่างของอิลาสติกคา

1.2.2 เพื่อหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของอิลาสติกคาช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุประเภทลูตวิก จำพวกไบโมดูลัส

1.2.3 เพื่อศึกษาผลเปรียบเทียบพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่นำเสนอกับอิลาสติกคาในรูปแบบเดียวกันที่ใช้แบบจำลองของวัสดุแบบฮุค (Hooke's)

1.3 สมมติฐานการวิจัย

สมมติฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นแบบ Bi-modulus ที่รับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติคคาโดยใช้แบบจำลองของวัสดุแบบลูตวิก มีดังนี้

- 1.3.1 วัสดุของอิลาสติคคามีความสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันตลอด
- 1.3.2 อิลาสติคคาไม่มีการยึดหดตัวตามแนวแกนเมื่อรับแรง
- 1.3.3 คุณสมบัติของวัสดุเป็นไปตามกฎความสัมพันธ์ของวัสดุแบบลูตวิก
- 1.3.4 แรงที่กระทำต่ออิลาสติคคาจะแปรเปลี่ยนทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติคคาและยึดติดกับตำแหน่งเดิมเสมอ
- 1.3.5 การแอ่นตัวของอิลาสติคคามีมากแต่ในขณะที่มีความเครียดที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย

1.4 ขอบเขตการวิจัย

1.4.1 แบบจำลองของงานวิจัยเป็นงานทำจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้นจำพวกลูตวิก โดยอัตราส่วนของโมดูลัสยืดหยุ่นในด้านรับแรงอัดต่อแรงดึงสามารถกำหนดค่าได้โดยที่ฐานรองรับด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระ และอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับที่ไร้แรงเสียดทาน

1.4.2 การคำนวณเชิงตัวเลขใช้วัสดุไม่เชิงเส้นแบบลูตวิก ที่มีค่าโมดูลัสของวัสดุแตกต่างกันระหว่างแรงอัดและแรงดึง โดยสอดคล้องกับสมการดังแสดงในบทที่ 2

1.5 ขั้นตอนการวิจัย

งานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นแบบไบโมดูลัส ที่รับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคานโดยใช้แบบจำลองของวัสดุแบบลูตวิก การแก้สมการครอบคลุมของปัญหาด้วยวิธียิงเป้าและร่วมกับวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขวิธีรุ่งเง-คุดตาอันดับที่ 4 โดยแบบจำลองของปัญหา มีขั้นตอนการศึกษาดังนี้

- 1.5.1 ศึกษาคุณสมบัติของวัสดุที่แบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น
- 1.5.2 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
- 1.5.3 ศึกษาวิธียิงเป้า (Shooting Method) และการอินทิเกรตด้วยวิธีรุ่งเง-คุดตา
- 1.5.4 เขียนสมการครอบคลุมของปัญหา (Governing Equation) และกำหนดขอบเขตเงื่อนไขที่เหมาะสมในการหาคำตอบ (Boundary Condition)

1.5.5 เปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากโปรแกรม MATLAB กับผลของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.5.6 สรุปผลการศึกษา

1.6 ขอบเขตของการวิจัย

1.6.1 ไม่พิจารณาผลกระทบที่เกิดจากการยืดหดตามแนวแกน (Axial Deformation)

1.6.2 ไม่พิจารณาผลอันเนื่องมาจากการเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Deformation)

1.6.3 พิจารณาเฉพาะหน้าตัดอิลาสติคคาที่เป็นสี่เหลี่ยมเท่านั้น

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.7.1 ทราบพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นแบบจำลองของวัสดุแบบลูตวิก แบบไบโมดูลัส ที่มีค่าโมดูลัสของวัสดุในช่วงแรงอัดและแรงดึงไม่เท่ากันโดยรับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสีรูปร่างของอิลาสติคคา (Follower Load) ที่ตำแหน่ง $0.25L$, $0.50L$ และ $0.75L$

1.7.2 ทราบผลกระทบของความไร้เชิงเส้นของวัสดุ n และอัตราส่วนระหว่าง $\gamma = E_c / E_t$ และขนาดของหน้าตัด $h = cb$ เมื่อ $c = 1.0, 1.5$ และ 2.0 ตามลำดับ ที่มีผลต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาในวัสดุชนิดดังกล่าว

1.7.3 ทราบผลเปรียบเทียบพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่นำเสนอกับอิลาสติคคาในรูปแบบเดียวกันที่ใช้แบบจำลองของวัสดุแบบเชิงเส้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้นชนิดไปโมดูลัสนั้น ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นในรูปแบบของอิลาสติกคายีนและแบบอิลาสติกคาช่วงเดียว ที่รับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะ เป็นภาระกระทำแบบจุด, แบบกระจายสม่ำเสมอและไม่สม่ำเสมอทั่วทั้งอิลาสติกคาและโมเมนต์กระทำที่ปลายของอิลาสติกคา เป็นต้น เพื่อใช้เป็นแนวทางในการทำวิจัย

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในอดีตที่ผ่านมางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา และปัญหาทางอิลาสติกคา ได้มีผู้ทำการศึกษาเอาไว้เป็นจำนวนมาก โดยแบ่งไปตามลักษณะของโครงสร้างที่ถูกน้ำหนักบรรทุกกระทำ และสามารถแบ่งย่อยออกเป็นกลุ่มต่างๆคือ การศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา การวิเคราะห์การโก่งเดาะและหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคา ดังนี้

2.1.1 โครงสร้างที่ถูกกระทำเป็นอิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

สุรพันธ์ บุญเจริญ [1] ได้ทำการศึกษารวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา โดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล ซึ่งปลายข้างหนึ่งของอิลาสติกคามีจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งมีจุดรองรับไร้แรงเสียดทานและอิลาสติกคาสามารถเคลื่อนผ่านได้อย่างอิสระ โดยแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 3 วิธี คือ กรณีแรงกระทำที่จุดกึ่งกลางอิลาสติกคา กรณีโมเมนต์ดัดกระทำที่จุดรองรับแบบข้อหมุน และกรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลาย ผลจากการวิเคราะห์ทั้ง 3 กรณีเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการวิเคราะห์แบบไฟไนท์เอลิเมนต์พบว่าสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Chucheepsakul และคณะ [2] ได้ทำการศึกษารวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำที่ปลายอิลาสติกคาทั้งสองด้าน โดยจะพิจารณาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาตามการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดที่ปลายอิลาสติกคาทั้งสอง ซึ่งจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนอิสระส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน สำหรับกระบวนการวิเคราะห์และหาคำตอบมี 2 วิธี คือ ใช้ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขด้วยวิธีการยิงเป้า

และการหาค่าตอบแบบแม่นยำตรงด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัล และผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ปรากฏว่า ทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

Chucheepsakul และคณะ [3] ได้ทำการศึกษาการแอนตัวมากของอีลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายอีลาสติคาคา โดยอีลาสติคาคาด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนอิสระ ส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจตุรรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีอีลิปติกอินทิกรัลในการวิเคราะห์หาค่าตอบ ซึ่งทั้งสองวิธีนี้ใช้สำหรับหาค่าการแอนตัว, ค่าความยาวส่วนโค้ง, ค่าโมเมนต์ และค่ามุมที่เปลี่ยนแปลงที่จตุรรองรับ ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ปรากฏว่า ทั้งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก และผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัลพบว่าค่าโมเมนต์ค่าหนึ่งจะสามารถเกิดสภาวะสมดุลได้สองรูปแบบ คือ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ และแบบไม่มีเสถียรภาพ

จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ [4] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอนตัวมากของอีลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งของอีลาสติคาคามีค่าไม่คงที่ เนื่องจากปลายข้างหนึ่งของอีลาสติคาคาเป็นจตุรรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจตุรรองรับไร้แรงเสียดทาน เมื่อเกิดการแอนตัวมากปลายอีลาสติคาคาข้างนี้สามารถเคลื่อนผ่านจตุรรองรับได้อย่างอิสระ โดยน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนอีลาสติคาคาแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ กรณีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้ามและมีน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ และ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน ซึ่งทำการแก้ปัญหาด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัล และจากการวิเคราะห์อีลาสติคาคาเมื่ออยู่ภายใต้น้ำหนักบรรทุกดังกล่าวข้างต้นสามารถหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติและตำแหน่งสมดุลสถิตแบบเสถียรภาพและแบบไร้เสถียรภาพของอีลาสติคาคาได้

Wang และคณะ [5] ได้ทำการศึกษาการแอนตัวมากของอีลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใด ๆ ตามแนวแกนราบของอีลาสติคาคา โดยที่อีลาสติคาคามีจตุรรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุนด้วยสปริงต้านทางการหมุน ส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจตุรรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยทำการวิเคราะห์และหาค่าตอบของค่าการแอนตัว, ค่าโมเมนต์ และค่าของมุมที่เปลี่ยนแปลงที่จตุรรองรับด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอีลิปติกอินทิกรัล ซึ่งผลที่ได้จากสองวิธีดังกล่าวมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก

ทินกร มนต์ประภัสสร [6] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอนตัวมากของอีลาสติคาคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยคำนึงถึงผลของการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน ในงานวิจัยดังกล่าวทำการศึกษาสภาวะการรับแรง 3 กรณี คือ กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้ง

สองปลายในทิศทางตรงกันข้าม กรณีโมเมนต์ตัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน และ กรณี
น้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ โดยอิลาสติกาค่าทั้ง 3 ประเภทนี้มีจุดรองรับแบบข้อหมุน
ยึดด้วยสปริงต้านการหมุนแบบยึดหยุ่นเชิงเส้นที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายอิลาสติกาค่าอีกข้างหนึ่งพาด
อยู่บนจุดรองรับแบบมีแรงเสียดทาน สำหรับวิธีที่ผู้ทำการศึกษาใช้วิเคราะห์และหาคำตอบมี 2 วิธี คือ
วิธีการยิงเป้า และวิธีอิลิปติกอินทิกรัล

Chucheeepsakul และคณะ [7] ได้ทำการศึกษาค่าการแอ่นตัวมากของอิลาสติกาค่าที่มีความ
ยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ตัดกระทำที่ปลายอิลาสติกาค่าในทิศทางเดียวกัน โดยหา
คำตอบด้วยวิธีการยิงเป้าและวิธีอิลิปติกอินทิกรัล จากผลการวิเคราะห์พบว่าเมื่อค่าสัดส่วนระหว่าง
โมเมนต์ตัดที่ปลายพาดผ่านจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน β มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าโมเมนต์วิกฤตก็จะมีค่า
เพิ่มขึ้น

บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] ได้ทำการศึกษาค่าการแอ่นตัวมากของอิลาสติกาค่าที่มีความยาวส่วนโค้ง
แปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกเอียงที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติกาค่า โดย
ที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกาค่าเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งของอิลาสติกาค่ายอม
ให้มีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระบนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน เมื่อเกิดการเสียรูปความยาวส่วนโค้ง
ทั้งหมดของอิลาสติกาค่ามีค่าที่ไม่คงที่ โดยหาคำตอบด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลและวิธีการยิงเป้า ซึ่งทั้งสอง
วิธีให้ผลที่ใกล้เคียงกันมาก

Phungpaingam และคณะ [9] ได้ศึกษาค่าการแอ่นตัวมากของอิลาสติกาค่าอย่างง่ายที่มีความ
ยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปของอิลาสติกาค่า โดยการ
หาคำตอบด้วยวิธียิงเป้าและวิธีอิลิปติกอินทิกรัล จากผลการวิเคราะห์พบว่าค่าโมเมนต์ตัดสูงสุดมีค่า
เท่ากับ 8.422

Pulngern และคณะ [10] ได้ศึกษาค่าการแอ่นตัวของอิลาสติกาค่าที่มีความยาวส่วนโค้ง
แปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยการหาคำตอบนั้นมีทั้งหมด 3 วิธี คือ วิธี
ไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการยิงเป้า และ ทฤษฎีของอิลาสติกาค่าแบบเชิงเส้น จากผลการวิเคราะห์พบว่าวิธีไฟ
ไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้ามีการแอ่นตัวที่จุดกึ่งกลางอิลาสติกาค่ามากกว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีของอิล
าสติกาค่าแบบเชิงเส้นเมื่อพิจารณาค่าน้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอตั้งแต่ 2.0 ขึ้นไป

Athisakul และคณะ [11] ได้ศึกษาค่าการแอ่นตัวมากของอิลาสติกาค่าที่มีความยาวส่วนโค้ง
แปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยหาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
และวิธีการยิงเป้า จากการวิเคราะห์ผลพบว่าการยกหรือลดระดับของจุดรองรับมีผลต่อค่าน้ำหนักตัวเอง
กระจายอย่างสม่ำเสมอ เมื่อยกระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่าง

สม่าเสมอ ณ สภาวะวิกฤติที่มีค่าเพิ่มขึ้น และหากลดระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่าเสมอ ณ สภาวะวิกฤติที่มีค่าลดลง

2.1.1 การศึกษาปัญหาการแอ่นตัวมากของโครงสร้างที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้น

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นล้วนแต่เป็นการศึกษาพฤติกรรมของ อีลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีพฤติกรรมแบบเชิงเส้น แต่ในปัจจุบันมี วัสดุจำนวนมากที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดไม่เป็นแบบเชิงเส้น ดังนั้นสมมุติฐานข้างต้นจึงไม่เหมาะสมสำหรับอีลาสติกคาที่ทำจากวัสดุเหล่านี้

นฤพนธ์ ศิลาภากุล [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอีลาสติกคาที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดยทำการศึกษาสภาวะการรับแรงอยู่ 3 ประเภท คือ น้ำหนักบรรทุกกระทำแบบจุดที่กระทำที่ตำแหน่งใดๆในแนวตั้งฉากกับแนวราบไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูป น้ำหนักบรรทุกกระทำแบบแรงอัดที่ปลายอีลาสติกคา มีทิศทางเปลี่ยนแปลงตามการเสียรูป และ น้ำหนักบรรทุกกระทำที่เป็นแรงอัดกระทำที่ปลายอีลาสติกคา ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูป โดยหาค่าตอบด้วยวิธียิงเป้า จากผลการวิเคราะห์พบว่าอีลาสติกคาที่มีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลูตวิก (n) ที่มีค่ามากอีลาสติกคาจะแอ่นตัวมากกว่า อีลาสติกคาที่มีค่าคงที่ของวัสดุประเภทลูตวิก (n) ที่มีค่าน้อย เมื่อพิจารณาที่ค่าน้ำหนักบรรทุกที่เท่ากันและแบบจำลองเดียวกัน

กฤษณะชัย จันทรวง [13] ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอีลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้วัสดุมีคุณสมบัติแบบไม่เป็นเชิงเส้น ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ อีลาสติกคามีจุดรองรับเป็นจุดยึดหมุนที่ปลายข้างหนึ่ง ส่วนปลายอีลาสติกคาอีกข้างจะพาดผ่านจุดรองรับที่ไม่มีแรงเสียดทาน ความยาวช่วงของอีลาสติกคาจะมีค่าคงที่ ส่วนความยาวส่วนโค้งของ อีลาสติกคาจะแปรเปลี่ยนตามน้ำหนักที่มากระทำต่ออีลาสติกคา การศึกษาในครั้งนี้ พิจารณาน้ำหนักบรรทุกที่มากระทำต่ออีลาสติกคาทั้งหมด 3 ลักษณะ คือ ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่าเสมอ ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางการดัดตรงข้ามกัน และ ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางการดัดทางเดียวกัน โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข

SHATNAWI และคณะ [14] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอีลาสติกคายื่นที่ทำจากวัสดุประเภทไบโมดูลัสที่ถูกระงับด้วยโมเมนต์ดัดที่ปลายของอีลาสติกคา โดยกำหนดอัตราส่วนระหว่าง $E_t / E_c = 2$ ที่ค่าคงที่ $n = 0.85, 0.90, 1.00, 1.25$ และ 1.5 ตามลำดับ โดยใช้โปรแกรม ADINA ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวในแนวราบและแนวตั้ง พบว่าพารามิเตอร์ใช้ในการวิเคราะห์ที่มีผลต่อการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง

Brojan และคณะ [15] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคายีนแบบ non-prismatic แบบไม่เชิงเส้นที่ทำจากวัสดุประเภท Bi-modulus ประเภท Generalized Ludwic ที่ถูกนำหน้ากับรทุกแบบกระจายตัวไม่สม่ำเสมอและแรงกระทำแบบจุดที่ปลายอิลาสติกคา โดยศึกษาแบบจำลอง 2 รูปแบบคือแบบ Trapezoidal และ อิลาสติกคาแบบแบน โดยกำหนดคุณสมบัติของวัสดุทั้งสองเหมือนกันคือ ค่า $E_t = 1.73 \text{ MPa}$, $E_c = 5.32 \text{ MPa}$ ค่าคงที่ของวัสดุ $n = 1.619$ สำหรับส่วนรับแรงดึง และ $m = 1.216$ สำหรับส่วนรับแรงอัด และ $\varepsilon_{oT} = \varepsilon_{oC} = 0.001$ เพื่อทำการวิเคราะห์หาตำแหน่งการเคลื่อนตัวแนวแกน x และ y และเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ด้วยเครื่อง Zwick/Roell Z050 พบว่ามีความสอดคล้องกัน

Borboni และคณะ [16] ได้ทำการศึกษา การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคายีนที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นชนิดลุดวิก ที่รับภาระกระทำตามแนวราบและแนวตั้งและแรงบิดที่ปลายอิลาสติกคา เพื่อทำการวิเคราะห์ระยะการแอ่นตัวในแนวราบและแนวตั้ง ในวัสดุไม่เชิงเส้นได้แก่ annealed Copper ภายใต้เงื่อนไขในการรับแรงแบบต่าง ๆ โดยใช้ซอฟต์แวร์ ABACUS/CAE® ช่วยในการวิเคราะห์เพื่อที่จะตรวจสอบผลกระทบของพฤติกรรมการใช้วัสดุที่เกิดการเสียรูปเมื่อใช้ชนิดขอบแรงที่มีความแตกต่างกันกับการเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวตั้งกับหน้าตัดของวัสดุที่ปลายอิสระซึ่งผลการศึกษาสามารถใช้อธิบายพฤติกรรมของวัสดุตัวอย่างได้เป็นอย่างดี

ZHAO และคณะ [17] ได้ทำการศึกษา การหาค่าตอบของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุประเภทไบโมดูลัสภายใต้ภาระกระทำแบบผสม โดยทำการศึกษอิลาสติกคายีนภายใต้เงื่อนไข $L/h \leq 5$ โดยให้ n เป็นอัตราส่วนระหว่าง E_p / E_n โดยใช้อัตราส่วนอยู่ในช่วงระหว่าง 0.2, 1 และ 5 ตามลำดับพบว่าพารามิเตอร์ n มีผลต่อค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบเป็นอย่างมาก นั่นคือ หากค่าพารามิเตอร์ n มีค่าน้อยจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่มากกว่าค่า พารามิเตอร์ n ที่มีค่ามากเมื่ออยู่ภายใต้เงื่อนไขอัตราส่วน L/h ตามที่กำหนด

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นประเภทลุดวิกแบบไบโมดูลัส ที่รับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสียรูปของอิลาสติกคาภายใต้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง [8] และ [14] เพื่อวิเคราะห์ผลของค่า n อัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t และอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของหน้าตัด (\bar{b} / \bar{h}) ที่ต่างกัน ที่มีผลต่ออิลาสติกคา

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง

ทฤษฎีการแอ่นตัวซึ่งโดยทั่วไปจะพิจารณาภายใต้ข้อจำกัดการแอ่นตัวที่มีค่าน้อยเป็นที่รู้จักกันในชื่อสมการของออยเลอร์และเบอร์นูลลี (Euler - Bernoulli) $d^2y/dx^2 = M/EI$ เมื่อพิจารณาการแอ่นตัวมากจึงจำเป็นต้องพิจารณาสมการที่เหมาะสม โดยเรียกทฤษฎีดังกล่าวว่าทฤษฎีอีลาสติกา (Elastica Theory) ซึ่งสามารถเขียนสมการอนุพันธ์ที่อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแอ่นตัวต่อแรงที่กระทำ (ในรูปของโมเมนต์ดัด) ได้ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad (2.1)$$

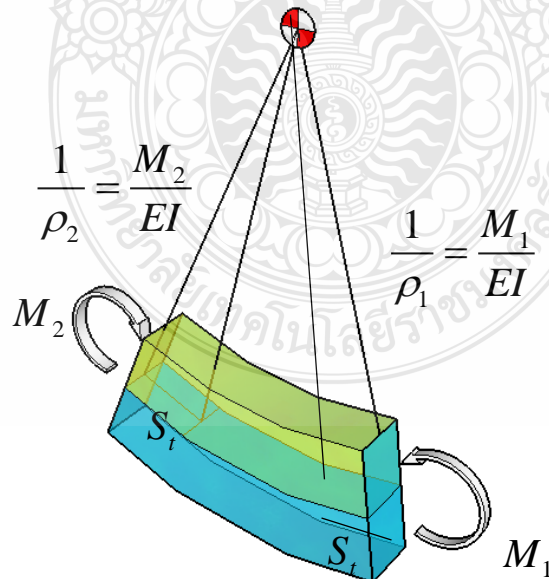
เมื่อ M คือ โมเมนต์ดัด

I คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัด

E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ

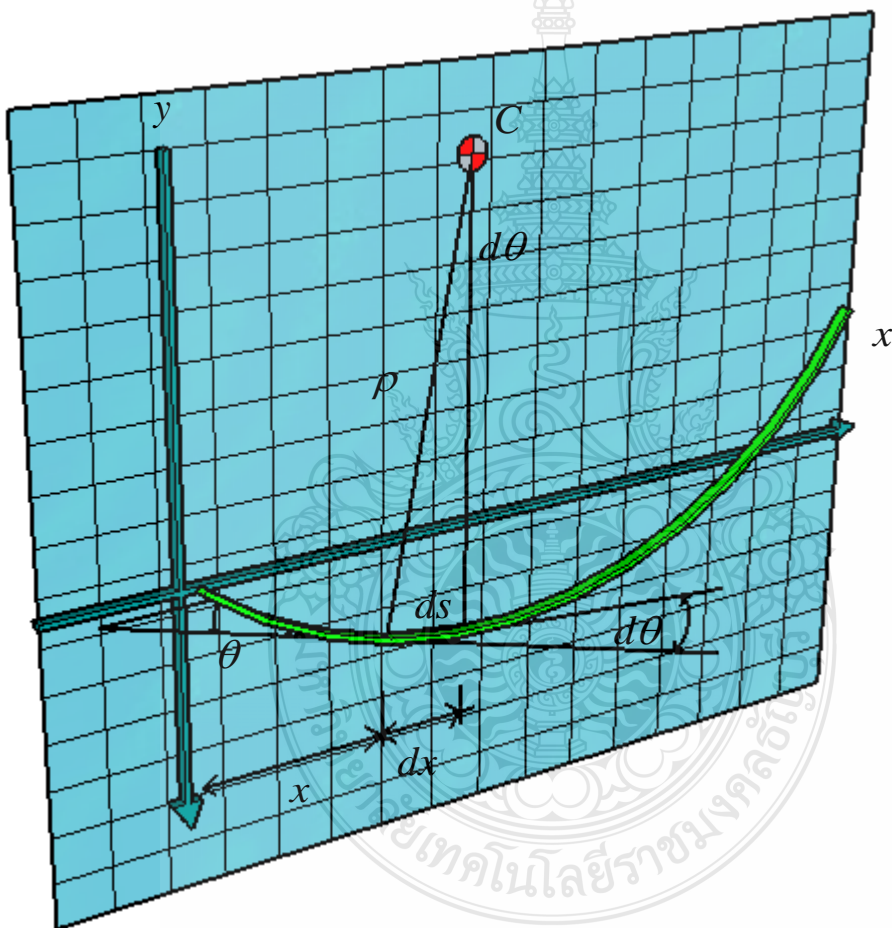
ρ คือ รัศมีความโค้งของระนาบสะเทินของอีลาสติกา

สำหรับอีลาสติกาที่มีค่า M เปลี่ยนไปตามความยาวของอีลาสติกา ยังคงถือว่าสมการข้างต้นใช้ได้สำหรับทุกส่วนของอีลาสติกา โดยที่ ρ จะเปลี่ยนไปตามค่าของ M ของแต่ละหน้าตัด อีลาสติกาแสดงในรูปที่ 2.1 และรัศมีความโค้งของส่วน S_1 และ S_2 จะมีค่าเท่ากับ $1/\rho = M/EI$ และ $1/\rho^2 = M_2/EI$ ตามลำดับ ซึ่งเส้นโค้งของระนาบสะเทินของอีลาสติกาที่เปลี่ยนรูปไปจากเส้นตรงเดิมก่อนการรับน้ำหนักบรรทุกนี้เรียกว่า “เส้นโค้งยืดหยุ่นหรือเส้นโค้ง” ของอีลาสติกา ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งยืดหยุ่นและโมเมนต์ดัดของอีลาสติกา

พิจารณาเส้นโค้งยืดหยุ่นของอีลาสติคคาใดๆในรูปที่ 2.2 โดยสมมติให้ระนาบสะท้อนของอีลาสติคคาก่อนรับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นแกน x และแกน y มีค่าเป็นบวกในทิศทางลงและ ds เป็นส่วนเล็กๆบนเส้นโค้งยืดหยุ่นซึ่งมีปลายด้านซ้ายห่างจากจุด O เป็นระยะ x และมีความยาวตามแนวแกน $x = dx$ โดยถือว่า ds เป็นส่วนโค้งของวงกลมที่มีรัศมีความโค้ง ρ จุดศูนย์กลางที่ C และมุม ds ทำกับจุดศูนย์กลางเท่ากับ $d\theta$ เท่ากับมุมที่เส้นสัมผัสที่ปลายทั้งสอง (A และ B) ของ ds ตัดกัน ถ้า θ_A และ θ_B เท่ากับมุมที่เส้นสัมผัสของเส้นโค้งยืดหยุ่นที่ A และ B (ทำกับแกน x) ตามลำดับจึงเรียก θ_A และ θ_B ว่าความลาด (Slope) ของอีลาสติคคาที่จุด A และ B



รูปที่ 2.2 รูปร่างของอีลาสติคคาเมื่อเกิดการเสียรูป (ลักษณะการโค้งตัวของอีลาสติคคา)

เมื่อ $\theta_{AB} = d\theta$ มุมที่เปลี่ยนไปหรือความลาดที่เปลี่ยนไประหว่างจุด A และ B ของอีลาสติคคาดังนั้นจากรูปที่ 2.2 จะได้สมการ

$$ds = \rho d\theta \quad (2.2)$$

หรือจัดรูปสมการใหม่เป็น

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2.3)$$

และจากสมการความโค้งได้จากหลักทางคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.4)$$

โดยสมมติให้อิลาสติกรับแรงในช่วงยืดหยุ่นมีการโก่งตัวน้อยมาก (ระยะโก่งมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับความยาวของอิลาสติกา) ดังนั้นค่า dy/dx จะมีค่าน้อย และค่า $(dy/dx)^2$ ยิ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ 1 ทำให้สามารถละทิ้งเทอมกำลังสองได้

ดังนั้นทำให้สมการที่ (2.4) กลายเป็นสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นซึ่งเรียกว่าสมการออยเลอร์แบร์นูลลี (Euler-Bernoulli) ดังนี้

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.5)$$

จากรูปที่ 2.2 เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ จะได้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วน ds ดังนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (2.6ก)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (2.6ข)$$

โดยที่

dx คือ ระยะทางในแนวแกนราบของชิ้นส่วนเล็กๆของอิลาสติกา

dy คือ ระยะการแอ่นตัวของชิ้นส่วนเล็กๆของอิลาสติกา

ds คือ ความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนเล็กๆของอิลาสติกา

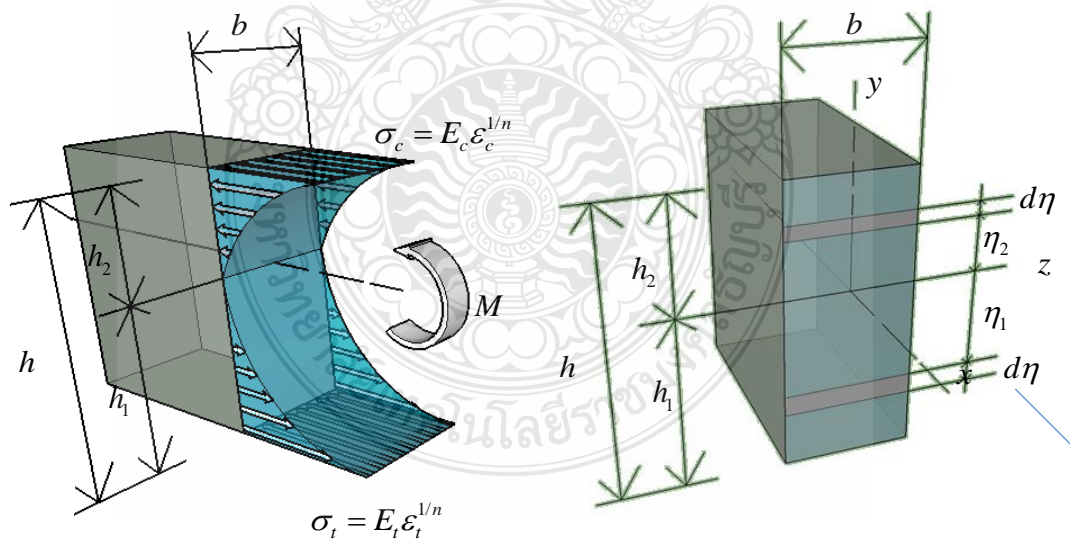
สมการที่ (2.1), (2.6ก) และ (2.6ข) ประกอบกันเป็นสมการครอบคลุมปัญหาสำหรับอิลาสติกา ซึ่งใช้อธิบายการแอ่นตัวของอิลาสติกาที่จุดใดจุดหนึ่งเท่านั้น หากต้องการทราบถึง

พฤติกรรมโดยรวมของ อีลาสติคคาต้องอินทิเกรตสมการที่ (2.1), (2.6ก) และ (2.6ข) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขเพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของวัสดุประเภทไบโมดูลัส

เมื่ออีลาสติคคาที่มีทำจากวัสดุประเภทไบโมดูลัสเกิดการแอ่นตัวเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก มีผลทำให้เกิดโมเมนต์ดัดกระทำกับหน้าตัดอีลาสติคคา มีผลทำให้เกิดการกระจายความเค้นบนหน้าตัด อีลาสติคคาดังกล่าว แต่การกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดอีลาสติคคาประเภทนี้จะแตกต่างจากการกระจายหน่วยแรงบนหน้าตัดอีลาสติคคาที่ทำจากวัสดุแบบเชิงเส้น เนื่องจากวัสดุประเภทนี้จะมีค่าคงที่ของวัสดุ (n) ที่หลากหลายและมีค่าความแตกต่างกันระหว่างโมดูลัสด้านดึง (E_t) และด้านอัดที่ (E_c) ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (2.7ก) และ (2.7ข) โดยลักษณะการกระจายความเค้นบนหน้าตัดอีลาสติคคาได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.3

$$\sigma \begin{cases} \sigma_t = E_t \varepsilon_t^{1/n} \\ \sigma_c = E_c \varepsilon_c^{1/n} \end{cases} \quad 2.7(\text{ก} - \text{ข})$$



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและการกระจายความเค้นบนหน้าตัดของอีลาสติคคาประเภทไบโมดูลัส

เมื่ออีลาสติคเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวจะมีผลให้เกิดความเครียดขึ้นในวัสดุ นั่นคือ เมื่อการแอ่นตัวมาก $d\theta \neq ds$ ค่าความเครียด ε ที่ระยะ η จากแนวแกนสะเทินของหน้าตัดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon = \eta\kappa = \eta \frac{d\theta}{ds} \quad (2.8)$$

$$\text{เมื่อความโค้ง } \kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.9)$$

โดยในวัสดุประเภทโพลิเมอร์ที่มีความแตกต่างกันของค่าโมดูลัสในด้านดึงและด้านอัด ความสัมพันธ์ดังกล่าวได้แสดงไว้ในสมการที่ (2.9ก) และ (2.9ข)

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t \kappa \\ \varepsilon_c = \eta_c \kappa \end{cases} \quad (2.10ก - ข)$$

แทนสมการ (2.10ก) และ (2.10ข) ใน สมการที่ (2.7ก) และ (2.7ข) นั่นคือ

$$\sigma_t = E_t \left(\eta \frac{d\theta}{ds} \right)^n \quad (2.11)$$

$$\sigma_c = E_c \left(\eta \frac{d\theta}{ds} \right)^n \quad (2.12)$$

เมื่อพิจารณาสมการโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งแนวแกนสะเทิน จะได้

$$M = \left[\int_0^{h_1(s)} \eta \sigma_t dA + \int_0^{h_2(s)} \eta \sigma_c dA \right] \quad (2.13)$$

แทนค่า (2.11) , (2.12) และ $dA = b d\eta$ ใน (2.13) จะสังเกตได้ว่าค่าความโค้ง $d\theta/ds$ และ ระยะ h_1 และ h_2 เป็นส่วนหนึ่งของความโค้ง κ ด้วย

$$M = bE_t \frac{n}{2n+1} h_1^{(1+2n)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} h_2^{(1+2n)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} \quad (2.14)$$

จากสมการที่ (2.14) สามารถนำไปสู่การหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทินของหน้าตัดอีลาสติค ที่มีพฤติกรรมไม่เชิงชนิดโพลิเมอร์ต่อไป

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

เมื่อได้ทำการศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องแล้ว ในลำดับต่อไปเพื่อหาคำตอบของการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นประเภทไปโมดูลัสที่รับภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของอิลาสติคคา จึงต้องทำการสร้างสมการครอบคลุมปัญหาและกำหนดขอบเขตเงื่อนไขที่เหมาะสม โดยสมการครอบคลุมปัญหาประกอบด้วยสมการสมดุลความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ และความสัมพันธ์ของรูปร่างทางเรขาคณิต เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เชิงตัวเลข งานวิจัยนี้ได้ใช้วิธียิงเป้าโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขกับระบบสมการอนุพันธ์ ซึ่งภายหลังจากการอินทิเกรตผลลัพธ์ที่ได้ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหา โดยผลการคำนวณที่ได้จะถูกนำมาเรียบเรียงและนำเสนอในรูปแบบของความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ที่สนใจเช่น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนตัว และรูปร่างสมดุล เป็นต้น

3.1 สมมติฐานในการวิเคราะห์

งานวิจัยนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นจำพวกลูตติก ที่มีความแตกต่างกันของค่าโมดูลัสระหว่างส่วนแรงดึงและแรงอัด (E_t และ E_c) ซึ่งถูกกระทำด้วยภาระกระทำแบบติดตาม ณ ตำแหน่ง α เท่ากับ 0.25 0.50 และ 0.75 ตามรูปที่ 3.1 โดยปลายด้านหนึ่งของอิลาสติคคา (A) วางอยู่บนจุดรองรับแบบหมุนได้อิสระ ส่วนปลายอีกด้านหนึ่ง (B) วางอยู่บนจุดรองรับที่ไร้แรงเสียดทาน โดยปลายทั้งสองข้างของจุดรองรับวางห่างกันเป็นระยะเท่ากับ L

โดยมีสมมติฐานในการวิจัยดังนี้

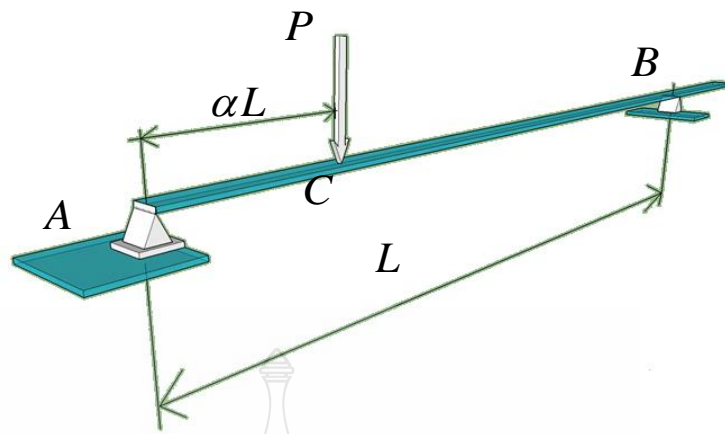
3.1.1 วัสดุอิลาสติคคา มีความสม่ำเสมอและเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogenous Material) และมีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) ตลอดความยาวของอิลาสติคคา

3.1.2 อิลาสติคคาไม่มีการยืดหรือหดตัวตามแนวแกนเมื่อรับแรง

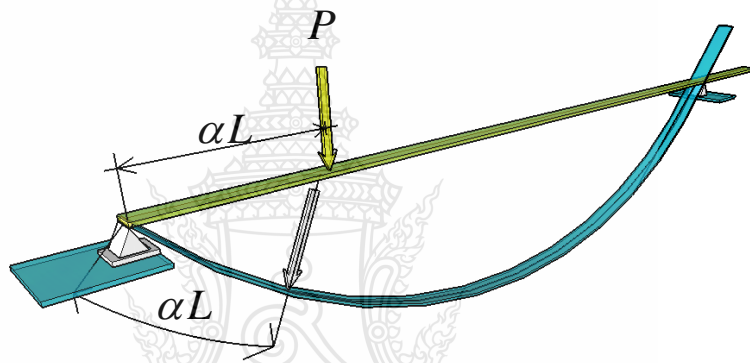
3.1.3 แรงที่กระทำต่ออิลาสติคคาจะเปลี่ยนแปลงทิศทางไปตามการเสียรูปของอิลาสติคคา

3.1.4 แรงที่กระทำต่ออิลาสติคคาจะยึดติดกับตำแหน่งเดิมเสมอ

3.1.5 การแอ่นตัวของอิลาสติคคามีค่ามากในขณะที่ความเครียดมีค่าน้อย



(ก)



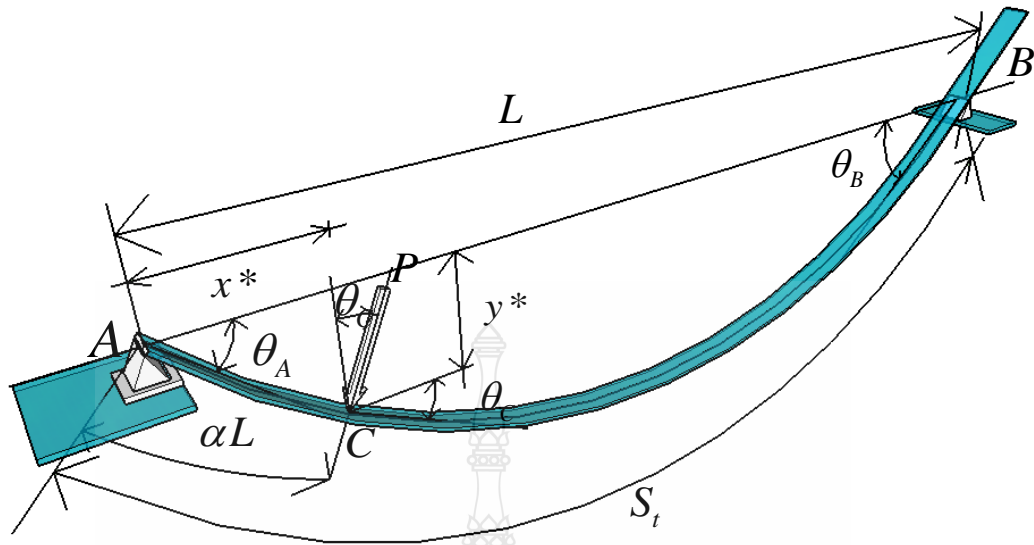
(ข)

รูปที่ 3.1 รูปของอิลาสติกคาททดสอบและตำแหน่งของแรงที่กระทำ

ก) รูปอิลาสติกคาททดสอบก่อนถูกภาระกระทำ

ข) เมื่อรับภาระกระทำแบบติดตาม

เมื่ออิลาสติกคาร์รับภาระกระทำแบบติดตามที่จุด C อิลาสติกคาทจะเกิดการแอ่นตัวดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยจุดรองรับ A และ B จะเกิดการหมุนเป็นมุม θ_A และ θ_B ตามลำดับ ที่จุด C ที่ถูกน้ำหนักบรรทุก P กระทำจะเกิดการเปลี่ยนแปลงทิศทางเป็นมุม θ_C เพื่อให้แรง P ยังคงตั้งฉากกับแกนของอิลาสติกคาทเสมอและยังคงยึดติดอยู่ในตำแหน่งเดิมนั้นคือตำแหน่ง αL มีผลให้ตำแหน่งที่แรง P กระทำเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจาก $(\alpha L, 0)$ เป็นระยะ x^* จากแนวแกน x (อ้างอิงจากจุด A) และเป็นระยะ y^* ตามแนวแกน y โดยที่ความยาวส่วนโค้ง AC ยังคงมีค่า αL ตามสมมติฐานข้อ 3.1.4



รูปที่ 3.2 รูปร่างของอิลาสติกคาเมื่อเกิดการเสียรูป

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง

สมการของโมเมนต์ดัดและความโค้งของอิลาสติกคาสามารถสร้างขึ้นจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดร่วมกับเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบ โดยงานวิจัยนี้ใช้สมบัติของวัสดุไม่เชิงเส้นแบบลูตวิก โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในด้านที่รับแรงดึงและแรงอัดอาจมีค่าที่ไม่เท่ากันได้ (Bi-modulus) โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแบบลูตวิกแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_t = E_t \varepsilon_t^{1/n} \quad (3.1)$$

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c^{1/n} \quad (3.2)$$

เมื่อ σ_t, σ_c คือ ความเค้นในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ

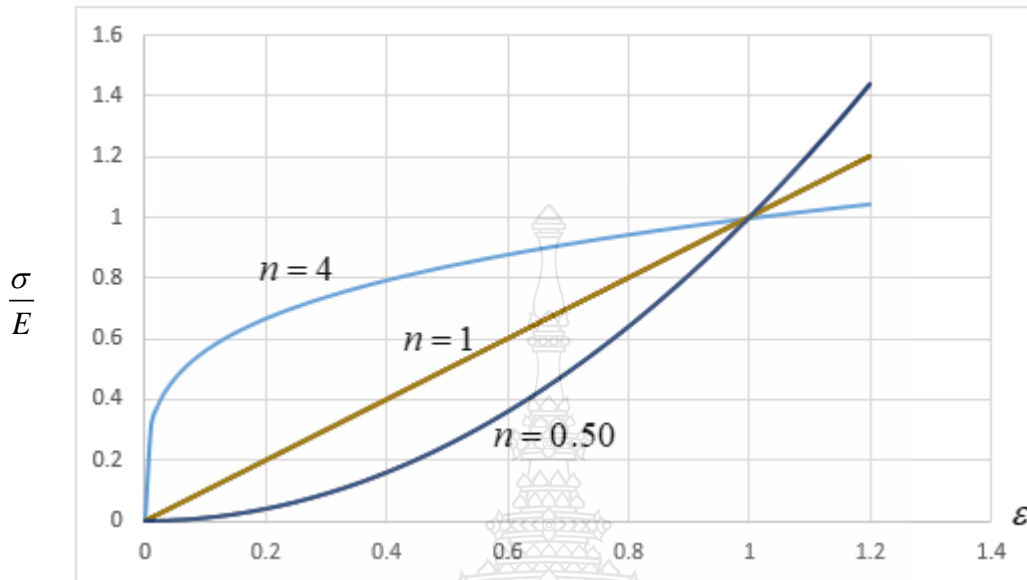
$\varepsilon_t, \varepsilon_c$ คือ ความเครียดในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ

E_t, E_c คือ ค่าโมดูลัสในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ

n คือ ค่าคงของวัสดุ

ค่า n จะบ่งบอกสถานะของวัสดุ กล่าวคือ หากค่า $n < 1$ วัสดุจะมีความ อ่อน (soft) นั่นคือจะทำให้ค่าสตริเฟนทของค่าวัสดุมีค่าลดลง ($d\sigma/d\varepsilon$) ในทางกลับกันหาก $n > 1$ วัสดุจะมีความแข็ง (hard) นั่นคือจะทำให้ค่าสตริเฟนทของวัสดุมีค่าเพิ่มขึ้น ($d\sigma/d\varepsilon$) และความสัมพันธ์ของความเค้น

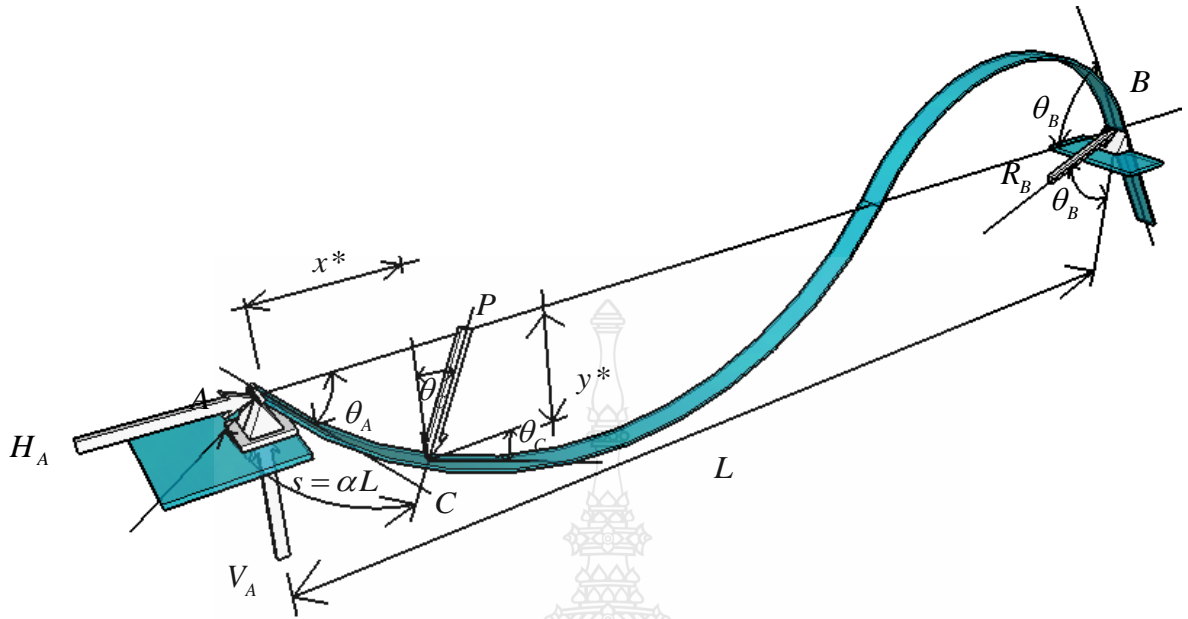
และความเครียดจะมีความเป็นเชิงเส้นเมื่อ $n = 1$ ซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุก โดยความสัมพันธ์ดังกล่าวถูกแสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุประเภทลวดึง

3.4 สมการครอบคลุมปัญหาและเงื่อนไขขอบเขต

พิจารณาอิลาสติกคาชวงเดียวที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นจำพวกลวดึงประเภทไบโมดูลัสที่มีพื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง b และสูง h เนื่องจากวัสดุเป็นประเภทไบโมดูลัสจึงมีความแตกต่างกันของค่าโมดูลัสระหว่างส่วนแรงดึงและแรงอัด (E_t และ E_c) ทำให้หน้าตัดของอิลาสติกคาถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน นั่นคือส่วนรับแรงอัดและแรงดึง ทำให้ค่าความสูงของอิลาสติกคาแบ่งออกเป็น h_1 และ h_2 ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดยอิลาสติกคาดังกล่าวถูกกระทำด้วยภาระกระทำแบบติดตาม (Follower Load) ณ ตำแหน่ง α ที่ 0.25, 0.50 และ 0.75 ตามรูปที่ 3.1(ก) โดยปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคา (A) วางอยู่บนจตุรรองรับแบบหมุนได้อิสระ ส่วนปลายอีกด้านหนึ่ง (B) วางอยู่บนจตุรรองรับที่ไร้แรงเสียดทาน โดยปลายทั้งสองข้างของจตุรรองรับวางห่างกันเป็นระยะเท่ากับ L



รูปที่ 3.4 รูปอิสระแทนแรงเพื่อใช้ในการวิเคราะห์

พิจารณารูปที่ 3.4 โดยสมมติของโมเมนต์รอบจุด A

$\sum M_A = 0$ จะได้ขนาดของ R_B ดังสมการที่ (3.3)

$$R_B = \frac{P}{L \cos \theta_B} (x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C) \quad (3.3)$$

พิจารณาสมดุลของแรงในแนวแกน y ; $\sum F_y = 0$ จะได้

$$R_B \cos \theta_B + V_A - P \cos \theta_C = 0 \quad (3.4)$$

แทนค่า R_B จากสมการที่ (3.3) ในสมการที่ (3.4) จะได้

$$V_A = P \left[\cos \theta_C - \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right] \quad (3.5)$$

พิจารณาสมดุลของแรงในแนวแกน x ; $\sum F_x = 0$ จะได้

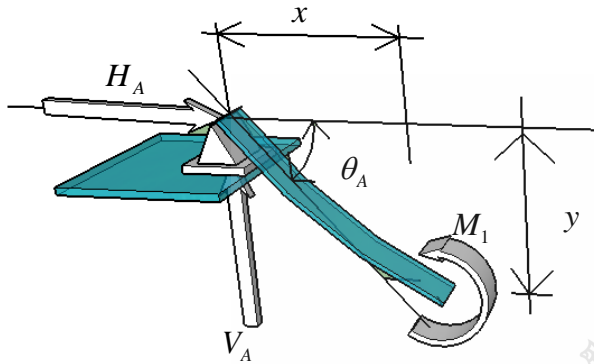
$$H_A + R_B \sin \theta_B - P \sin \theta_C = 0 \quad (3.6)$$

แทนค่า R_B ใน สมการที่ (3.6) จะได้

$$H_A = P \left[\sin \theta_C - \tan \theta_B \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right] \quad (3.7)$$

พิจารณาผังวัตถุอิสระของอีลาสติคค่างรูปที่ 3.5 โดยใช้สมมูลของโมเมนต์ เพื่อหาสมการของ
โมเมนต์ที่ตำแหน่งใด ๆ ดังนี้

พิจารณาช่วง $s < \alpha L$



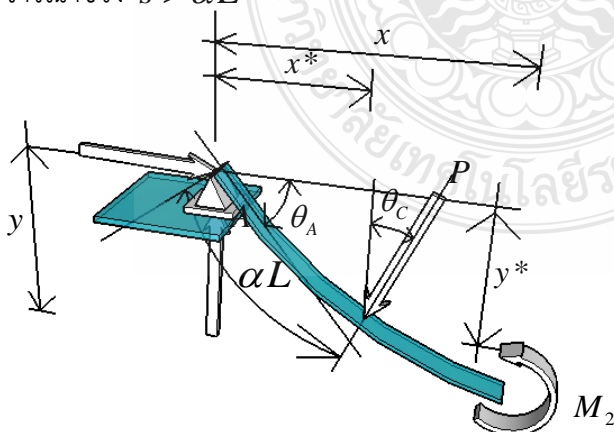
รูปที่ 3.5 ผังวัตถุอิสระของชิ้นส่วนอีลาสติคค่างอยู่ในช่วง $s < \alpha L$

$$M_1 = H_A(y) + V_A(x) \quad (3.8)$$

แทนค่า H_A และ V_A ในสมการที่ (3.8) จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (3.9)

$$M_1 = P \left[\left(\sin \theta_c - \tan \theta_B \frac{(x^* \cos \theta_c + y^* \sin \theta_c)}{L} \right) (y) + \left(\cos \theta_c - \frac{(x^* \cos \theta_c + y^* \sin \theta_c)}{L} \right) (x) \right] \quad (3.9)$$

พิจารณาช่วง $s > \alpha L$



รูปที่ 3.6 ผังวัตถุอิสระของชิ้นส่วนอีลาสติคค่างอยู่ในช่วง $s > \alpha L$

เขียนความสัมพันธ์ของ M_2 จะได้

$$M_2 = H_A(y) + V_A(x) - P \cos \theta_c(x - x^*) - P \sin \theta_c(y - y^*) \quad (3.10)$$

แทนค่า H_A และ V_A จะได้

$$M_2 = P \left[\begin{array}{l} \left(\sin \theta_c - \frac{\tan \theta_B (x^* \cos \theta_c + y^* \sin \theta_c)}{L} \right) (y) + \left(\cos \theta_c - \frac{(x^* \cos \theta_c + y^* \sin \theta_c)}{L} \right) (x) \\ - \cos \theta_c (x - x^*) - \sin \theta_c (y - y^*) \end{array} \right] \quad (3.11)$$

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของวัสดุประเภทไบโมดูลัส

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัด ณ ตำแหน่งต่าง ๆ บนหน้าตัดอีลาสติกคาของวัสดุประเภทไบโมดูลัสสามารถแสดงได้ดังนี้

$$M = \int \sigma y dA \quad (3.12)$$

เนื่องจากวัสดุที่ใช้ในงานวิจัย เป็นวัสดุที่มีความแตกต่างระหว่างความเค้นและความเครียด ความสัมพันธ์ของโมเมนต์บนหน้าตัดใด ๆ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$M = \int \sigma_1 \eta_1 dA + \int \sigma_2 \eta_2 dA \quad (3.13)$$

พิจารณาหน้าตัดอีลาสติกคาดังแสดงในรูปที่ 2.3 หาค่าโมเมนต์ดัดของหน้าตัดรอบแกน z โดยการแทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในสมการที่ (3.14) จะได้

$$M = \int_0^{h_1} E_t \varepsilon_t^{1/n} \eta_1 (b \cdot d\eta) + \int_0^{h_2} E_c \varepsilon_c^{1/n} \eta_2 (b \cdot d\eta) \quad (3.14)$$

ค่าความเครียดของวัสดุที่ไม่เชิงเส้นชนิดไบโมดูลัส สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = y\kappa = y \frac{d\theta}{ds} \text{ เมื่อ } \kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.15)$$

สำหรับความเครียดของวัสดุประเภทไปโมดูลัส จะมีความสัมพันธ์ในส่วนของแรงอัดและแรงดึง ดังสมการที่ (3.16ก) และ (3.16ข) จะได้

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t \kappa & (3.16ก) \\ \varepsilon_c = \eta_c \kappa & (3.16ข) \end{cases}$$

แทนค่าสมการ (3.16ก) และ (3.16ข) ในสมการที่ (3.14)

$$M = \int_0^{h_1} E_t (\eta_t \kappa)^{1/n} \eta_t (b \cdot d\eta) + \int_0^{h_2} E_c (\eta_c \kappa)^{1/n} \eta_c (b \cdot d\eta) \quad (3.17)$$

$$M = bE_t \frac{n}{2n+1} h_1^{(2n+1)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} h_2^{(2n+1)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left(bE_t \frac{n}{2n+1} h_1^{(2n+1)/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} h_2^{(2n+1)/n} \right)^n} \quad (3.19)$$

การหาดำแหน่งของแนวแกนสะเทินในกรณีนี้จะแสดงในรูปของความสูงของ h_1 และ h_2 โดยสามารถพิจารณาได้จากสมดุลของแรงตามแนวแกน x บนหน้าตัด ดังแสดงในรูปที่ 2.3

$$\int \sigma dA = 0 \quad (3.20)$$

จากรูปที่ 2.3 แทนค่าตัวแปรตัวแปรต่าง ๆ และทำการอินทิเกรตตลอดทั้งหน้าตัดจะได้ความสัมพันธ์ในรูปของความสูง h ดังนี้

$$bE_t \frac{n}{n+1} h_1^{(n+1)/n} \kappa^{1/n} - bE_c \frac{n}{n+1} h_2^{(n+1)/n} \kappa^{1/n} = 0 \quad (3.21)$$

เนื่องจาก $h = h_1 + h_2$ (3.22)

จัดรูปใหม่ในรูปของความสูง h_2 จะได้

$$h_2 = h - h_1 \tag{3.23}$$

แทนค่า h_2 ในสมการที่ (3.21) จะได้

$$E_t \frac{n}{n+1} h_1^{(n+1)/n} - E_c \frac{n}{n+1} (h - h_1)^{(n+1)/n} = 0 \tag{3.24}$$

$$h_1 = \frac{h}{[(E_t / E_c)^{n/(n+1)} + 1]} \tag{3.25}$$

$$h_1 = \beta h \tag{3.26}$$

เมื่อ $\beta = \frac{1}{(E_t / E_c)^{n/(n+1)} + 1}$ (3.27)

แทนค่า h_1 ในสมการที่ (3.19) จะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left(bE_t \frac{n}{2n+1} (\beta h)^{(2n+1)/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} (h - \beta h)^{(2n+1)/n} \right)^n} \tag{3.28}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left[E_t b \frac{n}{2n+1} h^{(2n+1)/n} \left(\beta^{(2n+1)/n} + \gamma (1 - \beta)^{(2n+1)/n} \right) \right]^n} \tag{3.29}$$

เมื่อ $\gamma = E_c / E_t$ (3.30)

จัดรูปสมการที่ (3.29) จะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{M}{E_t I^*} \right)^n \tag{3.31}$$

$$\text{เมื่อ } I^* = b \frac{n}{2n+1} h^{(2n+1)/n} \left(\beta^{(2n+1)/n} + \gamma(1-\beta)^{(2n+1)/n} \right) \quad (3.32)$$

จากสมการที่ (3.32) พบว่าหากค่า $E_c = E$ จะทำให้ค่า $\beta = 1/2$ และ $\gamma = 1$ ซึ่งมีผลทำให้สมการที่ (3.32) จัดรูปใหม่ได้ดังสมการที่ (3.33)

$$I^* = b \frac{n}{2n+1} h^{(2n+1)/n} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{(2n+1)/n} + \left(\frac{1}{2} \right)^{(2n+1)/n} \right)$$

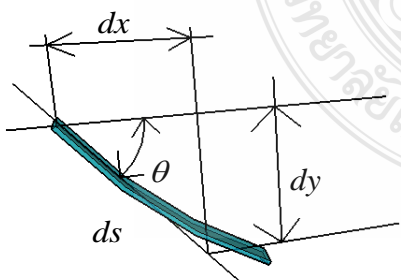
$$I^* = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1/n} \left(\frac{n}{2n+1} \right) h^{(2n+1)/n} b = I_n \quad (3.33)$$

เมื่อ I_n คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัสดุที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้นชนิดลู่คิก

จากสมการที่ (3.33) หากพิจารณาคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น $n=1$ จะทำให้ค่า I^* ลดรูปลงได้ตรงกับค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าดังสมการที่ (3.34)

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} \quad (3.34)$$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาจะให้ความสัมพันธ์ดังนี้



$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3.35)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (3.36)$$

รูปที่ 3.7 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของอิลาสติกคา

สำหรับการศึกษาในครั้งนี้อาจค่าต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณ จะทำการแปลงให้อยู่ในรูปไร้มิติ เพื่อความสะดวกในการคำนวณและเปรียบเทียบผล ค่าที่ทำการแปลงให้เป็นแบบไร้มิติแสดงได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} & \bar{y} &= \frac{y}{L} & \bar{x}^* &= \frac{x^*}{L} \\ \bar{y}^* &= \frac{y^*}{L} & \bar{b} &= \frac{b}{L} & \bar{h} &= \frac{h}{L} \\ \bar{s} &= \frac{s}{L} & \bar{P} &= \frac{PL^{n+1}}{E_t I_n} & \bar{M} &= \frac{ML^{1/n}}{E_t I_n} \\ & & \bar{I}_0 &= \frac{I_0}{L^4} & \bar{I}^* &= \frac{I^*}{L^n} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (3.37\text{ก-ค}) \\ (3.37\text{ง-ฉ}) \\ (3.37\text{ช-ฌ}) \\ (3.37\text{ญ-ฎ}) \end{array}$$

3.5 สมการครอบคลุมปัญหาในตัวแปรไร้มิติ

สำหรับปัญหาอีลาสติคภายใต้ภาระกระทำแบบติดตามสามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติได้โดยอาศัยสมการที่ (3.15), (3.23), (3.27) และสมการที่ (3.28) ซึ่งทำให้ระบบสมการครอบคลุมปัญหาในรูปตัวแปรไร้มิติดังนี้

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (3.38)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (3.39)$$

สำหรับชิ้นส่วนอีลาสติคในช่วง $s \leq \alpha L$

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left(\frac{\bar{M}_1 \bar{I}_0}{\bar{I}^*} \right)^n \quad (3.40)$$

และสำหรับชิ้นส่วนอีลาสติคในช่วง $s > \alpha L$

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left(\frac{\bar{M}_2 \bar{I}_0}{\bar{I}^*} \right)^n \quad (3.41)$$

$$\text{โดยที่ } \bar{M}_1 = \bar{P} \begin{bmatrix} \sin \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c) \tan \theta_B \\ + [\cos \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)] (\bar{x}) \end{bmatrix} (\bar{y}) \quad (3.42)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{P} \left[\begin{array}{l} [\sin \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c) \tan \theta_B](\bar{y}) + [\cos \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)](\bar{x}) \\ -\cos \theta_c (\bar{x} - \bar{x}^*) - \sin \theta_c (\bar{y} - \bar{y}^*) \end{array} \right] \quad (3.43)$$

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{b} \bar{h}^3}{12} \quad (3.44)$$

$$\bar{I}^* = \bar{b} \frac{n}{2n+1} \bar{h}^{(2n+1)/n} (\beta^{(2n+1)/n} + \gamma(1-\beta)^{(2n+1)/n}) \quad (3.45)$$

3.5 กระบวนการคำนวณปัญหา

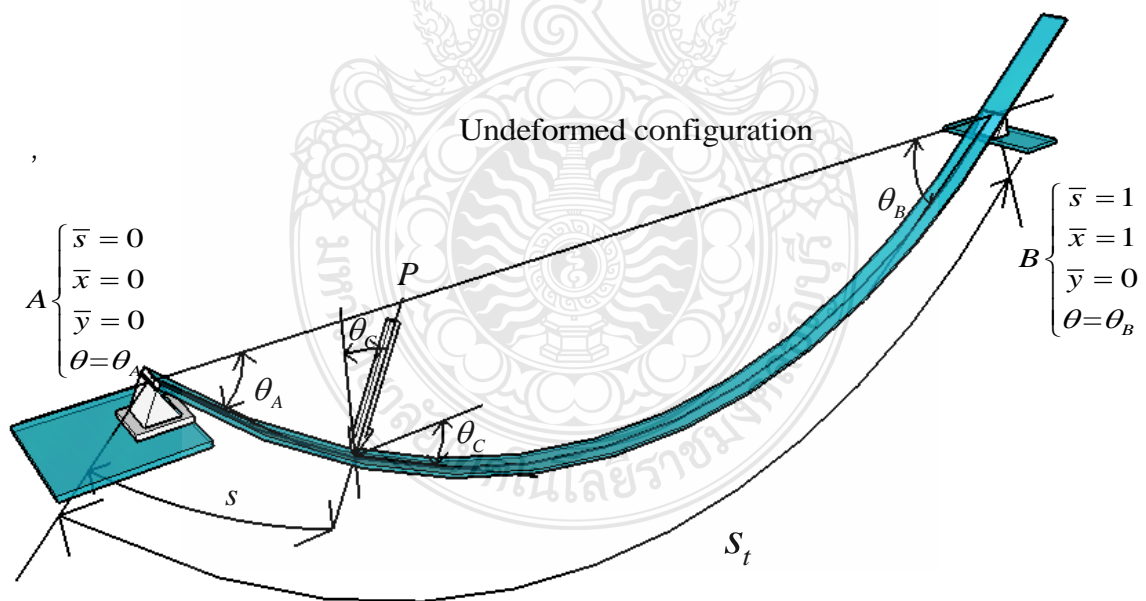
การหาคำตอบของระบบสมการอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติข้างต้นสามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้า โดยมีเงื่อนไขของเขต 2 จุด ณ ตำแหน่งปลายทั้งสองของอีลาสติคกาดังนี้

เงื่อนไขขอบเขตจุดปลายด้านซ้าย (จุด A)

$$\bar{s} = 0, \bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \theta = \theta_A \quad (3.46ก-ง)$$

เงื่อนไขขอบเขตจุดปลายด้านขวา (จุด B)

$$\bar{s} = 1, \bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \theta = \theta_B \quad (3.47ก-ง)$$



รูปที่ 3.8 เงื่อนไขขอบเขตของอีลาสติคกช่วงเดียวที่ถูกกระทำด้วยภาระกระทำแบบติดตาม

สำหรับขั้นตอนและวิธีการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB ของแบบจำลองปัญหาข้างต้น มีขั้นตอนการศึกษา

3.5.1 กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม (Control Variable) ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา \bar{S}_i เป็นตัวแปรควบคุม พร้อมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ ณ ตำแหน่ง $\bar{S}_i = 0$ และ $\bar{S}_i = 1$

3.5.2 กำหนดค่าเริ่มต้น ระยะ α และกำหนดคุณสมบัติวัสดุ n, \bar{b}, \bar{h}, E_i และ E_c

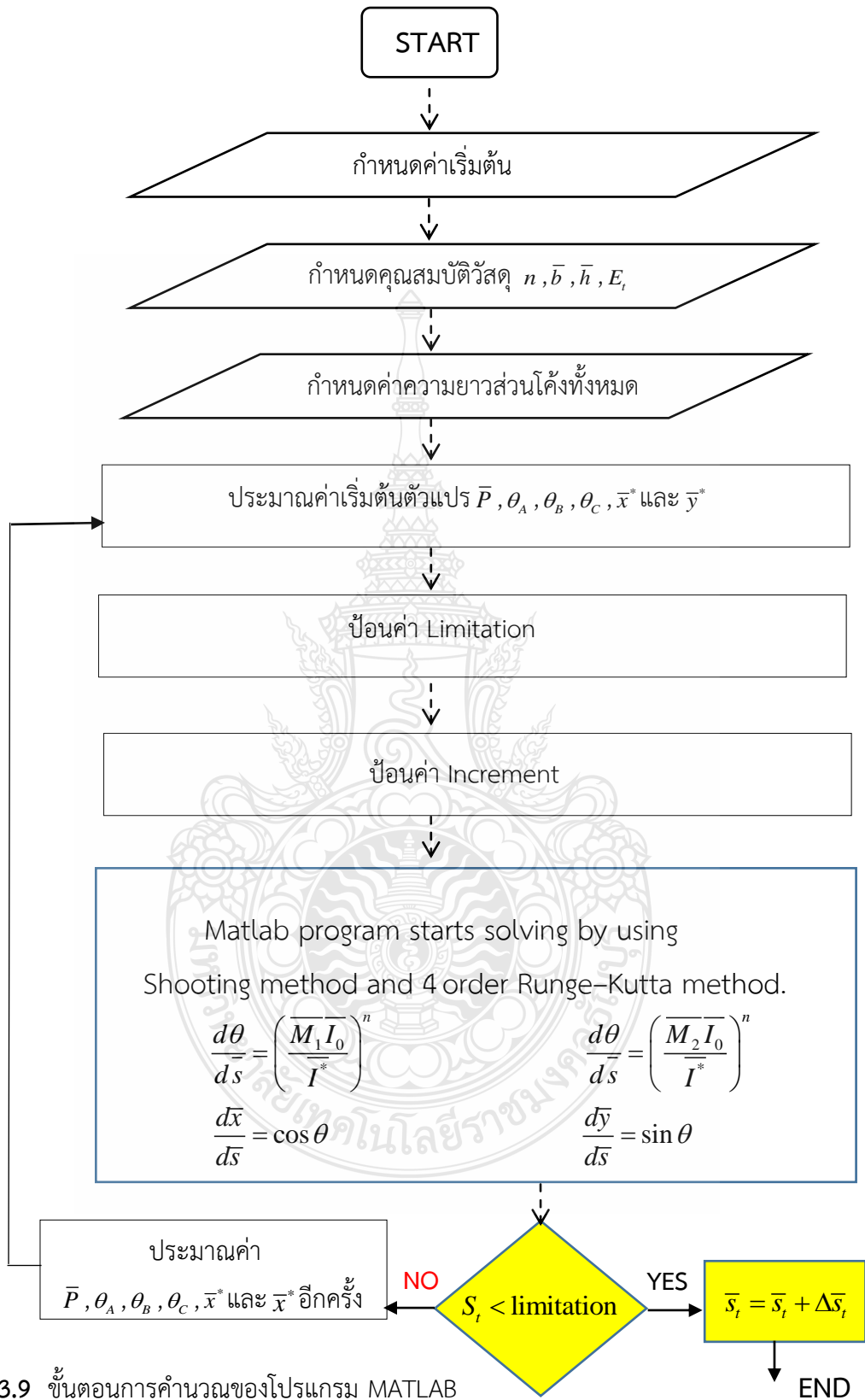
3.5.3 กำหนดค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเริ่มต้น \bar{S}_i

3.5.4 ประเมินค่าเริ่มต้นตัวแปรที่ต้องการ ได้แก่ $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการคำนวณด้วยวิธีการยิงเป้าร่วมกับวิธีอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ โดยที่การอินทิเกรตจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดในสมการที่ (3.46ก-ง) และ (3.47ก-ง) ซึ่งได้ใช้กระบวนการกระทำซ้ำของ นิวตัน-ราฟสันในการปรับแก้ค่าประมาณการเริ่มต้นเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (3.48) โดยมีความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ 10^{-7}

$$\underset{\bar{x}, \bar{y}, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*, \bar{y}^*}{\text{Min}} \phi = |\bar{x}(\bar{S}_i = 1) - 1| + |\bar{y}(\bar{S}_i = 1)| + |\theta(\bar{S}_i = 1) - \theta_B| + |\theta_C - \theta_s| + |\bar{x}^* - \bar{x}_s| + |\bar{y}^* - \bar{y}_s| \quad (3.48)$$

3.5.5 ภายหลังจากกระบวนการหาคำตอบโดยวิธีนิวตัน ราฟสัน จะทำการปรับค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้นเป็น $\bar{S}_i = \bar{S}_i + \Delta \bar{S}_i$ และเริ่มกระบวนการหาคำตอบโดยวิธีนิวตัน-ราฟสันต่อไปจนกระทั่งได้คำตอบทั้งหมดที่อยู่ในช่วงที่สนใจ





รูปที่ 3.9 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB

บทที่ 4

ผลการศึกษาและการวิเคราะห์

ในการดำเนินการศึกษาในส่วนนี้ หลังจากที่ได้ทำการสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ผลในการศึกษาผลกระทบของความไร้เชิงเส้นของวัสดุ ที่มีผลต่อการอ่อนตัวมากของอิลาสติคคาช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นประเภทลวดวิกชนิดไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำแบบติดตาม ซึ่งผลการวิเคราะห์นี้ได้ถูกแสดงได้ในตารางที่ 4. โดยในแต่ละตารางได้แสดงค่า $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* และ \bar{S}_r สำหรับค่า $\alpha = 0.25, 0.50$ และ 0.75 ที่อัตราส่วน $\gamma = E_c / E_r = 0.50, 1.0$ และ 2.0 โดยมีที่ค่าคงที่ n และอัตราส่วนของหน้าตัดคาน ($h = cb$) เมื่อ $c = 1.0, 1.5$ และ 2.0 ตามลำดับ เป็นตัวแปรสำคัญ

4.1 ตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์

เพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นมานั้นมีความถูกต้อง และสามารถนำมาใช้ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยนำไปเปรียบเทียบกับปัญหาการโก่งตัวมากของคานที่มีส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน ในงานวิจัยของ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8]

จากตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ปัญหาในกรณีวัสดุแบบเชิงเส้นโดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] กล่าวคือกำหนดให้ $n=1, \bar{b} = \bar{h}, E_r = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ เพื่อเปรียบเทียบค่า $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* ที่ตำแหน่ง $\gamma = 0.25, 0.50$ และ 0.75 ซึ่งได้ค่าใกล้เคียงกันมาก

ตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบค่า $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น $n=1, \bar{b} = \bar{h}, E_t = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ กับงานวิจัยของบุญชัยผ่องไฝ่งาม [8]

α	\bar{S}_t or L	\bar{P}		θ_B		θ_A		\bar{x}^*		\bar{y}^*	
		[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย
	1.010819	4.330123	4.330117	0.1745	0.174500	0.244952	0.244952	0.244365	0.244365	0.052218	0.052218
	1.044502	7.869458	7.869447	0.349000	0.348999	0.493547	0.493546	0.227096	0.227096	0.10349	0.103490
	1.104846	9.986967	9.986963	0.523500	0.523499	0.747794	0.747794	0.197377	0.197377	0.152074	0.152074
	1.198341	10.372048	10.372047	0.698000	0.698001	1.005097	1.005095	0.155032	0.155032	0.194671	0.194671
0.25	1.333249	9.163918	9.163922	0.872500	0.872500	1.252929	1.252929	0.103042	0.103042	0.226472	0.226472
	1.515245	6.937883	6.937888	1.047000	1.047000	1.463704	1.463701	0.050605	0.050605	0.243855	0.243855
	1.738018	4.420526	4.420525	1.221500	1.221500	1.600061	1.600061	0.011713	0.011713	0.249144	0.249144
	1.975618	2.084838	2.084841	1.396000	1.396000	1.636091	1.636091	0.003257	0.003257	0.249706	0.249706
	2.188422	0.000188	-0.000365	1.57078	1.570828	1.570807	1.570758	0.007469	0.007480	0.249945	0.249799

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบค่า $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น $n=1, \bar{b} = \bar{h}, E_t = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$ กับงานวิจัยของบุญชัยผ่องไฝ่งาม [8]

α	\bar{S}_t or L	\bar{P}		θ_B		θ_A		\bar{x}^*		\bar{y}^*	
		[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย
	1.008212	2.715067	2.715077	0.174500	0.174501	0.175448	0.175449	0.495883	0.495883	0.058577	0.058577
	1.03399	4.981246	4.981230	0.349000	0.348999	0.356670	0.356672	0.482819	0.482818	0.119613	0.119614
	1.081072	6.413938	6.413935	0.523500	0.523501	0.549777	0.549777	0.458461	0.458461	0.185470	0.185470
	1.156727	6.762584	6.762587	0.698000	0.698001	0.760870	0.760872	0.418294	0.418294	0.257817	0.257819
0.50	1.272936	5.998357	5.998360	0.872500	0.872500	0.993042	0.993042	0.355591	0.355591	0.335526	0.335526
	1.444737	4.420040	4.420042	1.047000	1.047000	1.235579	1.235579	0.265928	0.265928	0.409838	0.409838
	1.676808	2.635556	2.635556	1.221500	1.221500	1.446379	1.446379	0.162919	0.162919	0.463099	0.463099
	1.941781	1.148200	1.148200	1.396000	1.396000	1.565835	1.565835	0.084819	0.084819	0.487088	0.487088
	1.008212	2.715067	2.715077	0.174500	0.174501	0.175448	0.175449	0.495883	0.495883	0.058577	0.058577

ตารางที่ 4.3 เปรียบเทียบค่า \bar{P} , θ_A , θ_B , θ_C , \bar{x}^* และ \bar{y}^* กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น $n=1$, $\bar{b} = \bar{h}$, $E_t = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$ กับงานวิจัยของบุญชัยผ่องไฝงาม [8]

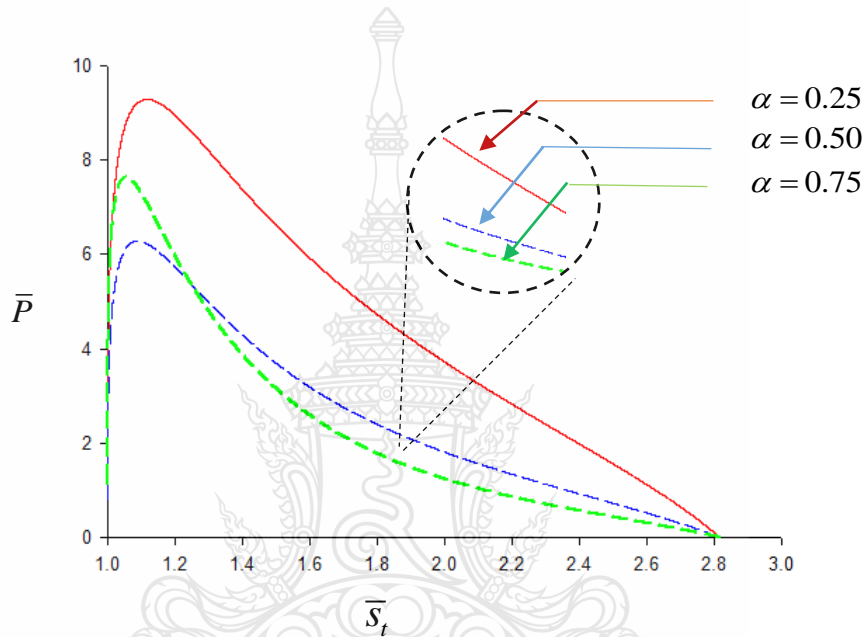
α	\bar{S}_t or L	\bar{P}		θ_B		θ_A		\bar{x}^*		\bar{y}^*	
		[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย	[8]	งานวิจัย
	1.005536	3.100351	3.100293	-0.174500	-0.174497	0.125412	0.125409	0.747366	0.747366	0.037962	0.037961
	1.022994	5.678727	5.678726	-0.349000	-0.349000	0.255601	0.255601	0.739148	0.739148	0.079452	0.079452
	1.055233	7.311695	7.311699	-0.523500	-0.523501	0.396224	0.396224	0.724202	0.724202	0.128599	0.128599
	1.108255	7.746291	7.746292	-0.698000	-0.697990	0.554940	0.554939	0.699778	0.699778	0.190910	0.190910
0.75	1.193895	6.939319	6.939238	-0.872500	-0.872500	0.742907	0.742919	0.659481	0.659478	0.274228	0.274234
	1.334850	5.099883	5.099626	-1.047000	-1.047000	0.974164	0.974194	0.588826	0.588815	0.388022	0.388037
	1.564512	2.821907	2.821904	-1.221500	-1.221500	1.245993	1.245993	0.464535	0.464535	0.529376	0.529376
	1.877661	1.035886	1.035654	-1.396000	-1.396000	1.477404	1.477433	0.302553	0.302527	0.648190	0.648205
	1.005536	3.100351	3.100293	-0.174500	-0.174497	0.125412	0.125409	0.747366	0.747366	0.037962	0.037961

4.2 การอ่อนตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่เชิงเส้น จำพวก ลูตวิกแบบไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางการเสีรูปของคาน

งานวิจัยนี้ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตของคานที่มีคุณสมบัติของวัสดุแบบลูตวิก ดังแสดงในตารางที่ 2 เมื่อกำหนดให้ค่า α อยู่ระหว่าง 0.10 – 0.90 ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 เมื่ออัตราส่วนระหว่าง $E_c / E_t = 0.50, 1$ และ 2 โดยพิจารณาอัตราส่วนของหน้าตัด $b = ch$ เมื่อ $c = 1, 1.5$ และ 2 เพื่อแสดงผลกระทบของค่าแรงวิกฤตที่เกิดขึ้นตามเงื่อนไขดังกล่าว พบว่า ทุกกรณีจะมีลักษณะคล้ายกัน กล่าวคือ ตำแหน่งที่ใกล้จุดรองรับจะให้ค่า \bar{P}_{CR} ที่มากและจะมีขนาดที่ลดลงเมื่อตำแหน่งของ α ที่เพิ่มขึ้น แต่เมื่อตำแหน่ง α ผ่านตำแหน่งวิกฤตไปแล้ว ค่า \bar{P}_{CR} จะมีขนาดเพิ่มขึ้นจนกระทั่งมีค่าสูงสุดอีกครั้งที่ตำแหน่ง α ที่เข้าใกล้จุดรองรับด้านขวา แต่ขนาดจะมีของ \bar{P}_{CR} จะมีค่าที่เพิ่มขึ้นมากหรือน้อยนั้นจะมีปัจจัยของค่า n และอัตราส่วนของความกว้างต่อความสูงของหน้าตัดเป็นปัจจัยสำคัญ โดยผลต่าง ๆ ได้ถูกอธิบายไว้ดังนี้

4.2.1 เส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load-Deflection Curve)

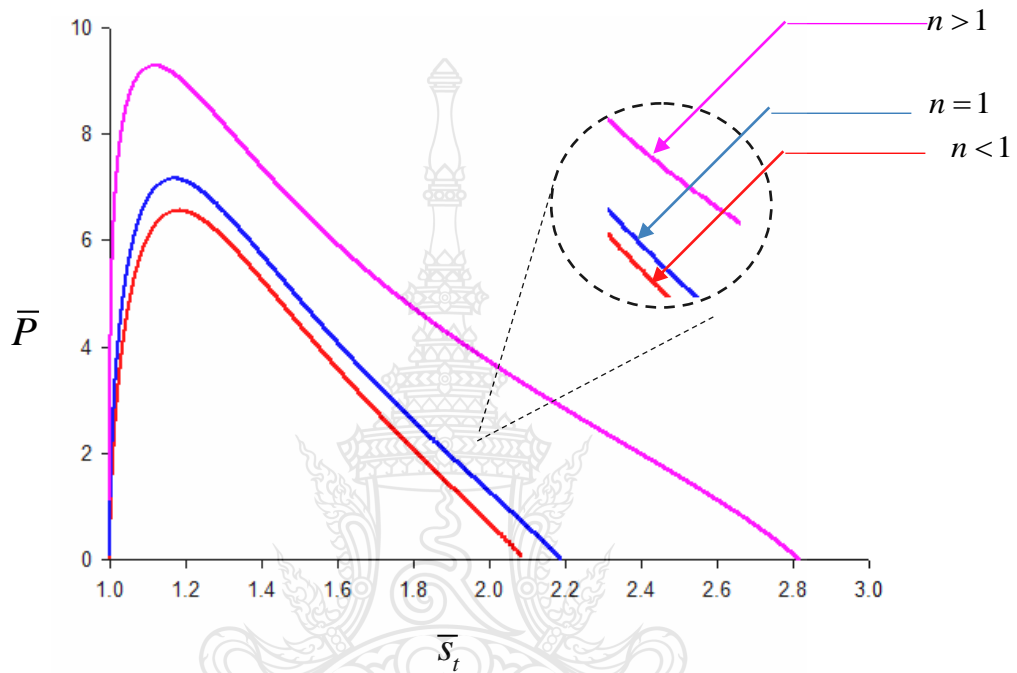
เส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรงเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลการทดสอบที่คำนวณได้ (น้ำหนักบรรทุก \bar{P}) และความยาวส่วนโค้ง \bar{s}_t เพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} และความยาวส่วนโค้งวิกฤต ก่อนที่อิลาสติกคาจะเกิดการเสียสมดุลของอิลาสติกคาที่ทำจากวัสดุแบบ ลูตวิก ชนิดไบโมดูลัสสามารถรับได้



รูปที่ 4.1 เส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load-Deflection Curve) ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25, 0.50$ และ $\alpha = 0.75$ ที่ค่า $n = 0.85$

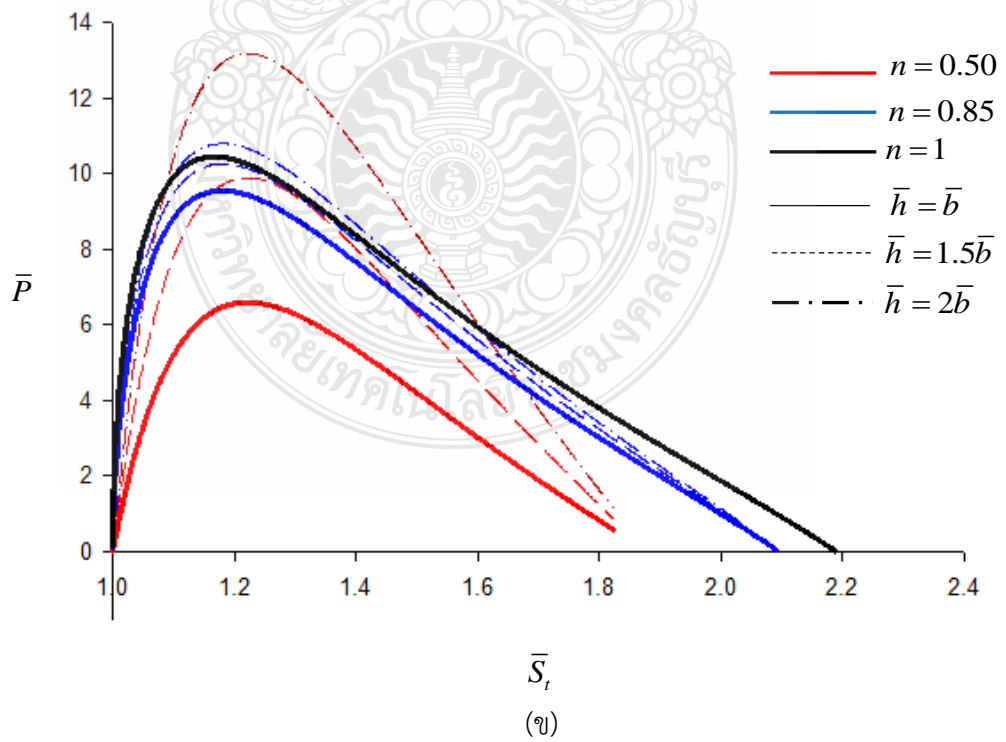
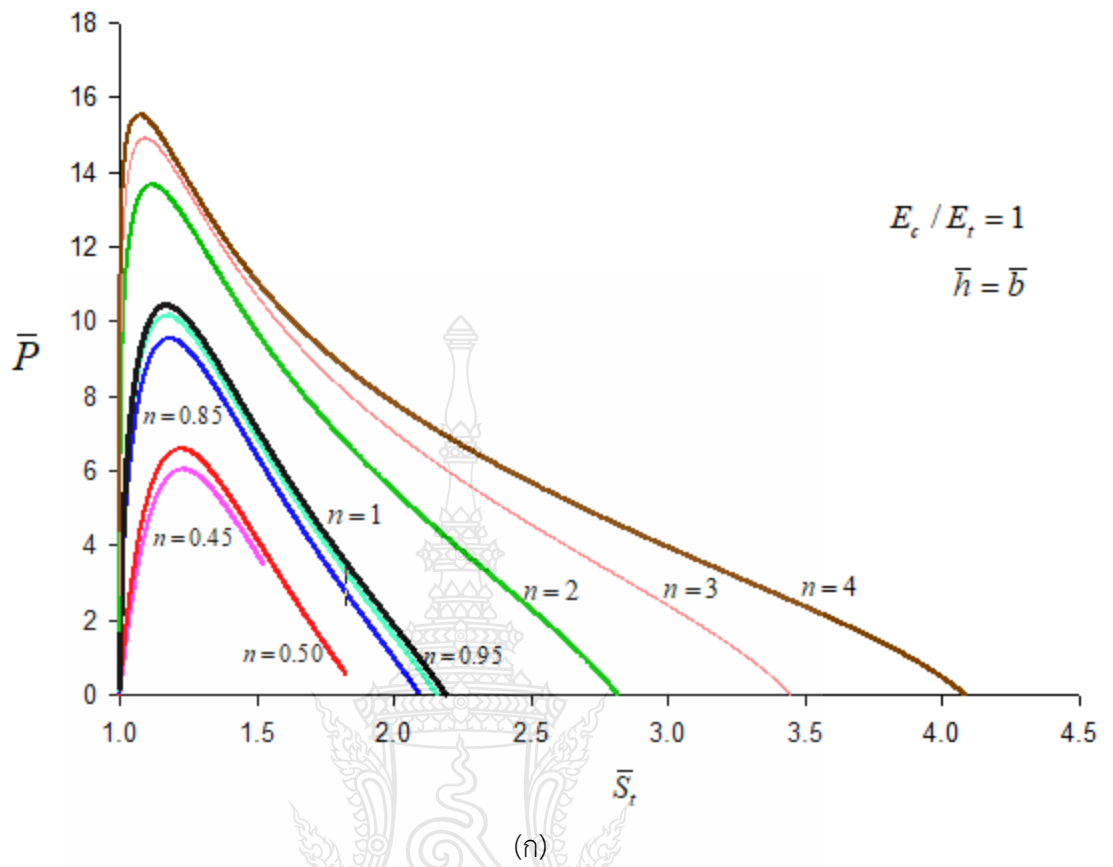
เมื่อนำค่าของ \bar{P} และ \bar{s}_t ของทุก α มาสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกบรรทุก \bar{P} กับความยาวส่วนโค้ง \bar{s}_t ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.1 จะมีลักษณะคือ ที่เริ่มแรกเมื่อเพิ่มน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ให้กับอิลาสติกคา ค่าของแรง \bar{P} จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึงจุดสูงสุดที่มีค่าเท่ากับน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} โดยจะมีค่า \bar{s}_t ที่จุดสูงสุดที่ใกล้เคียงกัน นั้นค่าประมาณ 1.02 – 1.18 โดยจะขึ้นอยู่กับค่า n และตำแหน่งของ α นั่นคือ ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ จะให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤตมากกว่าค่าน้ำหนักบรรทุกที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$ และ 0.75 เนื่องจากที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ นั้นอยู่ใกล้กับจุดรองรับทำให้น้ำหนักบรรทุกดังกล่าวมีค่ามากซึ่งเป็นผลจากการยึดรั้งบริเวณจุดรองรับ ในทำนองเดียวกัน ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$ ก็ได้รับอิทธิพลจากการยึดรั้งจากจุดรองรับทางด้านขวามือเช่นเดียวกัน ทำให้น้ำหนักบรรทุกที่ตำแหน่งดังกล่าวมีขนาดเพิ่มขึ้นเช่นกัน

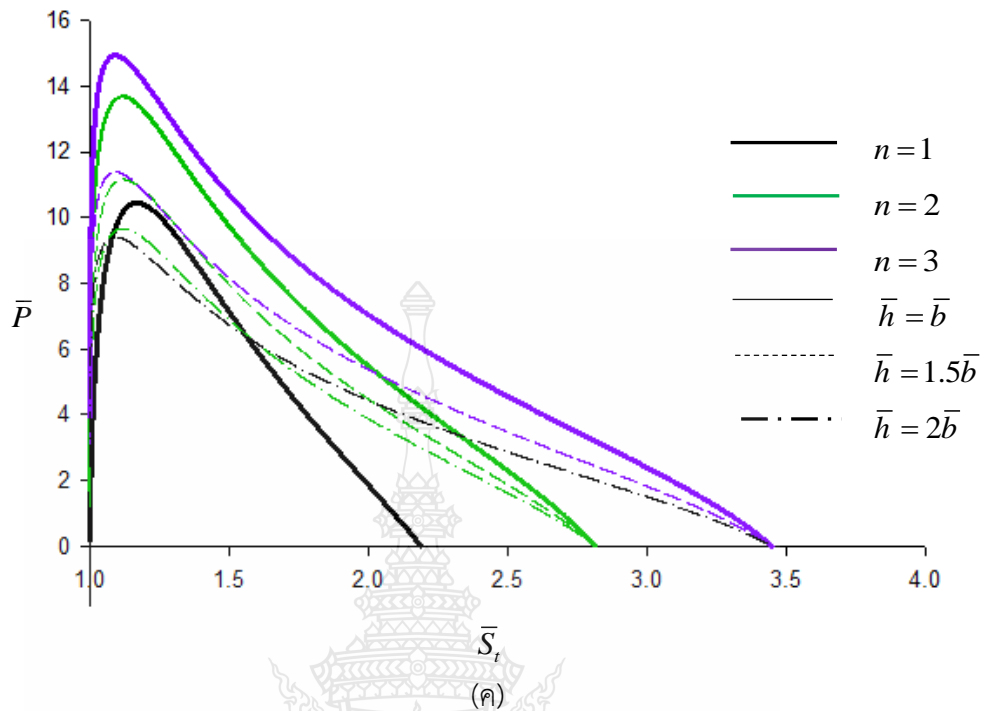
หากพิจารณาผลของค่า n ร่วมด้วยจะพบว่า หากค่า $n > 1$ และตำแหน่งของ α ที่มีค่ามาก จะทำให้ค่าของ \bar{s}_t ที่จุดสูงสุด มีแนวโน้มที่จะเข้าใกล้ 1 จากนั้นค่าของแรง \bar{P} จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องจนกระทั่งเข้าใกล้ศูนย์ โดยค่า \bar{s}_t จะมีความยาวที่เพิ่มขึ้นตามค่า n ดังแสดงในรูปที่ 4.2 โดยค่าของแรง \bar{P} และความยาวส่วนโค้งในแต่ละกรณีได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 4.4 - 4.12



รูปที่ 4.2 เส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load-Deflection Curve) ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$

หากนำขนาดของหน้าตัดมาใช้ในการพิจารณา จะพบว่ากรณีที่มีการเพิ่มความสูง \bar{h} ในกรณีที่อัตราส่วน $\bar{h} = \bar{b}$ ที่ค่า n ใด ๆ ขนาดของแรง \bar{P} จะมีค่ามากดังแสดงในรูปที่ 4.3 ก แต่หากมีการเพิ่มอัตราส่วนดังกล่าวให้มีค่ามากขึ้น จะพบว่า ในกรณีที่ $n < 1$ จะมีผลทำให้น้ำหนักบรรทุก \bar{P} มีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.3 ข แต่เมื่อพิจารณากรณีที่ $n > 1$ จะได้ผลในทางตรงกันข้าม ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.3 ค. ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากอัตราส่วน E_c / E_t และ ค่า n ซึ่งมีผลทำให้ค่า I^* มีขนาดลดลงทำให้ในกรณีที่มีการเพิ่มอัตราส่วนและค่าคงที่ n จึงมีผลต่อขนาดของน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ด้วย โดยค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ในแต่ละกรณีได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 4.4 - 4.12





รูปที่ 4.3 ผลกระทบของเส้นโค้งการเบี่ยงเบนของแรง (Load-Deflection Curve) ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่ค่ามีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน \bar{h} / \bar{b}

(ก) เมื่ออัตราส่วน $\bar{h} = \bar{b}$ ที่ค่า

(ข) $n = 0.50, 0.85$ และ 1.0 ที่ $\bar{h} / \bar{b} = 1.0, 1.5$ และ 2

(ค) $n = 1.0, 2.0$ และ 3.0 ที่ $\bar{h} / \bar{b} = 1.0, 1.5$ และ 2

ตารางที่ 4.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$

γ	\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.001010	0.575047	0.617701	0.649870	-0.075086	-0.042463	0.055587	0.249482	-0.015898	$E_c = 1$
	1.011010	2.260853	2.428552	2.555026	-0.247380	-0.141465	0.182784	0.244374	-0.052141	$E_c = 2$
	1.039010	4.305787	4.625168	4.866038	-0.462772	-0.272573	0.340290	0.230278	-0.096279	
	1.180010	6.566011	7.053043	7.420353	-0.959173	-0.637353	0.696872	0.164950	-0.186313	
	1.326010	5.862412	6.297255	6.625205	-1.234824	-0.897794	0.902789	0.109163	-0.223491	
	1.647010	3.208137	3.446100	3.625567	-1.541683	-1.274332	1.208005	0.030571	-0.247317	
	1.799010	2.071695	2.225362	2.341255	-1.598743	-1.378040	1.328278	0.012350	-0.249148	
	1.909010	1.303008	1.399658	1.472550	-1.611192	-1.425915	1.414231	0.006149	-0.249540	
2.084010	0.080709	0.086695	0.091210	-1.575820	-1.451409	1.560785	0.009650	-0.249640		
1										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.000010	0.055554	0.059675	0.062782	-0.007473	-0.004221	0.005533	0.249995	-0.001583	$E_c = 1$
	1.006010	2.343714	2.517558	2.648668	-0.182968	-0.104054	0.135320	0.246923	-0.038653	$E_c = 1$
	1.017010	4.154123	4.462253	4.694640	-0.307084	-0.176756	0.226648	0.241327	-0.064546	
	1.055010	7.242326	7.779523	8.184666	-0.547521	-0.327665	0.401656	0.222370	-0.113052	
	1.573010	5.526982	5.936945	6.246130	-1.496014	-1.207541	1.146327	0.043630	-0.245216	
	1.799010	3.011440	3.234813	3.403276	-1.598743	-1.378040	1.328278	0.012350	-0.249148	
2.085010	0.114484	0.114484	0.120447	-1.575375	-1.451343	1.561701	0.009728	-0.249638		
2										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.000100	0.296068	0.318028	0.334591	-0.023631	-0.013350	0.017497	0.249949	-0.005006	$E_c = 2$
	1.009100	4.070233	4.372141	4.599834	-0.224994	-0.128393	0.166303	0.245347	-0.047464	$E_c = 1$
	1.030100	7.630588	8.196584	8.623448	-0.407318	-0.237723	0.299944	0.234729	-0.085096	
	1.182100	13.131762	14.105806	14.840411	-0.964162	-0.641630	0.700471	0.164062	-0.187088	
	1.372100	10.992536	11.807904	12.422838	-1.299048	-0.966708	0.954947	0.094228	-0.230225	
	2.086100	0.130511	0.140192	0.147493	-1.574885	-1.451269	1.562700	0.009814	-0.249636	

ตารางที่ 4.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$

γ	\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.002010	0.614503	0.660083	0.694459	-0.088685	-0.000231	0.088578	0.498994	-0.028797	$E_c = 1$
	1.017010	2.021523	2.171469	2.284555	-0.257764	-0.005597	0.255218	0.491453	-0.083971	$E_c = 2$
	1.066010	3.648995	3.919659	4.123787	-0.506101	-0.040717	0.488146	0.466393	-0.166270	
	1.152010	4.230769	4.544585	4.781259	-0.762204	-0.131118	0.707731	0.421225	-0.252426	
	1.361010	3.277715	3.520838	3.704197	-1.141128	-0.399942	1.001872	0.310873	-0.375752	
	1.949010	0.485228	0.521219	0.548364	-1.563968	-1.045449	1.462375	0.092929	-0.485152	
2.049010	0.151269	0.162489	0.170951	-1.573030	-1.113509	1.535487	0.078583	-0.488992		
1										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.001010	0.835895	0.897897	0.944658	-0.075086	-0.042463	0.055587	0.249482	-0.015898	$E_c = 1$
	1.009010	2.941979	3.160199	3.324777	-0.223883	-0.127746	0.165485	0.245392	-0.047231	$E_c = 1$
	1.022010	4.748262	5.100463	5.366086	-0.348931	-0.201921	0.257304	0.238798	-0.073173	
	1.056010	7.293941	7.834967	8.242997	-0.552347	-0.330874	0.405139	0.221880	-0.113994	
	1.479010	6.673450	7.168451	7.541771	-1.418610	-1.106232	1.062400	0.064446	-0.240419	
	1.900010	1.984060	2.131227	2.242217	-1.611089	-1.422861	1.407129	0.006433	-0.249520	
2.085010	0.114484	0.114484	0.120447	-1.575375	-1.451343	1.561701	0.009728	-0.249638		
2										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.001100	0.865550	0.929752	0.978172	-0.065610	-0.000094	0.065567	0.499450	-0.021300	$E_c = 2$
	1.009100	2.896314	3.111147	3.273170	-0.188623	-0.002208	0.187614	0.495438	-0.061345	$E_c = 1$
	1.023100	4.714909	5.064636	5.328393	-0.300271	-0.008802	0.296283	0.488372	-0.097938	
	1.056100	6.910222	7.422786	7.809351	-0.466905	-0.032216	0.452608	0.471509	-0.153170	
	1.152100	8.461546	9.089179	9.562527	-0.762423	-0.131224	0.707909	0.421177	-0.252500	
	1.786100	2.162752	2.323174	2.444160	-1.512085	-0.904455	1.347939	0.132440	-0.473550	
2.094100	0.005085	0.005462	0.005747	-1.570873	-1.139116	1.570192	0.074927	-0.490127		

ตารางที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 0.85$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$

γ	\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.001010	0.573285	0.615808	0.647879	-0.055608	0.042279	0.075022	0.749508	-0.015936	$E_c = 1$
	1.008010	1.850637	1.987907	2.091434	-0.156566	0.116258	0.209741	0.746118	-0.045396	$E_c = 2$
	1.024010	3.186135	3.422465	3.600701	-0.270940	0.190578	0.357304	0.738457	-0.080558	
	1.111010	4.762029	5.115251	5.381644	-0.581321	0.301533	0.710585	0.697732	-0.192391	
	1.262010	3.826805	4.110658	4.324733	-0.888807	0.244292	0.981841	0.624994	-0.329982	
	1.542010	1.840818	1.977360	2.080338	-1.250252	0.049719	1.236487	0.477275	-0.514032	
	1.908010	0.434455	0.466681	0.490985	-1.511870	0.482464	1.459150	0.293977	-0.651027	
2.062010	0.069210	0.074344	0.078216	-1.564047	0.643438	1.550459	0.235572	-0.681935		
1										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.001010	0.833334	0.895146	0.941764	-0.055608	0.042279	0.075022	0.749508	-0.015936	$E_c = 1$
	1.007010	2.503483	2.689178	2.829226	-0.146472	0.109130	0.196415	0.746600	-0.042399	$E_c = 1$
	1.012010	3.326218	3.572939	3.759012	-0.191690	0.140429	0.255774	0.744192	-0.055942	
	1.020010	4.266938	4.583437	4.822134	-0.247372	0.176378	0.327488	0.740362	-0.073104	
	1.042010	5.762017	6.189413	6.511746	-0.358213	0.236964	0.464448	0.729948	-0.109301	
	1.778010	1.195801	1.284499	1.351393	-1.441797	0.333472	1.383805	0.353929	-0.613916	
	2.068010	0.081987	0.088068	0.092655	-1.565398	0.649288	1.554141	0.233634	-0.682895	
2										$n =$
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.85
	1.000100	0.295977	0.317931	0.334489	-0.017498	0.013345	0.023629	0.749951	-0.005007	$E_c = 2$
	1.006100	3.192985	3.429823	3.608442	-0.136638	0.102117	0.183396	0.747040	-0.039493	$E_c = 1$
	1.018100	5.601969	6.017493	6.330873	-0.235282	0.168847	0.312064	0.741274	-0.069326	
	1.033100	7.274394	7.813970	8.220907	-0.318040	0.216895	0.415802	0.734148	-0.095835	
	1.111100	9.524069	10.230514	10.763301	-0.581555	0.301556	0.710821	0.697690	-0.192486	
	1.268100	7.552009	8.112177	8.534644	-0.898835	0.239499	0.989550	0.621943	-0.334850	
	2.084100	0.044884	0.048213	0.050724	-1.568762	0.664802	1.564083	0.228576	-0.685390	

ตารางที่ 4.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$

γ	\bar{S}_t	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark	
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$							
0.50	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$	
	1.004010	1.850402	1.850402	1.850402	-0.149317	-0.085711	0.106548	0.247907	-0.031935	$E_c = 1$	
	1.020010	3.921187	3.921187	3.921187	-0.332548	-0.194276	0.236392	0.23961	-0.070577	$E_t = 2$	
	1.037010	5.045685	5.045685	5.045685	-0.450765	-0.268083	0.319236	0.230899	-0.094871		
	1.073010	6.317034	6.317034	6.317034	-0.628423	-0.387155	0.442048	0.212846	-0.129898		
	1.128010	7.054011	7.054011	7.054011	-0.821846	-0.531229	0.573725	0.186441	-0.16514		
	1.168010	7.164805	7.164805	7.164805	-0.932349	-0.621714	0.648553	0.168234	-0.183472		
	1.434010	5.446962	5.446962	5.446962	-1.383111	-1.07182	0.97459	0.071551	-0.238418		
	1.824010	2.43268	2.43268	2.43268	-1.625195	-1.422575	1.284493	0.003287	-0.249522		
	2.188010	0.003186	0.003186	0.003186	-1.571055	-1.481211	1.570393	0.007419	-0.2498		
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$	
	1.008010	3.760543	3.760543	3.760543	-0.210878	-0.121591	0.150328	0.245824	-0.045015	$E_c = 1$	
	1.044010	7.838226	7.838226	7.838226	-0.490859	-0.294014	0.347133	0.227345	-0.102952	$E_t = 1$	
	1.104010	9.972796	9.972796	9.972796	-0.744948	-0.471914	0.521566	0.197777	-0.151561		
	1.198010	10.373436	10.373436	10.373436	-1.004344	-0.684293	0.697488	0.155173	-0.194559		
	1.333010	9.166702	9.166702	9.166702	-1.252573	-0.925541	0.872236	0.103124	-0.226434		
	1.975010	2.090582	2.090582	2.090582	-1.636133	-1.479236	1.395543	-0.003252	-0.249705		
	2.188010	0.004642	0.004642	0.004642	-1.571055	-1.481211	1.570393	0.007419	-0.249800		
	2	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
		1.008010	3.760543	3.760543	3.760543	-0.210878	-0.121591	0.150328	0.245824	-0.045015	$E_c = 2$
1.044010		7.838226	7.838226	7.838226	-0.490859	-0.294014	0.347133	0.227345	-0.102952	$E_t = 1$	
1.104010		9.972796	9.972796	9.972796	-0.744948	-0.471914	0.521566	0.197777	-0.151561		
1.198010		10.37344	10.37344	10.37344	-1.004344	-0.684293	0.697488	0.155173	-0.194559		
1.333010		9.166702	9.166702	9.166702	-1.252573	-0.925541	0.872236	0.103124	-0.226434		
1.738010		4.420608	4.420608	4.420608	-1.600058	-1.37145	1.221494	0.011714	-0.249144		
1.975010		2.090582	2.090582	2.090582	-1.636133	-1.479236	1.395543	-0.003252	-0.249705		
2.188010		0.004642	0.004642	0.004642	-1.571055	-1.481211	1.570393	0.007419	-0.2498		

ตารางที่ 4.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$

γ	\bar{S}_t	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	$n = 1$
	1.000010	0.067240	-0.006124	0.000000	0.006124	0.499995	-0.002041	1.000010	0.067240	$E_c = 1$
	1.010010	2.042254	-0.193697	-0.002559	0.192424	0.494978	-0.064692	1.010010	2.042254	$E_c = 2$
	1.041010	3.652604	-0.391679	-0.020573	0.381622	0.479226	-0.131493	1.041010	3.652604	
	1.073010	4.306828	-0.521925	-0.047376	0.499188	0.462673	-0.175928	1.073010	4.306828	
	1.136010	4.656000	-0.709839	-0.113621	0.657367	0.429389	-0.240372	1.136010	4.656000	
	1.280010	4.073394	-1.004990	-0.296349	0.881131	0.351786	-0.339401	1.280010	4.073394	
	1.595010	2.198558	-1.384696	-0.711160	1.164304	0.196053	-0.448964	1.595010	2.198558	
	1.831010	1.178268	-1.530103	-0.968487	1.323605	0.111686	-0.480166	1.831010	1.178268	
2.188010	0.001390	-1.570890	-1.213273	1.570456	0.059158	-0.493625	2.188010	0.001390		
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
	1.008010	2.683681	2.683681	2.683681	-0.173279	-0.001836	0.172365	0.495984	-0.057851	$E_c = 1$
	1.034010	4.982302	4.982302	4.982302	-0.356775	-0.015645	0.349097	0.482808	-0.119649	$E_t = 1$
	1.081010	6.412986	6.412986	6.412986	-0.549569	-0.054952	0.523320	0.458493	-0.185398	
	1.123010	6.763078	6.763078	6.763078	-0.675633	-0.098887	0.629589	0.436319	-0.228648	
	1.273010	5.997705	5.997705	5.997705	-0.993168	-0.286980	0.872591	0.355551	-0.335567	
	1.444010	4.426462	4.426462	4.426462	-1.234732	-0.517566	1.046375	0.266290	-0.409599	
	1.677010	2.634229	2.634229	2.634229	-1.446516	-0.807849	1.221638	0.162842	-0.463129	
2	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
	1.000100	0.425105	0.425105	0.425105	-0.019365	-0.000003	0.019364	0.499950	-0.006455	$E_c = 2$
	1.002100	1.932158	1.932158	1.932158	-0.088737	-0.000248	0.088613	0.498949	-0.029591	$E_c = 1$
	1.014100	4.768015	4.768015	4.768015	-0.229862	-0.004261	0.227748	0.492917	-0.076829	
	1.040100	7.249566	7.249566	7.249566	-0.387321	-0.019910	0.377584	0.479692	-0.130012	
	1.139100	9.312999	9.312999	9.312999	-0.717708	-0.117188	0.663694	0.427738	-0.243066	
	1.588100	4.467029	4.467029	4.467029	-1.378894	-0.702703	1.159311	0.199024	-0.447567	
	2.013100	1.109244	1.109244	1.109244	-1.578279	-1.117646	1.443643	0.072256	-0.489983	
2.188100	0.002198	0.002198	0.002198	-1.570871	-1.213309	1.570527	0.059158	-0.493625		

ตารางที่ 4.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 1$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$

γ	\bar{S}_t	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
	1.000010	0.093637	0.093637	0.093637	-0.005330	0.004264	0.007462	0.749995	-0.001599	$E_c = 1$
	1.006010	2.210360	2.210360	2.210360	-0.130668	0.102412	0.181719	0.747141	-0.039583	$E_c = 2$
	1.040010	4.653492	4.653492	4.653492	-0.337194	0.235174	0.452347	0.731234	-0.107324	
	1.100010	5.326469	5.326469	5.326469	-0.533355	0.300955	0.675746	0.703586	-0.181989	
	1.157010	5.063842	5.063842	5.063842	-0.668506	0.304323	0.807414	0.677037	-0.240089	
	1.230010	4.436104	4.436104	4.436104	-0.809021	0.270383	0.926315	0.641923	-0.305697	
	1.299010	3.808849	3.808849	3.808849	-0.921475	0.216133	1.010341	0.607322	-0.361272	
	1.502010	2.292324	2.292324	2.292324	-1.181783	0.002397	1.180972	0.498897	-0.495843	
	2.188010	0.000834	0.000834	0.000834	-1.570763	0.779929	1.570529	0.191283	-0.703569	
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
	1.005010	2.959064	2.959064	2.959064	-0.119303	0.093824	0.166096	0.747615	-0.036083	$E_c = 1$
	1.022010	5.588703	5.588703	5.588703	-0.250071	0.185557	0.341806	0.739608	-0.077622	$E_t = 1$
	1.055010	7.305949	7.305949	7.305949	-0.395423	0.261795	0.522557	0.724305	-0.128304	
	1.108010	7.747011	7.747011	7.747011	-0.554310	0.303789	0.697348	0.699891	-0.190648	
	1.193010	6.950531	6.950531	6.950531	-0.741222	0.291496	0.871071	0.659903	-0.273440	
	1.564010	2.825799	2.825799	2.825799	-1.245503	0.077431	1.221188	0.464811	-0.529121	
	1.877010	1.038350	1.038350	1.038350	-1.477098	0.458685	1.395654	0.302826	-0.648033	
	2.188010	0.001215	0.001215	0.001215	-1.570763	0.779929	1.570529	0.191283	-0.703569	
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 1$
2	1.000010	0.136440	0.136440	0.136440	-0.005330	0.004264	0.007462	0.749995	-0.001599	$E_c = 2$
	1.005010	2.959064	2.959064	2.959064	-0.119303	0.093824	0.166096	0.747615	-0.036083	$E_c = 1$
	1.012010	4.386655	4.386655	4.386655	-0.184718	0.141837	0.255204	0.744304	-0.056484	
	1.098010	7.761752	7.761752	7.761752	-0.527987	0.300094	0.670141	0.704508	-0.179793	
	1.202010	6.834603	6.834603	6.834603	-0.758292	0.287008	0.885338	0.655566	-0.281461	
	1.399010	4.356334	4.356334	4.356334	-1.060692	0.115847	1.104293	0.554886	-0.432640	
	1.748010	1.642160	1.642160	1.642160	-1.398929	0.304414	1.326746	0.366013	-0.608259	
2.188010	0.001215	0.001215	0.001215	-1.570763	0.779929	1.570529	0.191283	-0.703569		

ตารางที่ 4.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$

γ	\bar{S}_t	$\bar{h} = \bar{b}$	\bar{P} $\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
0.50	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
	1.000010	1.163420	1.163420	1.163420	0.949928	0.822662	-0.007454	-0.004472	0.004472	$E_c = 1$
	1.005010	5.438958	5.438958	5.438958	4.440890	3.845924	-0.166811	-0.100659	0.099804	$E_c = 2$
	1.012010	6.656303	6.656303	6.656303	5.434849	4.706717	-0.258218	-0.157044	0.153895	
	1.024010	7.694906	7.694906	7.694906	6.282864	5.441120	-0.364946	-0.224882	0.216094	
	1.117010	9.288195	9.288195	9.288195	7.583780	6.567746	-0.800962	-0.539350	0.454012	
	1.288010	8.284370	8.284370	8.284370	6.764160	5.857934	-1.228540	-0.931824	0.661601	
	1.718010	5.187394	5.187394	5.187394	4.235489	3.668041	-1.728759	-1.536455	0.936680	
	2.442010	1.801917	1.801917	1.801917	1.471259	1.274148	-1.788414	-1.740584	1.302405	
	2.816010	0.001529	0.001529	0.001529	0.001249	0.001081	-1.571026	-1.560986	1.570557	
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
	1.000010	1.711934	1.711934	1.711934	1.397788	1.210520	-0.007454	-0.004472	0.004472	$E_c = 1$
	1.014010	10.131111	10.131111	10.131111	8.272017	7.163777	-0.278872	-0.169982	0.166022	$E_c = 1$
	1.056010	13.000821	13.000821	13.000821	10.615126	9.192969	-0.556568	-0.354451	0.324215	
	1.115010	13.666867	13.666867	13.666867	11.158951	9.663935	-0.794225	-0.533906	0.450561	
	1.404010	10.805079	10.805079	10.805079	8.822310	7.640345	-1.421096	-1.142316	0.753546	
	2.693010	1.000341	1.000341	1.000341	0.816775	0.707348	-1.667520	-1.646899	1.465394	
	2.816010	0.002250	0.002250	0.002250	0.001837	0.001591	-1.571026	-1.560986	1.570557	
2	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
	1.000100	2.326840	1.899857	2.925216	-0.023570	-0.014144	0.014141	0.249943	-0.005303	$E_c = 2$
	1.003100	9.622697	7.856899	6.853106	-0.131223	-0.079013	0.078596	0.248229	-0.029471	$E_c = 1$
	1.010100	12.780282	10.435056	9.055339	-0.236811	-0.143719	0.141285	0.244237	-0.052961	
	1.084100	18.576391	14.998805	12.990246	-0.680804	-0.445324	0.391387	0.202741	-0.145319	
	1.214100	17.220962	14.460619	12.522367	-1.071625	-0.776497	0.587433	0.135071	-0.209329	
	1.439100	13.638031	11.544572	9.996912	-1.469201	-1.198641	0.777560	0.041998	-0.245700	
	2.445100	3.299316	2.921874	2.529880	-1.787377	-1.739935	1.304179	-0.050819	-0.244757	
2.816100	0.001923	0.002497	0.001360	-1.570941	-1.560908	1.570646	0.000591	-0.249998		

ตารางที่ 4.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.50$

γ	\bar{S}_t	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
		$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$						
0.50	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	$n = 2$
	1.00201	0.61450	0.66008	0.69446	-0.08868	-0.00023	0.08858	0.49899	-0.02880	$E_c = 1$
	1.01701	2.02152	2.17147	2.28455	-0.25776	-0.00560	0.25522	0.49145	-0.08397	$E_c = 2$
	1.06601	3.64900	3.91966	4.12379	-0.50610	-0.04072	0.48815	0.46639	-0.16627	
	1.15201	4.23077	4.54459	4.78126	-0.76220	-0.13112	0.70773	0.42122	-0.25243	
	1.36101	3.27771	3.52084	3.70420	-1.14113	-0.39994	1.00187	0.31087	-0.37575	
	1.58101	2.00756	2.15647	2.26877	-1.38070	-0.68076	1.19800	0.20692	-0.44308	
	1.80001	1.02660	1.10275	1.16018	-1.51827	-0.91785	1.35770	0.12835	-0.47488	
	1.94901	0.48523	0.52122	0.54836	-1.56397	-1.04545	1.46237	0.09293	-0.48515	
	2.04901	0.15127	0.16249	0.17095	-1.57303	-1.11351	1.53549	0.07858	-0.48899	
1	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	$n = 2$
	1.00101	0.83589	0.83589	0.83589	0.89790	0.94466	-0.07509	-0.04246	0.05559	$E_c = 1$
	1.00901	2.94198	2.94198	2.94198	3.16020	3.32478	-0.22388	-0.12775	0.16548	$E_t = 1$
	1.02201	4.74826	4.74826	4.74826	5.10046	5.36609	-0.34893	-0.20192	0.25730	
	1.05601	7.29394	7.29394	7.29394	7.83497	8.24300	-0.55235	-0.33087	0.40514	
	1.18001	9.54443	9.54443	9.54443	10.25239	10.78631	-0.95917	-0.63735	0.69687	
	1.32001	8.58739	8.58739	8.58739	9.22435	9.70474	-1.22581	-0.88840	0.89566	
	1.90001	1.98406	1.98406	1.98406	2.13123	2.24222	-1.61109	-1.42286	1.40713	
2.08501	0.11448	0.11448	0.11448	0.11448	0.12045	-1.57537	-1.45134	1.56170		
2	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	$n = 2$
	1.00110	0.86555	0.92975	0.97817	-0.06561	-0.00009	0.06557	0.49945	-0.02130	$E_c = 2$
	1.00910	2.89631	3.11115	3.27317	-0.18862	-0.00221	0.18761	0.49544	-0.06134	$E_c = 1$
	1.02310	4.71491	5.06464	5.32839	-0.30027	-0.00880	0.29628	0.48837	-0.09794	
	1.05610	6.91022	7.42279	7.80935	-0.46691	-0.03222	0.45261	0.47151	-0.15317	
	1.15210	8.46155	9.08918	9.56253	-0.76242	-0.13122	0.70791	0.42118	-0.25250	
	1.52010	4.66484	5.01086	5.27181	-1.32589	-0.60616	1.14915	0.23362	-0.42888	
	1.78610	2.16275	2.32317	2.44416	-1.51209	-0.90445	1.34794	0.13244	-0.47355	
	2.09410	0.00508	0.00546	0.00575	-1.57087	-1.13912	1.57019	0.07493	-0.49013	

ตารางที่ 4.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* สำหรับ $n = 2$ และอัตราส่วน $\gamma = 0.50, 1.00$ และ 2.00 ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.75$

γ	\bar{S}_t	$\bar{h} = \bar{b}$	\bar{P} $\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*	Remark
0.50	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
	1.001010	0.573285	0.615808	0.647879	-0.055608	0.042279	0.075022	0.749508	-0.015936	$E_c = 1$
	1.008010	1.850637	1.987907	2.091434	-0.156566	0.116258	0.209741	0.746118	-0.045396	$E_c = 2$
	1.024010	3.186135	3.422465	3.600701	-0.270940	0.190578	0.357304	0.738457	-0.080558	
	1.111010	4.762029	5.115251	5.381644	-0.581321	0.301533	0.710585	0.697732	-0.192391	
	1.262010	3.826805	4.110658	4.324733	-0.888807	0.244292	0.981841	0.624994	-0.329982	
	1.381010	2.874769	3.088004	3.248822	-1.064544	0.133341	1.109737	0.563746	-0.417745	
	1.542010	1.840818	1.977360	2.080338	-1.250252	0.049719	1.236487	0.477275	-0.514032	
	1.908010	0.434455	0.466681	0.490985	-1.511870	0.482464	1.459150	0.293977	-0.651027	
	2.062010	0.069210	0.074344	0.078216	-1.564047	0.643438	1.550459	0.235572	-0.681935	
1	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
	1.001010	0.833334	0.833334	0.833334	0.895146	0.941764	-0.055608	0.042279	0.075022	$E_c = 1$
	1.007010	2.503483	2.503483	2.503483	2.689178	2.829226	-0.146472	0.109130	0.196415	$E_c = 1$
	1.012010	3.326218	3.326218	3.326218	3.572939	3.759012	-0.191690	0.140429	0.255774	
	1.020010	4.266938	4.266938	4.266938	4.583437	4.822134	-0.247372	0.176378	0.327488	
	1.042010	5.762017	5.762017	5.762017	6.189413	6.511746	-0.358213	0.236964	0.464448	
	1.111010	6.922141	6.922141	6.922141	7.435589	7.822821	-0.581321	0.301533	0.710585	
	1.778010	1.195801	1.195801	1.195801	1.284499	1.351393	-1.441797	0.333472	1.383805	
	2.068010	0.081987	0.081987	0.081987	0.088068	0.092655	-1.565398	0.649288	1.554141	
	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$n = 2$
2	1.000100	0.295977	0.317931	0.334489	-0.017498	0.013345	0.023629	0.749951	-0.005007	$E_c = 2$
	1.006100	3.192985	3.429823	3.608442	-0.136638	0.102117	0.183396	0.747040	-0.039493	$E_c = 1$
	1.018100	5.601969	6.017493	6.330873	-0.235282	0.168847	0.312064	0.741274	-0.069326	
	1.111100	9.524069	10.230514	10.763301	-0.581555	0.301556	0.710821	0.697690	-0.192486	
	1.268100	7.552009	8.112177	8.534644	-0.898835	0.239499	0.989550	0.621943	-0.334850	
	1.385100	5.689057	6.111042	6.429294	-1.069925	0.129028	1.113462	0.561586	-0.420500	
	2.084100	0.044884	0.048213	0.050724	-1.568762	0.664802	1.564083	0.228576	-0.685390	

4.4 ค่าแรงวิกฤตของคาน

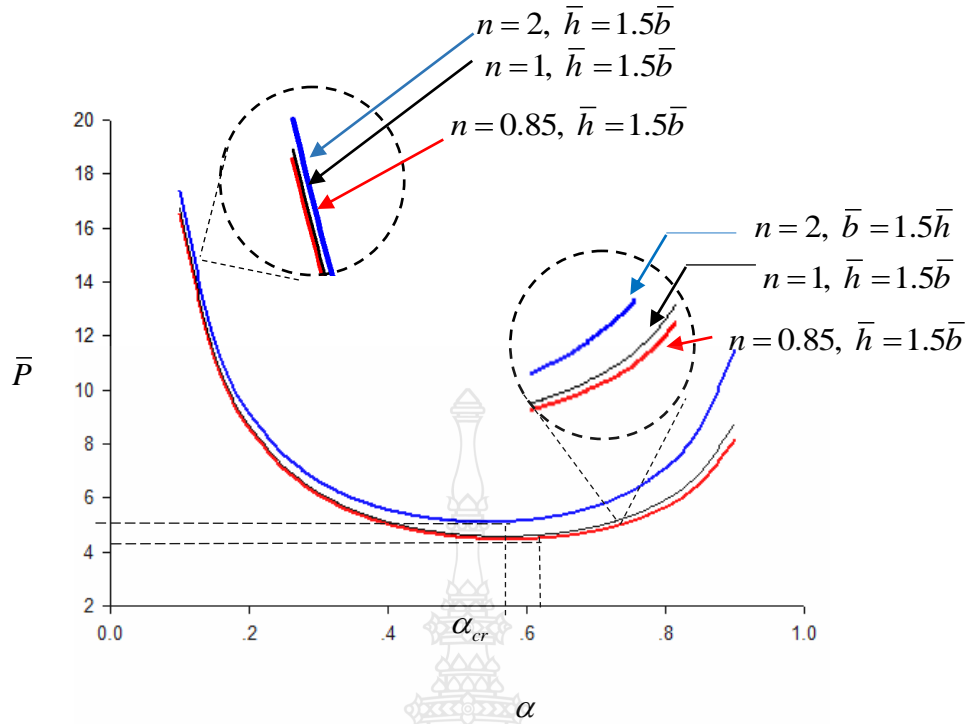
งานวิจัยนี้ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตของคานที่มีคุณสมบัติของวัสดุแบบลวดวิก ชนิด ไบโมดูลัส ภายใต้ภาระกระทำแบบติดตาม ณ ตำแหน่ง α ตั้งแต่ 0.10 – 0.90 ได้ผลการทดสอบโดยพิจารณาเป็นหัวข้อได้ดังนี้

4.4.1 กรณีมีการแปรผันของค่า γ จะพบว่า เมื่อขนาดของ γ มีขนาดเพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้ค่า \bar{P}_{CR} มีค่ามากขึ้น

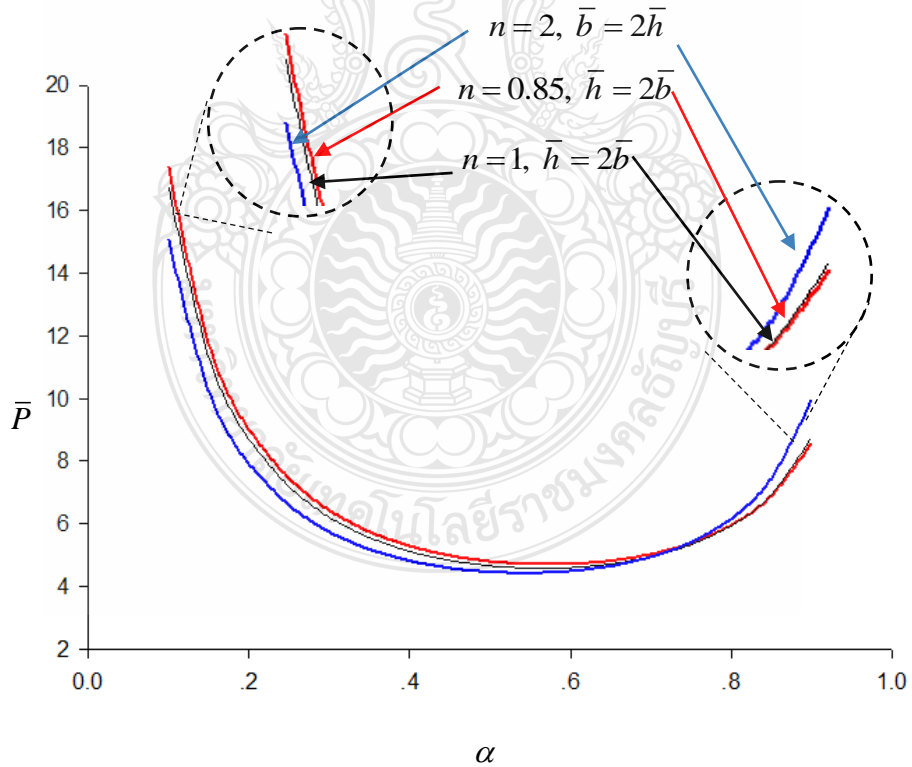
4.4.2 จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าลักษณะของปัญหาที่พิจารณานี้พบ จุดวิกฤตซึ่งภายหลังจากจุดวิกฤตอิลาสติกคาจะอยู่สถานะสมดุลแบบไร้ เสถียรภาพซึ่งงานวิจัยนี้ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตของอิลาสติกคาที่มีคุณสมบัติแบบลวดวิก ดังแสดงในตารางที่ 4.13 – 4.15 เมื่อกำหนดให้ค่า α อยู่ระหว่าง 0.10 – 0.90 ที่ค่า $n = 0.85, 1, 2, 3$ และ 4 เมื่อ อัตราส่วนระหว่าง $E_c / E_t = 0.50$ และ อัตราส่วนของหน้าตัด $\bar{b} = \bar{h}$ เพื่อ แสดงผลกระทบของค่าแรงวิกฤตที่เกิดขึ้นตามเงื่อนไขดังกล่าว พบว่า กรณีที่กำหนดให้ค่าคงที่ $n < 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} จะมีค่าสูงสุดที่ $\alpha = 0.10$ และมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึง จุดต่ำสุดและหลังจากนั้นค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีค่าเพิ่มขึ้นอีก เล็กน้อย ในกรณีที่กำหนดค่าคงที่ $n = 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมี ลักษณะคล้ายกับกรณี $n < 1$ แต่มีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อย จากงานวิจัยของ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] ได้แสดงค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต กรณีอัตราส่วน ระหว่าง $E_c / E_t = 1$ (กรณี เชิงเส้น) ไว้ที่ $\bar{P}_{CR} = 6.671809$ ที่ $\alpha = 0.5651$ ในงานวิจัยนี้ได้ค่า $\bar{P}_{CR} = 4.59006$ ที่ $\alpha = 0.585683$ อันเนื่องจากผล ของอัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t ที่เพิ่มขึ้นซึ่งมีผลทำให้ค่าแรงวิกฤตที่คำนวณได้มีค่าลดลงโดยตำแหน่งของ α จะมีค่ามากขึ้นเมื่อเทียบกับงานวิจัยที่อ้างอิงและในกรณีที่กำหนดค่าคงที่ $n > 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุก จะมีค่าสูงสุดที่ $\alpha = 0.10$ คือ 21.2912, 22.81 และ 23.4138 สำหรับ ค่าคงที่ $n = 2, 3$ และ 4 ตามลำดับและมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึงจุดต่ำสุดและหลังจากนั้นค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีค่า เพิ่มขึ้น ซึ่งกรณีนี้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.90$ จะมีขนาด 14.5911, 16.7927 และ 18.3763 ตามลำดับ

4.4.3 กรณีพิจารณาผลของหน้าตัด จะพบว่า เมื่อเพิ่มความสูงของอิลาสติกคาจะมีผลทำให้ค่า \bar{P}_{CR} มีเพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยเฉพาะหากค่า $\bar{h} = 1.5\bar{b}$ จะมีผลทำให้ค่า \bar{P}_{CR} ของทุกค่า n ที่จุดรองรับทางด้านซ้ายมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.5 แต่สำหรับในกรณีที่เพิ่มความสูง $\bar{h} = 2\bar{b}$ จะพบว่า ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.10$ ค่า \bar{P}_{CR} ที่เกิดจากค่าคงที่ $n < 1$ จะให้ค่า \bar{P}_{CR} ที่สูงกว่า \bar{P}_{CR} ที่เกิดจากค่าคงที่ $n \geq 1$ แต่เมื่อผ่านตำแหน่งวิกฤตมาแล้วค่า \bar{P}_{CR} ของทุก n จะมีขนาดเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.90$ ค่า \bar{P}_{CR} ของทุกค่า n ก็จะมีขนาดตรงตามความเป็นจริง

โดยข้อมูลทั้งหมดได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 4.16 – 4.19 และรูปที่ 4.5 และ 4.6



รูปที่ 4.4 เส้นแรงวิกฤต กรณีอัตราส่วน $E_c/E_t = 0.50$ และ $\bar{h} = 1.5\bar{b}$



รูปที่ 4.5 เส้นแรงวิกฤต กรณีอัตราส่วน $E_c/E_t = 0.50$ และ $\bar{h} = 2\bar{b}$

ตารางที่ 4.13 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลวดวิกชนิด
ไบโมดูลัส ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 0.50$

α	\bar{P}_{CR}						Remark	
	$n = 0.85$			$n = 1$	$n = 2$			
	$\bar{h} = \bar{b}$	$h = 1.5b$	$h = 2b$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$h = 1.5b$		$h = 2b$
0.1	15.371992	16.512205	17.372130	16.723655	21.291183	17.384179	15.055140	$E_c = 1$
0.15	10.406654	11.178565	11.760724	11.330196	14.495697	11.835687	10.250005	$E_t = 2$
0.2	7.977150	8.568853	9.015103	8.693888	11.191730	9.138009	7.913748	
0.25	6.566011	7.053043	7.420353	7.164805	9.288195	7.583780	6.567746	
0.3	5.668622	6.089091	6.406199	6.194358	8.090692	6.606022	5.720983	
0.35	5.070072	5.446144	5.729769	5.549028	7.304579	5.964164	5.165118	
0.4	4.664531	5.010522	5.271461	5.113949	6.785975	5.540725	4.798409	
0.45	4.395258	4.721275	4.967150	4.827705	6.458956	5.273715	4.567171	
0.50	4.230769	4.544585	4.781259	4.656500	6.283209	5.130219	4.442900	
0.55	4.154597	4.462763	4.695176	4.582947	6.240183	5.095088	4.412476	
0.60	4.160612	4.469224	4.701973	4.601347	6.327727	5.166567	4.474379	
0.65	4.251953	4.567340	4.805199	4.716502	6.559982	5.356203	4.638608	
0.70	4.442418	4.771933	5.020446	4.945910	6.973106	5.693517	4.930730	
0.75	4.762029	5.115251	5.381644	5.326824	7.640376	6.238341	5.402562	
0.80	5.271194	5.662183	5.957060	5.934421	8.711571	7.112968	6.160011	
0.85	6.099781	6.552231	6.893459	6.932582	10.527629	8.595773	7.444158	
0.90	7.580448	8.142725	8.566783	8.752022	14.051122	11.472693	9.935643	

ตารางที่ 4.14 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกลูกศร \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลูตวิกชนิด
ไปโมดูลัส ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 1$

α	\bar{P}_{CR}							Remark
	$n = 0.85$			$n = 1$		$n = 2$		
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	
0.1	15.37199	16.5122	17.37213	16.72366	31.32928	25.58025	22.15315	$E_c = 1$
0.15	10.40665	11.17857	11.76072	11.3302	21.32994	17.41583	15.08255	$E_t = 1$
0.2	7.97715	8.568853	9.015103	8.693888	16.46827	13.44628	11.64482	
0.25	6.566011	7.053043	7.420353	7.164805	13.66728	11.15928	9.664224	
0.3	5.668622	6.089091	6.406199	6.194358	11.90519	9.720546	8.41824	
0.35	5.070072	5.446144	5.729769	5.549028	10.74845	8.776073	7.600302	
0.4	4.664531	5.010522	5.271461	5.113949	9.98534	8.152996	7.060702	
0.45	4.395258	4.721275	4.96715	4.827705	9.504143	7.7601	6.720444	
0.50	4.230769	4.544585	4.781259	4.6565	9.245538	7.54895	6.537582	
0.55	4.154597	4.462763	4.695176	4.582947	9.182226	7.497256	6.492814	
0.60	4.160612	4.469224	4.701973	4.601347	9.311043	7.602435	6.583902	
0.65	4.251953	4.56734	4.805199	4.716502	9.652799	7.881477	6.82556	
0.70	4.442418	4.771933	5.020446	4.94591	10.2607	8.377824	7.255409	
0.75	4.762029	5.115251	5.381644	5.326824	11.24256	9.179515	7.949693	
0.80	5.271194	5.662183	5.95706	5.934421	12.81879	10.4665	9.064255	
0.85	6.099781	6.552231	6.893459	6.932582	15.49106	12.6484	10.95384	
0.90	7.580448	8.142725	8.566783	8.752022	20.67577	16.88169	14.61997	

ตารางที่ 4.15 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลู่ทวิชนิด
ไบโมดูลัส ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 2$

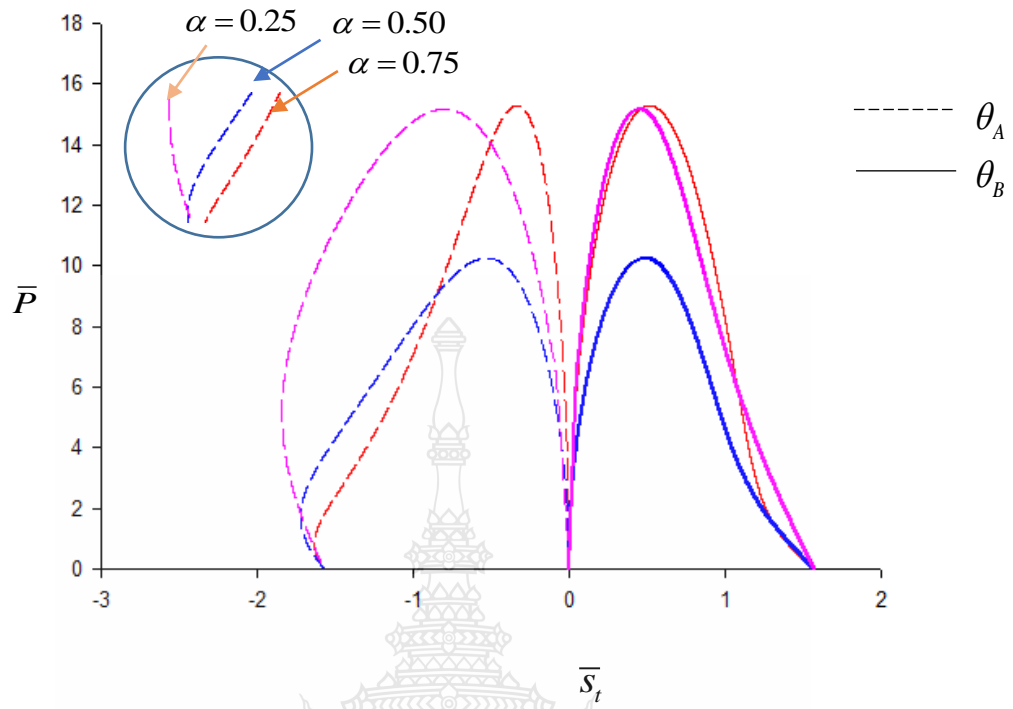
α	\bar{P}_{CR}							Remark
	$n = 0.85$			$n = 1.00$	$n = 2$			
	$h = b$	$h = 1.5b$	$h = 2b$	$\bar{h} = \bar{b}$	$h = b$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$h = 2b$	
0.1	30.743983	33.024410	34.744261	33.447311	42.582367	34.768357	30.110280	$E_c = 2$
0.15	20.813309	22.357130	23.521449	22.660392	28.991393	23.671374	20.500011	$E_t = 1$
0.2	15.954300	17.137706	18.030206	17.387776	22.383460	18.276018	15.827496	
0.25	13.132031	14.106096	14.840716	14.329610	18.576391	15.167560	13.135489	
0.3	11.337244	12.178181	12.812399	12.388717	16.181384	13.212045	11.441966	
0.35	10.140145	10.892287	11.459538	11.098055	14.609158	11.928328	10.330235	
0.4	9.329063	10.021043	10.542921	10.227898	13.571950	11.081450	9.596818	
0.45	8.790516	9.442550	9.934300	9.655409	12.917912	10.547431	9.134343	
0.5	8.461546	9.089179	9.562527	9.312999	12.566431	10.260448	8.885808	
0.55	8.309194	8.925526	9.390352	9.165894	12.480367	10.190177	8.824952	
0.6	8.321224	8.938448	9.403947	9.202693	12.655454	10.333135	8.948757	
0.65	8.503905	9.134680	9.610397	9.433005	13.119964	10.712405	9.277215	
0.7	8.884836	9.543866	10.040893	9.891820	13.946211	11.387034	9.861461	
0.75	9.524069	10.230514	10.763301	10.653649	15.280720	12.476655	10.805100	
0.8	10.542388	11.324367	11.914119	11.868841	17.423141	14.225935	12.320021	
0.85	12.199563	13.104462	13.786919	13.865164	21.055258	17.191546	14.888316	
0.9	15.160895	16.285450	17.133567	17.504044	28.102243	22.945385	19.871287	

4.6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวม \bar{P} กับมุมที่ปลายของคาน (θ_A, θ_B)

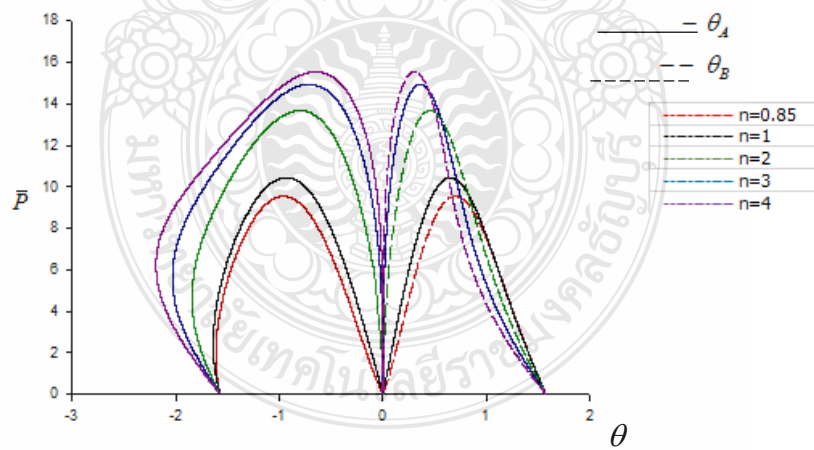
เมื่อนำค่าของ $\bar{P}, \theta_A, \theta_B$ มาสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวม \bar{P} กับมุมที่ปลายของคาน (θ_A, θ_B) จะมีลักษณะเส้นทางเดิน ณ ตำแหน่ง α ดังแสดงในรูปที่ 4.7 โดยแบ่งเป็นกรณีต่อไปนี้

กรณี $n \leq 1$ ที่เริ่มแรกเมื่อเพิ่มน้ำหนักรวม \bar{P} ให้กับอิลาสติกคา ค่าของมุมที่ปลายอิลาสติกคา (θ_A, θ_B) มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกัน จนกระทั่งน้ำหนักรวม \bar{P} มีค่าเท่ากับน้ำหนักรวมวิกฤต \bar{P}_{CR} ที่จุดนี้อิลาสติกคาไม่สามารถรับแรงกระทำต่อไปได้อีก หลังจากนั้นค่าของมุมที่ปลายอิลาสติกคาจะมีค่าที่เพิ่มขึ้น ในขณะที่น้ำหนักรวม \bar{P} ลดลงจนกระทั่งน้ำหนักรวม \bar{P} มีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อค่าของมุมที่ปลายคาน B มีค่าเท่ากับ $\pi/2$ โดยจุดนี้รูปร่างของอิลาสติกคาเป็นอิสระจากแรงที่กระทำ และมีรูปร่างเหมือนกัน ซึ่งรูปร่างของอิลาสติกคา ณ ตำแหน่งนี้มีลักษณะที่สมมาตรกับกึ่งกลางของช่วงความยาวคาน โดยความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา S , ก่อนจะสูญเสียเสถียรภาพจะมีความยาว เท่ากับ 2.09401 สำหรับค่า $n = 0.85$, 2.18801 สำหรับค่า $n = 1$, 2.81601

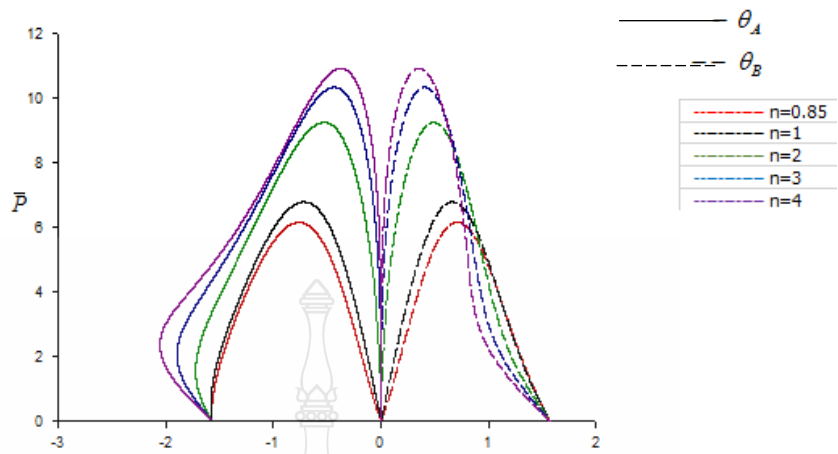
กรณีที่ $n < 1$ เมื่อค่าคงที่ n เพิ่มขึ้นระบบจะมีค่าสตีเฟนส์ที่สูงขึ้นเช่นกัน ค่าของมุมที่ปลายคาน (θ_A, θ_B) เมื่อเพิ่มน้ำหนักรวม \bar{P} มุมที่ปลายคานจะมีลักษณะคล้ายกับกรณีที่ $n \leq 1$ จนกระทั่งเมื่อน้ำหนักรวม \bar{P} เท่ากับน้ำหนักรวมวิกฤต \bar{P}_{CR} หลังจากนั้นค่าของน้ำหนักรวม \bar{P} จะลดลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งเข้าสู่ใกล้ศูนย์ มุมที่ปลายคานจะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยเฉพาะมุมที่ปลายคาน A (θ_A) จะมีค่ามากจนเกินกว่า $\pi/2$ อันเนื่องมาจากเกิดการยึดรั้งที่จุดรองรับ จนกระทั่งน้ำหนักรวม \bar{P} มีค่าเป็นศูนย์ มุมที่ปลายคาน A (θ_A) จะมีค่าเท่ากับ $\pi/2$ ส่วนมุมที่ปลายคาน B (θ_B) จะมีค่าเท่ากับ $\pi/2$ เมื่อน้ำหนักรวม \bar{P} มีค่าเป็นศูนย์ และ ภายหลังจากจุดวิกฤตน้ำหนักรวม มีค่าที่ลดลงในขณะที่อิลาสติกคามีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นซึ่งบ่งบอกได้ว่าคานในสภาวะนี้อยู่ในสภาวะที่ไร้เสถียรภาพ



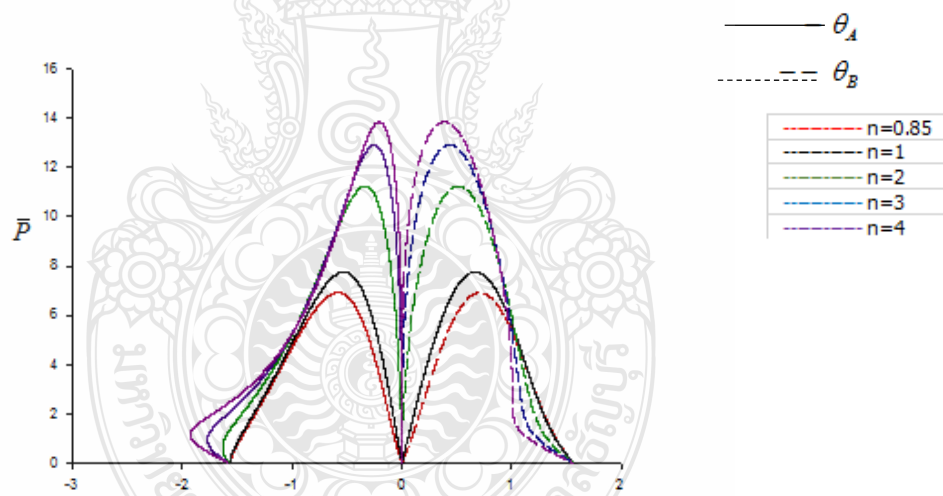
รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุกกับมุมที่ปลายคาน ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25, 0.50$ และ 0.75



(ก)



ข)



ค)

รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุกกับมุมที่ปลายคาน ที่ค่า n ขนาดต่าง ๆ

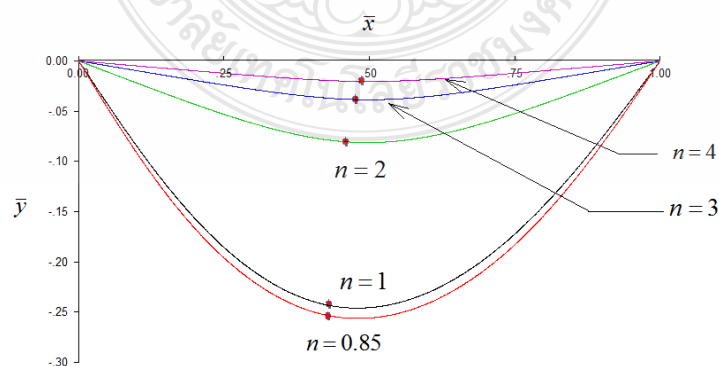
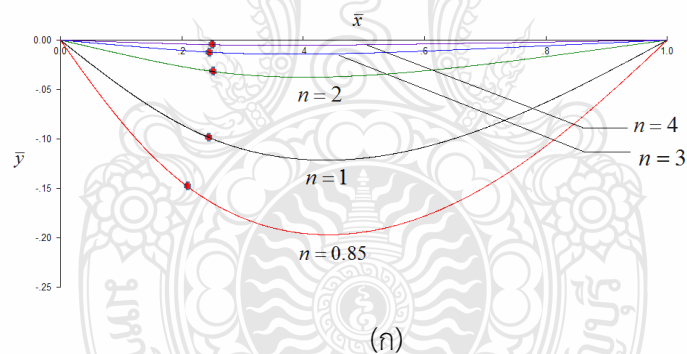
ก) $\alpha = 0.25$

ข) $\alpha = 0.50$

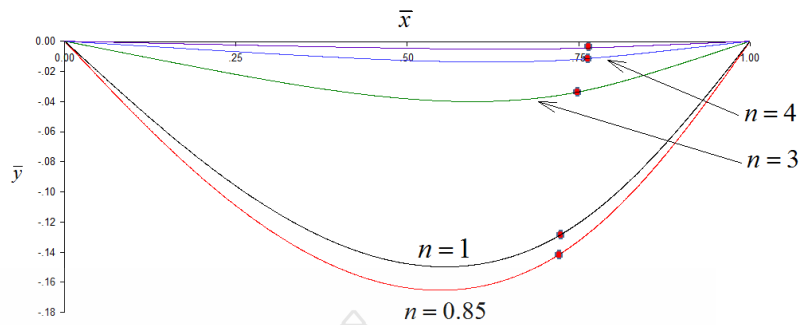
ค) $\alpha = 0.75$

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.9 (ก)-(ค) แสดงถึงรูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่ ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่กรณี $E_c/E_t = 0.50$, 1, 2 และ ที่ค่าแรง $\bar{P} = 2.50$ พบว่ากรณีที่ค่าคงที่ $n \leq 1$ จะมีการแอ่นตัวที่มากกว่าวัสดุที่มี ค่าคงที่ $n > 1$ เนื่องจากผลของค่าสติฟเนสของอิลาสติกคา แต่จะมีผลตรงกัน ข้ามกับค่าอัตราส่วนระหว่าง E_c/E_t นั่นคือ หากอัตราส่วนระหว่าง E_c/E_t ยิ่งมีค่ามากจะส่งผลให้การแอ่นตัวของอิลาสติกคาจะค่ามากขึ้น

พิจารณารูปที่ 4.9 (ก), (ข) และ (ค) แสดงเส้นทางเดินของตำแหน่งที่แรงกระทำที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25, 0.50$ และ 0.75 เส้นทางเดินของแรงมีเส้นทางที่ใกล้เคียงกันเมื่อตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ในขณะที่เส้นทางเดินของแรงเหล่านี้จะแยกออกจากกันอย่างชัดเจนมากขึ้นเมื่อตำแหน่ง $\alpha = 0.50$ และ 0.75 ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าตำแหน่ง α มีผลกระทบต่อเส้นทางเดินของแรงโดยที่ ณ ตำแหน่ง α ที่มีค่ามากจะส่งผลกระทบต่อเส้นทางเดินของแรงโดยที่ ณ ตำแหน่ง α ที่มีค่ามากจะส่งผลกระทบต่อเส้นทางเดินของแรงที่มากเช่นเดียวกัน จากรูปที่ 4.9 (ค) จะพบว่า จะเกิดการหย่อนตัวของคานที่น้อยกว่าในกรณี $\alpha = 0.25, 0.50$ เนื่องจากมีผลกระทบจากจุดรองรับที่เกิดการยึดรั้ง



(ข)



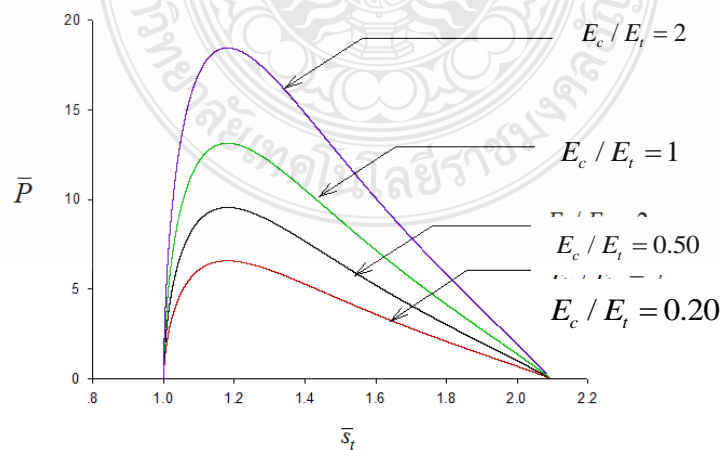
(ค)

รูปที่ 4.8 รูปร่างของคานเมื่อขนาดของแรง $\bar{P} = 2.50$

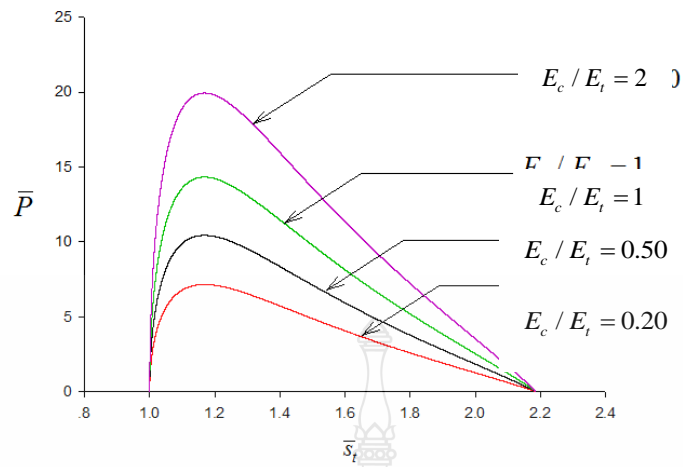
(ก) $\alpha = 0.25$ (ข) $\alpha = 0.50$ (ค) $\alpha = 0.75$

4.7 ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน $\gamma = E_c / E_t$

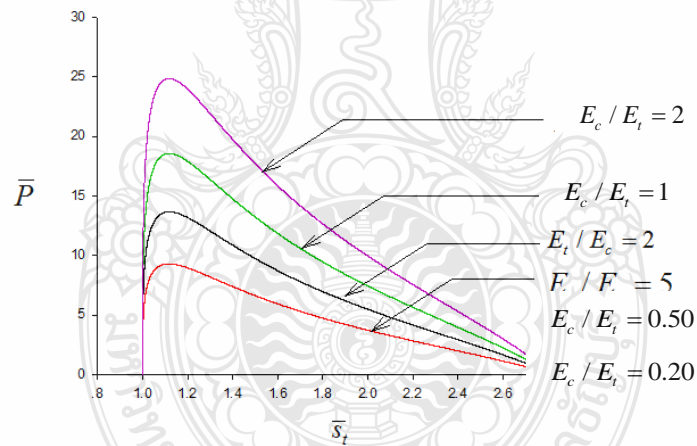
จากรูปความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความยาวส่วนโค้งทั้งหมดดังแสดงในรูปที่ 4.10 (ก.), (ข.), และ (ค.) ได้ทำการเปรียบเทียบค่าของน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 และอัตราส่วนระหว่าง $E_c / E_t = 0.20, 0.50, 1$ และ 2 พบว่าหากอัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t เพิ่มขึ้นจะมีผลทำให้น้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของคานมีค่าลดลง เนื่องจากในสมการของ \bar{T}^* จะมีค่า γ ซึ่งมีค่าอัตราส่วนของ E_c / E_t เป็นส่วนหนึ่งของสมการ หากกำหนดค่าของ $E_t > E_c$ แล้วนั้น จะมีผลทำให้ค่าอัตราส่วนของ γ ลดลง จึงมีผลทำให้ค่า \bar{T}^* มีขนาดที่ลดลง อีกทั้งพารามิเตอร์ \bar{P} ถูกปรับขนาดด้วยค่า E_t ในสมการที่ (3.29ข) ซึ่งจะส่งผลให้น้ำหนักบรรทุกที่คำนวณมีค่าลดลงด้วยเช่นเดียวกัน ในทำนองเดียวกัน หากเพิ่มค่าคงที่ n ให้มีค่าที่มากขึ้นก็จะพบว่าค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ก็จะมีค่าสูงขึ้น



ค่าคงที่ $n = 0.85$



ก) ค่าคงที่ $n = 1$



ค) ค่าคงที่ $n = 2$

รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ และอัตราส่วนระหว่าง E_c/E_t ระหว่าง 0.50, 1, 2 และ 5 เมื่อ (ก) ค่าคงที่ $\alpha = 0.85$,
 (ข) ค่าคงที่ $\alpha = 1$,
 (ค) ค่าคงที่ $\alpha = 2$

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

การศึกษางานวิจัยนี้ นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีคุณสมบัติไม่เชิงเส้นประเภท Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสียรูปของอิลาสติกคา โดยใช้แบบจำลองวัสดุชนิดลุดวิก ชนิดไบโมดูลัส เพื่อหาความสัมพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นของโมเมนต์ดัดและค่าความโค้ง โดยคำนึงผลอันเนื่องมาจากค่าคงที่ของวัสดุ n , อัตราส่วนระหว่าง $\gamma = E_c / E_t$ และ ขนาดของหน้าตัดอิลาสติกคา ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25, 0.50$ และ 0.75 โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเป่าร่วมกับเทคนิคการอินทิเกรตเชิงตัวเลข รุงเง-คุดตา อันดับ 4 และเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม จากผลของการวิเคราะห์สามารถสรุปตามวัตถุประสงค์หลักได้ดังนี้

5.1 ค่าคงที่ของวัสดุมีผลต่อการต้านทานน้ำหนักของวัสดุ

เมื่อพิจารณาผลจากการวิเคราะห์คำตอบเชิงตัวเลข จากสมการและโปรแกรมที่ได้จัดทำขึ้นเพื่อหาตอบของปัญหาพบว่า ค่า n จะมีผลให้สติฟเนสของอิลาสติกคามีค่ามากขึ้น มีผลให้ความยาวส่วนโค้ง \bar{S}_t ที่แตกต่างกัน เมื่อ ค่า $n \leq 1$ และมีผลต่อเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง (Load-Deflection Curve) กล่าวคือ ค่า n ที่มีค่ามากจะให้ความยาวส่วนโค้งที่มากกว่าที่ n ที่น้อยกว่า ในลักษณะเดียวกัน ตำแหน่งสูงสุดของ \bar{P}_{CR} จะอยู่เยื้องจากจุดรองรับไปเพียงเล็กน้อยหากค่า n มีค่ามาก ซึ่งส่งผลให้ความชันของเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้งเข้าใกล้ค่า $\pi/2$ หรือมีแนวโน้มที่จะเข้าใกล้ 1 (ตำแหน่งเดียวกันจุดรองรับ) และหลังจากนั้นค่าของแรง \bar{P} จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องจนกระทั่งเข้าใกล้ศูนย์ โดยค่า \bar{S}_t จะมีความยาวที่เพิ่มขึ้นตามค่าคงที่ n

เมื่อพิจารณาผลการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ตำแหน่ง n ที่ $0.10 - 0.90$ พบว่า เส้นโค้งของน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีขนาดสูงสุดที่ตำแหน่ง 0.10 และ ค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งผ่านตำแหน่ง α_{CR} จากนั้นค่าน้ำหนักวิกฤตก็จะกลับมามีค่าสูงขึ้นอีกครั้ง ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.90$ โดยหากค่า n ยิ่งมีค่ามากขึ้น ขนาดของแรงวิกฤต ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.90$ จะมีขนาดของแรงวิกฤตใกล้เคียงกันกับค่าแรงวิกฤต ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.10$

5.2 อัตราส่วนของ $\gamma = E_c / E_t$

เมื่อพิจารณาผลกระทบของอัตราส่วน E_c / E_t พบว่า อัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t ที่มีค่ามาก จะมีผลทำให้การรับน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของคานามีค่าลดลงเนื่องจากพารามิเตอร์ไร้หน่วย \bar{P} ถูกปรับขนาดด้วยค่า E_t ในสมการที่ (3.29) ส่วนผลของตำแหน่งของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง α มีผลหากเพิ่มอัตราส่วนของค่าดังกล่าวจะมีผลทำให้การรับน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของอิลาสติกคามีค่าลดลงเนื่องจากเมื่อเพิ่มอัตราส่วนดังกล่าวจะมีผลทำให้ค่า \bar{I}^* มีขนาดที่ลดลงซึ่งจะส่งผลให้น้ำหนักบรรทุกที่คำนวณได้มีค่าลดลงด้วยเช่นเดียวกัน ในทำนองเดียวกัน หากเพิ่มค่าคงที่ n ให้มีค่าที่มากขึ้นก็จะพบว่าค่าน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ก็จะมีค่าสูงขึ้น

5.3 อัตราส่วนของหน้าตัด

เมื่อพิจารณาผลกระทบของหน้าตัดอิลาสติกคา เมื่อเพิ่มความลึกของหน้าตัดตามอัตราส่วน $h = b, h = 1.5b$ และ $h = 2b$ จะมีผลโดยตรงกับสติฟเนสของอิลาสติกคา โดยพิจารณาเส้นโค้งของน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะพบว่าหาก $h = b$ ค่า \bar{P}_{CR} จะมีขนาดเพิ่มขึ้นตามค่า n ที่เพิ่มขึ้น หากเพิ่มค่า $h = 1.5b$ จะพบว่าค่า \bar{P}_{CR} ของทุก n ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.10$ จะมีขนาดใกล้เคียงกันมาก แตกต่างกันเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่เมื่อปรับค่า $h = 2b$ กลับพบว่าที่ปลายจตุรกรับด้านซ้ายค่า \bar{P}_{CR} ที่เกิดจากค่า n ที่น้อยจะให้ค่า \bar{P}_{CR} มากกว่าค่า \bar{P}_{CR} ที่ได้จากค่า n ที่มีค่ามากกว่า แต่เมื่อผ่านตำแหน่ง α_{CR} มาแล้ว ค่า \bar{P}_{CR} ก็จะกลับมาเพิ่มขึ้นตามค่า n ที่เพิ่มขึ้น

ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t และอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของหน้าตัด ที่ต่างกัน มีผลต่อพฤติกรรมการณ์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาเป็นอย่างมาก โดยปัจจัยทั้ง 3 มีผลต่อน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของอิลาสติกคาและพฤติกรรมการณ์การแอ่นตัวของอิลาสติกคาเป็นอย่างมาก โดยค่าคงที่ n จะมีผลโดยตรงกับสติฟเนสของอิลาสติกคา โดยค่าคงที่ n และอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของหน้าตัด ที่มีค่ามากจะมีผลให้สติฟเนสของอิลาสติกคามีค่ามากขึ้นตามไปด้วยในขณะที่ อัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t จะมีผลในทางตรงกันข้ามกล่าวคือเมื่อ อัตราส่วนระหว่าง E_c / E_t ที่มีค่ามากจะมีผลทำให้การรับน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของคานามีค่าลดลงเนื่องจากพารามิเตอร์ไร้หน่วย \bar{P} ถูกปรับขนาดด้วยค่า E_t ในสมการที่ (3.29) ส่วนผลของตำแหน่งของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง α มีผลโดยตรงเช่นเดียวกันนั่นคือ เมื่อน้ำหนักบรรทุกอยู่ใกล้จตุรกรับแบบหมุนทำให้ระบบมีสติฟเนสที่สูงกว่าในกรณีที่น้ำหนักบรรทุกอยู่ห่างจากจตุรกรับแบบหมุน

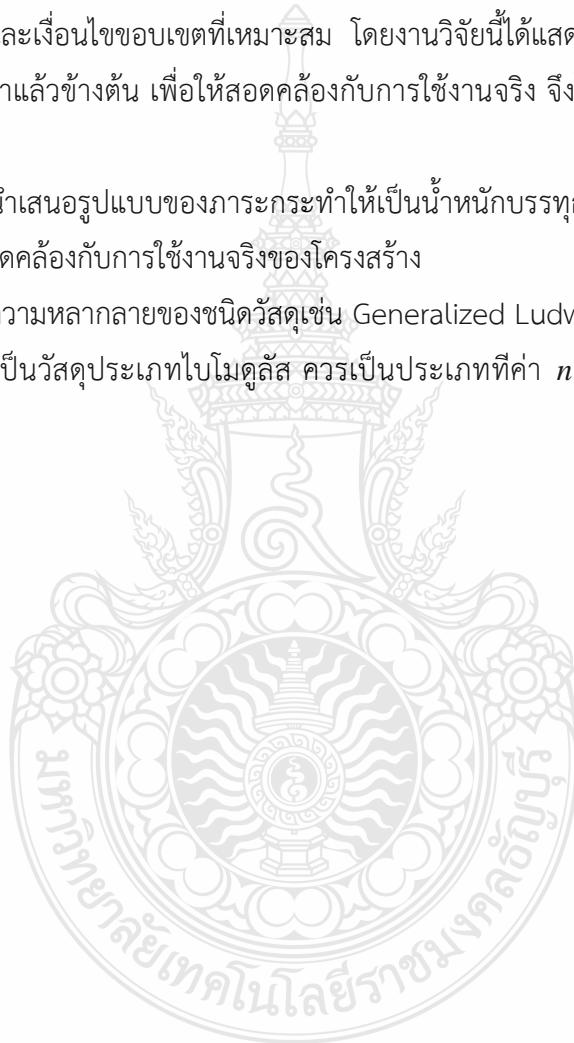
5.4 ข้อเสนอแนะของการทำวิจัยต่อไปในอนาคต

งานวิจัยนี้ นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่มีคุณสมบัติไม่เชิงเส้นประเภทไบโมดูลัส ภายใต้การกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสียรูปของอิลาสติคคา โดยใช้แบบจำลองวัสดุชนิดลูควิค เพื่อหาความสัมพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นของโมเมนต์ดัดและค่าความโค้ง โดยคำนึงผลอันเนื่องมาจากค่าคงที่ของวัสดุ n อัตราส่วนระหว่าง $\gamma = E_c / E_t$ และ ขนาดของหน้าตัดอิลาสติคคาที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25, 0.50$ และ 0.75 โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงเป็าร่วมกับเทคนิคการอินทิเกรตเชิงตัวเลข รุ่งเง-คุดตา อันดับ 4 และเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม โดยงานวิจัยนี้ได้แสดงผลให้เห็นถึงผลกระทำของค่าต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้งานจริง จึงได้เสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไปดังนี้

5.4.1 ควรนำเสนอรูปแบบของภาระกระทำให้เป็นน้ำหนักบรรทุกทุกคงที่แบบติดตาม (Follower self Wight) เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้งานจริงของโครงสร้าง

5.4.2 เพิ่มความหลากหลายของชนิดวัสดุเช่น Generalized Ludwick's Material

5.4.3 หากเป็นวัสดุประเภทไบโมดูลัส ควรเป็นประเภทที่ค่า n ที่มีความต่างกันทั้งด้านอัตราและด้านดิ่ง (n_t, n_c)



บรรณานุกรม

- [1] สุรพันธ์ บุญเจริญ, 2536, การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระ โดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-103
- [2] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, and C.M. Wang, 1994. "Large Deflection of Beams under Moment Gradient", *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, No. 9, pp. 1848-1860.
- [3] S. Chucheepsakul and S. Buncharoen, and T. Huang, 1995. "Elastica of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to End Moment", *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, No. 7, pp. 767-772.
- [4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์, 2538, การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแบบต่างๆ, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-168
- [5] C. M. Wang, K. Y. Lam, X. Q. He, and S. Chucheepsakul, 1997, "Large deflection of an end supported beam subjected to a point load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, No. 1, pp. 63-72.
- [6] ทินกร มนต์ประภัสสร, 2540, การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยคำนึงถึงผลของการยัดตั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-130
- [7] S. Chucheepsakul, C. M. Wang, X. Q. He, and T. Monprapussan, T., 1999. "Double Curvature Bending of Variable - Arc - Length Elastics", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 66, No. 1, pp. 87-94.

บรรณานุกรม(ต่อ)

- [8] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, 2544, การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้
น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางการเสีรูรูป, วิทยานิพนธ์ปริญญา
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-91
- [9] B. Phungpaingam , S. Chuchepsakul, C. M. Wang, 2006, “Postbuckling of Beam
Subjected to Intermediate Follower Force”, *Journal of Engineering
Mechanics*, Vol. 132, No. 1, pp. 16-25.
- [10] T. Pulngern, M.W. Halling, S. Chuchepsakul, and P. Poovarodom, 2006, “On the
Free Vibrations of Variable - Arc - Length Beam : Analytical and Experimental”,
Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 132, No. 5, pp. 772-778.
- [11] นฤพนธ์ ศิลาภากุล, 2548, การแอ่นตัวมากของคานที่ทำจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น, วิทยานิพนธ์
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-71
- [12] C. Athisakul, and S. Chuchepsakul , 2008, “Effect of Inclination on Bending of
Variable - Arc - Length beam subjected to uniform self - weight”, *Engineering
Structures*, Vol. 30, No. 4, pp. 902-908.
- [13] กฤษณะชัย จันทรวง, 2554, การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุแบบไม่เป็นเชิง
เส้นภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี,
หน้า 1-149
- [14] A. SHATNAW, and S. A. SADDER, 2007, “Large Deflections of a Cantilever Beam of
Nonlinear Bimodulus Material Subjected to an End Moment”, *Journal of
Reinforced Plastics and Concrete Mechanics*, Vol.26, No. 12, pp. 1253-
1268.

บรรณานุกรม(ต่อ)

- [15] M.Brojan, M. Cebron and F. Kosel., 2012. “ Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end”, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012
- [16] B. Alberto. and D.D. Santis.,2014. “Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric Ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end” Springer Science+Business Media Dordrecht 2014
- [17] H. ZHAO. and Z.YE, 2015, “Analytic elasticity solution of bi-modulus beams under combined Loads”, *Applied Mathematics and Mechanics, Ed.*, 36(4), 427–438 (2015)
- [18] ปราโมทย์ เตชะอำไพ และนิพนธ์ วรรณโสภาคย์. (2557). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.** (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [19] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. (2557). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [20] อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์



ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ระเบียบวิธีรุงเง - คุดตา (Runge - Kutta method)



ระเบียบวิธีรุงเง - คุดตา (Runge - Kutta method)

ระเบียบวิธีรุงเง - คุดตา (Runge - Kutta method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง รวมถึงในการคำนวณหาผลลัพธ์ในงานวิจัยนี้ด้วย โดยแนวความคิดที่ใช้ในระเบียบวิธีรุงเง - คุดตานี้คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ในระเบียบวิธีรุงเง - คุดตานี้ อยู่ในรูปแบบตามสมการ ข.1

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (\text{ข.1})$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment Function) ซึ่งมีความหมายถึงความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่องกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มจากผลลัพธ์เดิม ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \dots + a_nk_n \quad (\text{ข.2})$$

โดย $a_i, i=1, 2, 3, \dots, n$ เป็นค่าคงที่ และ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (\text{ข.3ก})$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (\text{ข.3ข})$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (\text{ข.3ค})$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (\text{ข.3 น})$$

โดยตัวห้อย n บ่งบอกถึงอันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง - คุดตาที่เลือกใช้ เช่น เมื่อ $n=1$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุดตาอันดับที่หนึ่ง ในทำนองเดียวกันเมื่อเลือกใช้ $n=2$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุดตาอันดับที่สอง เป็นต้น ค่าของ $k_i, i=1, 2, 3, \dots, n$ ในสมการ (ข.3) ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่กำหนดมาให้ ในส่วนของค่า p และ q ต่างๆนั้นเป็นค่าคงที่ และหากพิจารณาสมการ (ข.3) พบว่าจำเป็นต้องรู้ค่า k_1 ก่อนทำการคำนวณค่า k_2 และต้องรู้ค่า k_2 ก่อนทำการคำนวณค่า k_3 เช่นนี้เรื่อยไป สำหรับรายละเอียดของระเบียบวิธีรุงเง - คุดตาสามารถศึกษาได้จาก [18]



ภาคผนวก ข

ระเบียบวิธีนิเวศน์ - ราชภัฏ

ระเบียบวิธีนิวตัน - กราฟเส้น

ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ และ n ตัวแปร คือ x_1, x_2, \dots, x_n มีรูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots & \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{ค.1}$$

โดยการใช้ทฤษฎีการกระจายอนุกรมของเทเลอร์ (Taylor Series) กับฟังก์ชันไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ สามารถจัดรูปได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{ค.2}$$

จากสมการ (ค.2) สามารถจัดรูปแบบสมการได้อีกแบบหนึ่ง คือ

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta x_j = -F_i \quad \text{เมื่อ } i=1, 2, 3, \dots, n \tag{ค.3}$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$[J][\Delta x] = -[F] \tag{ค.4}$$

โดยที่เมตริกซ์ J คือ จาคอบีเยนเมตริกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าตามสมการต่อไปนี้

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad \text{เมื่อ } i \text{ และ } j=1, 2, 3, \dots, n \tag{ค.5}$$

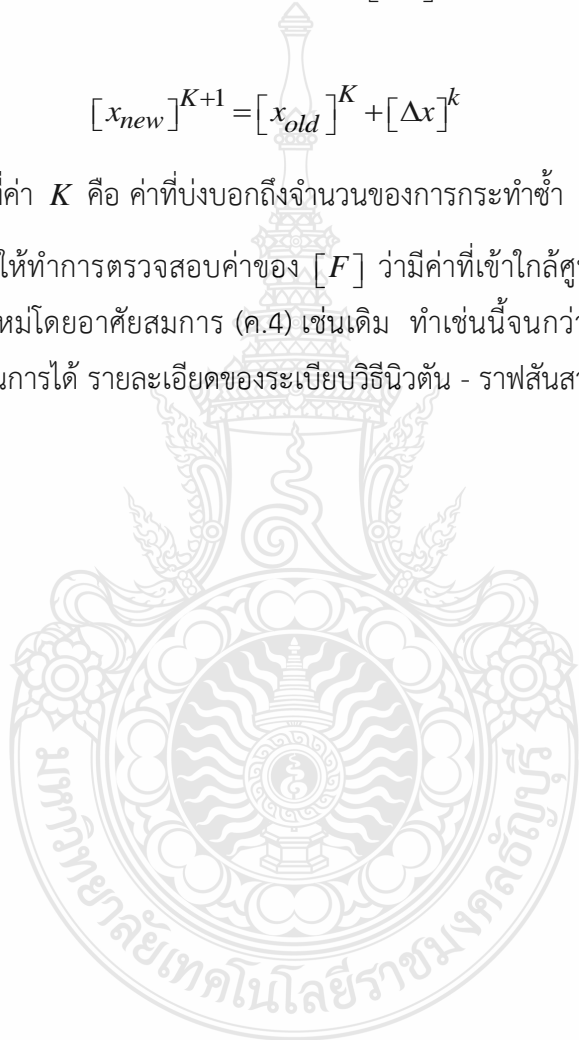
จากสมการที่ (ค.2) ถึง (ค.4) เป็นสมการที่มีเป้าหมายในการหาค่าของ Δx_j เพื่อเป็นค่าปรับแก้ของค่าเดิม x_{old} โดยมีขั้นตอนในการหาค่าปรับแก้ Δx_j ดังต่อไปนี้

1. สมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปร x_1, x_2, \dots, x_n
2. ทำการหาค่าของ F_1, F_2, \dots, F_n และค่าของ J_{ij} จากสมการ (ค.5)
3. ทำการหาค่า $[\Delta x]$ โดยใช้กระบวนการกำจัดแบบเกาส์ จากสมการที่ (ค.4)
4. จากขั้นตอนที่ 3 จะได้ค่าปรับแก้ $[\Delta x]$ ซึ่งเมื่อนำไปรวมกับค่าเดิมจะได้ค่าใหม่ดังสมการต่อไปนี้

$$[x_{new}]^{K+1} = [x_{old}]^K + [\Delta x]^k \quad (\text{ค.6})$$

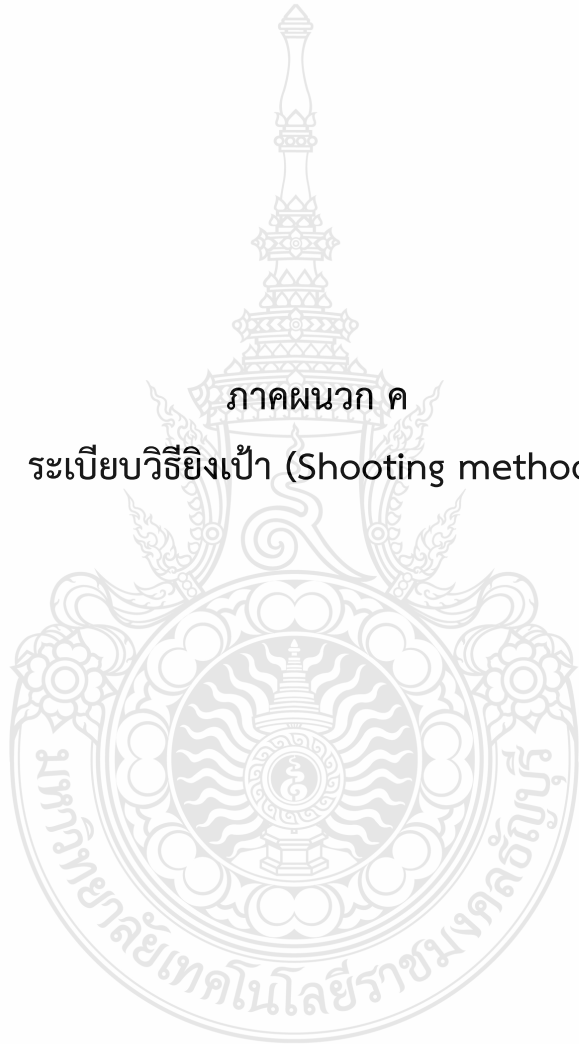
โดยที่ค่า K คือ ค่าที่บ่งบอกถึงจำนวนของการกระทำซ้ำ

5. จากนั้นให้ทำการตรวจสอบค่าของ $[F]$ ว่ามีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์หรือไม่ ถ้ายังไม่เข้าใกล้ศูนย์ให้หาค่าปรับแก้ใหม่โดยอาศัยสมการ (ค.4) เช่นเดิม ทำเช่นนี้จนกว่าค่า $[F]$ จะมีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์จึงจะหยุดกระบวนการได้ รายละเอียดของระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสันสามารถศึกษาได้จาก [18]



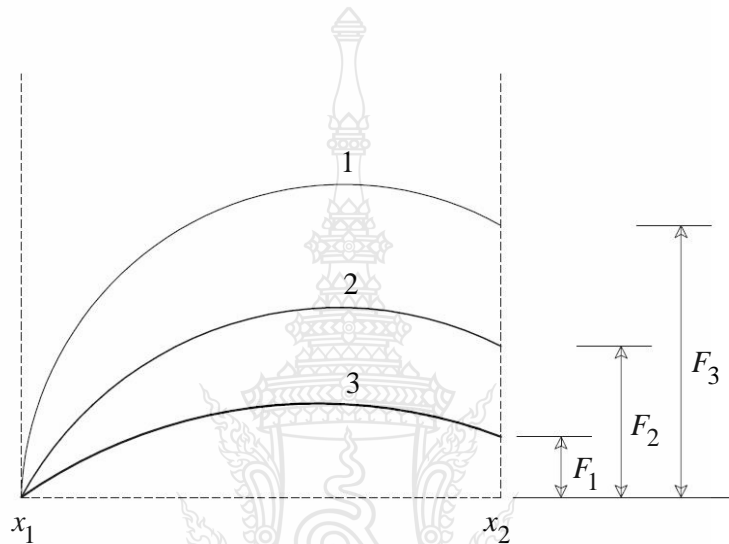
ภาคผนวก ค

ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)



ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

วิธีการนี้ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขวิธีการหนึ่งซึ่งสามารถจัดการกับปัญหาของระบบสมการอนุพันธ์ที่ขึ้นกับตัวแปร 1 ตัว โดยมีเงื่อนไขแบบ 2 จุด (จุดเริ่มต้น x_1 และจุดปลาย x_2) ได้เป็นอย่างดี โดยมีหลักการคือ พยายามปรับแก้ค่าที่ทำการประมาณจนกระทั่งค่าเหล่านั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุด ตามรูปที่ ง.1 โดยที่วิธีการปรับแก้ที่ใช้คือ วิธีการนิวตัน - ราฟสัน



รูปที่ ง.1 วิธีการยิงเป้า

กระบวนการในการแก้ไขปัญหโดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้ามีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ที่จุดเริ่มต้น x_1 นี้จะมีค่าเริ่มต้นอยู่ N ค่า โดยค่าแต่ละค่าเหล่านี้จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ x_1 อยู่ n_1 ค่า ดังนั้นจะเหลือค่าของพารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องอาศัยการประมาณค่าอยู่ $n_2 = N - n_1$ ค่า ซึ่งจะเรียกพารามิเตอร์เหล่านี้ว่า เวกเตอร์ V มีขนาดเท่ากับ $n_2 x_1$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$y_i(x_1) = y_i(x_1, V_1, \dots, V_{n_2}) \quad i = 1, \dots, N \quad (ง.1)$$

2. อินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์จากจุด x_1 ไปจนถึงจุด x_2 โดยที่ ณ ตำแหน่ง x_2 นี้ให้ทำการหาค่าความแตกต่างของค่าที่อินทิเกรตได้กับเงื่อนไขขอบเขตที่ x_2 ซึ่งเรียกค่านี้ว่า เวกเตอร์ของค่าที่แตกต่าง (Discrepancy vector F) ซึ่งเวกเตอร์นี้มีขนาดเท่ากับ $n_2 x_2$ เช่นเดียวกับ เวกเตอร์ V

3. ใช้กระบวนการของวิธีการนิวตัน - ราฟสัน เพื่อหาค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้เวกเตอร์ F มีค่าเป็นศูนย์ โดยมีขั้นตอนการปรับแก้ดังนี้

$$V_{new} = V_{old} + \delta V \quad (ง.2)$$

$$J \delta V = -F \quad (ง.3)$$

โดยที่ J คือ จาคอบีเยนเมตริกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าเท่ากับ

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \quad (ง.4)$$

โดยค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้ค่าเวกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ คือ ค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุดนั่นเอง โดยที่รายละเอียดสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [18]





ภาคผนวก ง
ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ

1. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้นประเภทไบโมดูลัส ชนิด ลูตวิก ที่รับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบติดตาม

```
function VALBimodulus
% Large deflection of simple beam made form bimodulus material subject
to follower load
% arc-length from hinge support to load is constant
clear
global n pl st alpha b h Ec Et gramma m Q N beta I1 I2
format long
alpha=input('alpha = ');
n=input('n = ');
b=input('b = ');
h=input('h = ');
Et=input('Et = ');
Ec=input('Ec = ');
st=input('total arc-length = ');
gramma=Ec/Et;
Q=n/(n+1);
m=n/(2*n+1);
N=(2*n+1)/n;
beta=1/((Et/Ec)^Q+1);
I1=b*h^3/12;
I2=b*m*h^N*(beta^N+gramma*(1-beta)^N);

v(1)=input('point load (P)= ');
v(2)=input('cetaa= ');
v(3)=input('cetac= ');
v(4)=input('cetab= ');
v(5)=input('xstar= ');
v(6)=input('ystar= ');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');
lim=input('limitation= ');
inc=input('increment= ');
fid=fopen('output.txt','wt');
fprintf(fid,'output of cantilever elastica\n');
fprintf(fid,'st      P      cetaa      cetac      cetabb
xstar      ystar\n');
i=0;
dv=0.0001;
while (st<lim)
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
    options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-
15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_sim2',v0,options)
    test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
    i=i+1;

v(1)=v(1)+dv;v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;v(5)=v(5)+dv;v(6)=
v(6)+dv;
```



```

v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
[v fval]=fsolve('score_sim2',v0,options);
test=max(abs(fval));
end

fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f\n',
%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6),test);
st=st+inc
end

fclose(fid)
end

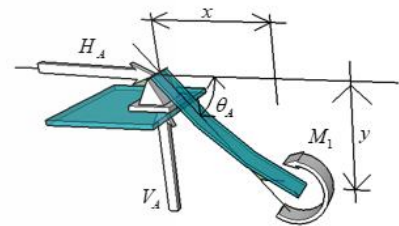
```

Goveqs1 คำนวณการวิเคราะห์ในส่วน $s < \alpha L$

```

function dydx=goveqs1(x,y)
global n P cetab cetac I1 I2 xstar ystar A Ha Va
dydx=zeros(3,1);
A=xstar*cos(cetac)+ystar*sin(cetac);
Ha=P*(sin(cetac)-tan(cetab)*A);
Va=P*(cos(cetac)-A);
dydx(1)=( (Ha*y(3)+Va*y(2)) *I1/I2)^n;
dydx(2)=cos(y(1));
dydx(3)=sin(y(1));
end

```

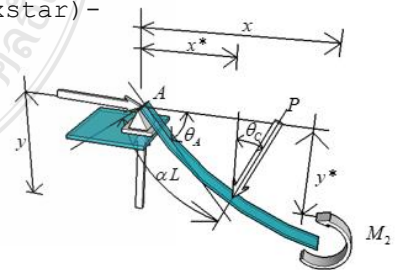


Goveqs1 คำนวณการวิเคราะห์ในส่วน $s > \alpha L$

```

function dydx=goveqs2(x,y)
global n P xstar ystar cetab cetac I1 I2 A Ha Va
dydx=zeros(3,1);
A=xstar*cos(cetac)+ystar*sin(cetac);
Ha=P*(sin(cetac)-tan(cetab)*A);
Va=P*(cos(cetac)-A);
dydx(1)=( (Ha*y(3)+Va*y(2)-P*cos(cetac)*(y(2)-xstar)-
P*sin(cetac)*(y(3)-ystar)) *I1/I2)^n;
dydx(2)=cos(y(1));
dydx(3)=sin(y(1));
end

```



Score_sim2.m ส่วนการควบคุมเงื่อนไข

```

function r=score_sim2(v)
global P st cetaa cetab cetac xstar ystar alpha pl
r=zeros(6,1);
P=v(1);
cetaa=v(2);
cetac=v(3);
cetab=v(4);
xstar=v(5);
ystar=v(6);

odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[xs ys]=ode45('goveqs1',[0 alpha],[cetaa 0 0],odeoptions);

lastrow1=size(ys,1);
cetass=ys(lastrow1,1); xss=ys(lastrow1,2); yss=ys(lastrow1,3);

[x y]=ode45('goveqs2',[alpha st],[cetass xss yss],odeoptions);
lastrow=size(y,1);

if (pl==1)
figure(1)
hold on;
title ('Equilibrium shape');
plot(ys(:,2),ys(:,3));
plot(y(:,2),y(:,3));
axis on;
axis equal;
grid on;
end

r(1)=1-y(lastrow,2);
r(2)=y(lastrow,3);
r(3)=y(lastrow,1)-cetab;
r(4)=xstar-xss;
r(5)=ystar-yss;
r(6)=cetac-cetass;

end

```

91

$$\text{Min}\phi = |\bar{x}(\bar{s}_t=1) - 1| + |\bar{y}(\bar{s}_t=1)| + |\theta(\bar{s}_t=1) - \theta_B| + |\theta_c - \theta_s| + |\bar{x}^* - \bar{x}_s| + |\bar{y}^* - \bar{y}_s|$$

$\bar{x}, \bar{y}, \theta_B, \theta_c, \bar{x}^*, \bar{y}^*$



ภาคผนวก ง

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ

1. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มาจากวัสดุที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้นประเภทไบโมดูลัส ชนิด ลูตวิก ที่รับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบติดตาม

```
function VALBimodulus
% Large deflection of simple beam made form bimodulus material subject
to follower load
% arc-length from hinge support to load is constant
clear
global n pl st alpha b h Ec Et gramma m Q N beta I1 I2
format long
alpha=input('alpha = ');
n=input('n = ');
b=input('b = ');
h=input('h = ');
Et=input('Et = ');
Ec=input('Ec = ');
st=input('total arc-length = ');
gramma=Ec/Et;
Q=n/(n+1);
m=n/(2*n+1);
N=(2*n+1)/n;
beta=1/((Et/Ec)^Q+1);
I1=b*h^3/12;
I2=b*m*h^N*(beta^N+gramma*(1-beta)^N);

v(1)=input('point load (P)= ');
v(2)=input('cetaa= ');
v(3)=input('cetac= ');
v(4)=input('cetab= ');
v(5)=input('xstar= ');
v(6)=input('ystar= ');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');
lim=input('limitation= ');
inc=input('increment= ');
fid=fopen('output.txt','wt');
fprintf(fid,'output of cantilever elastica\n');
fprintf(fid,'st      P      cetaa      cetac      cetabb
xstar      ystar\n');
i=0;
dv=0.0001;
while (st<lim)
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
    options=optimset('fsolve','MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-
15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_sim2',v0,options)
    test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
    i=i+1;

v(1)=v(1)+dv;v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;v(5)=v(5)+dv;v(6)=
v(6)+dv;
```

```

v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5) v(6)];
[v fval]=fsolve('score_sim2',v0,options);
test=max(abs(fval));
end

fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f\n',
%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6),test);
st=st+inc
end

fclose(fid)
end

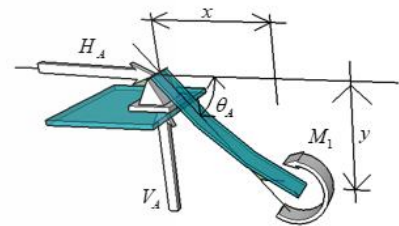
```

Goveqs1 คำนวณการวิเคราะห์ในส่วน $s < \alpha L$

```

function dydx=goveqs1(x,y)
global n P cetab cetac I1 I2 xstar ystar A Ha Va
dydx=zeros(3,1);
A=xstar*cos(cetac)+ystar*sin(cetac);
Ha=P*(sin(cetac)-tan(cetab)*A);
Va=P*(cos(cetac)-A);
dydx(1)=( (Ha*y(3)+Va*y(2)) *I1/I2)^n;
dydx(2)=cos(y(1));
dydx(3)=sin(y(1));
end

```

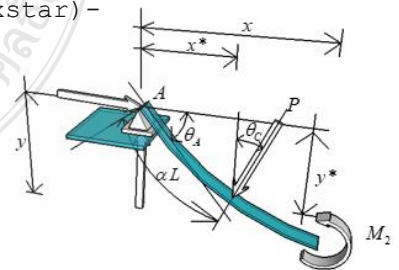


Goveqs1 คำนวณการวิเคราะห์ในส่วน $s > \alpha L$

```

function dydx=goveqs2(x,y)
global n P xstar ystar cetab cetac I1 I2 A Ha Va
dydx=zeros(3,1);
A=xstar*cos(cetac)+ystar*sin(cetac);
Ha=P*(sin(cetac)-tan(cetab)*A);
Va=P*(cos(cetac)-A);
dydx(1)=( (Ha*y(3)+Va*y(2)-P*cos(cetac)*(y(2)-xstar)-
P*sin(cetac)*(y(3)-ystar)) *I1/I2)^n;
dydx(2)=cos(y(1));
dydx(3)=sin(y(1));
end

```



Score_sim2.m ส่วนการควบคุมเงื่อนไข

```

function r=score_sim2(v)
global P st cetaa cetab cetac xstar ystar alpha pl
r=zeros(6,1);
P=v(1);
cetaa=v(2);
cetac=v(3);
cetab=v(4);
xstar=v(5);
ystar=v(6);

odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[xs ys]=ode45('goveqs1',[0 alpha],[cetaa 0 0],odeoptions);

lastrow1=size(ys,1);
cetass=ys(lastrow1,1); xss=ys(lastrow1,2); yss=ys(lastrow1,3);

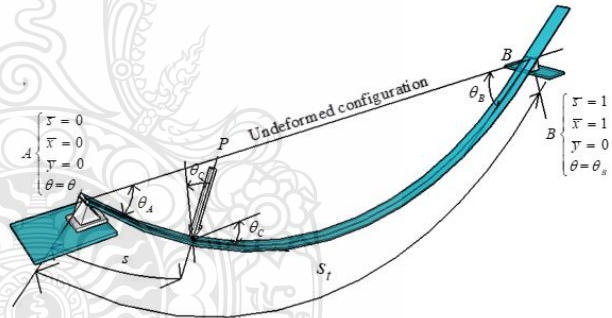
[x y]=ode45('goveqs2',[alpha st],[cetass xss yss],odeoptions);
lastrow=size(y,1);

if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title('Equilibrium shape');
    plot(ys(:,2),ys(:,3));
    plot(y(:,2),y(:,3));
    axis on;
    axis equal;
    grid on;
end

r(1)=1-y(lastrow,2);
r(2)=y(lastrow,3);
r(3)=y(lastrow,1)-cetab;
r(4)=xstar-xss;
r(5)=ystar-yss;
r(6)=cetac-cetass;

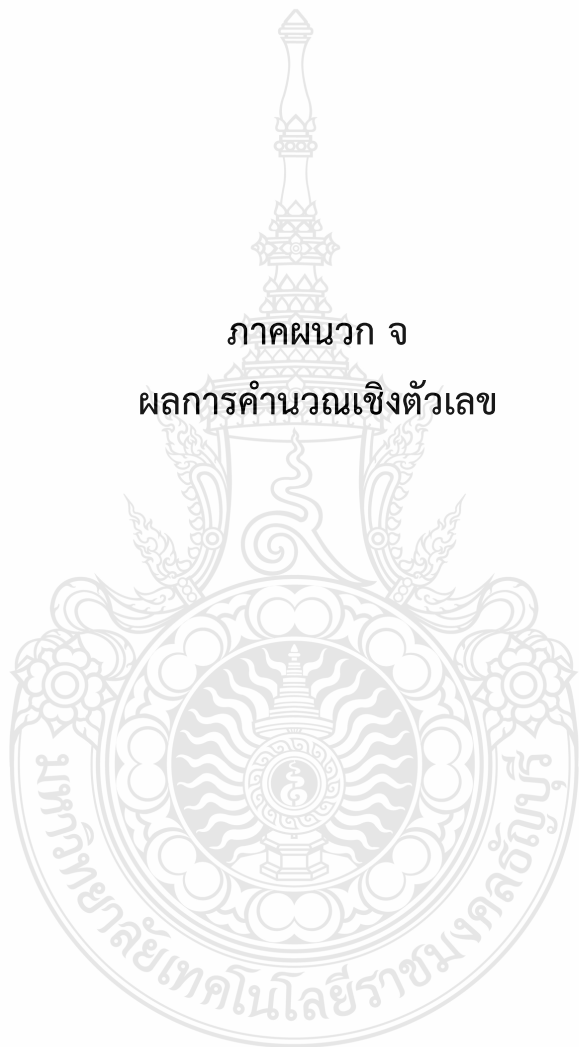
end

```



$$\text{Min}_{\bar{x}, \bar{y}, \theta_B, \theta_C, \bar{x}^*, \bar{y}^*} \phi = |\bar{x}(\bar{s}_t = 1) - 1| + |\bar{y}(\bar{s}_t = 1)| + |\theta(\bar{s}_t = 1) - \theta_B| + |\theta_C - \theta_s| + |\bar{x}^* - \bar{x}_s| + |\bar{y}^* - \bar{y}_s|$$

ภาคผนวก จ
ผลการคำนวณเชิงตัวเลข



ตารางที่ จ.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 0.85$ อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.00000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.00001	0.055554	0.059675	0.062782	-0.007473	-0.004221	0.005533	0.249995	-0.001583
1.00201	1.248489	1.341095	1.410937	-0.105902	-0.059958	0.078385	0.248970	-0.022413
1.00501	2.113408	2.270170	2.388396	-0.167089	-0.094919	0.123600	0.247434	-0.035314
1.01001	3.118608	3.349930	3.524389	-0.235929	-0.134768	0.174356	0.244883	-0.049750
1.01601	4.023091	4.321503	4.546559	-0.297986	-0.171334	0.219972	0.241834	-0.062663
1.02501	5.064360	5.440007	5.723313	-0.371705	-0.215784	0.273955	0.237286	-0.077840
1.03601	6.034860	6.482494	6.820090	-0.444923	-0.261260	0.327321	0.231773	-0.092696
1.05101	7.025453	7.546564	7.939575	-0.527730	-0.314586	0.387357	0.224337	-0.109173
1.07301	8.035596	8.631634	9.081154	-0.628089	-0.382375	0.459681	0.213613	-0.128576
1.11001	9.012070	9.680538	10.184682	-0.763968	-0.480632	0.557018	0.196102	-0.153606
1.13201	9.317323	10.008433	10.529654	-0.832140	-0.533119	0.605749	0.186023	-0.165516
1.18001	9.544432	10.252387	10.786313	-0.959173	-0.637353	0.696872	0.164950	-0.186313
1.27901	9.002894	9.670681	10.174312	-1.159656	-0.821492	0.844529	0.125720	-0.214605
1.37101	8.002457	8.596037	9.043703	-1.297627	-0.965142	0.953762	0.094566	-0.230085
1.45201	7.008652	7.528517	7.920589	-1.391871	-1.073537	1.036704	0.071338	-0.238420
1.53301	6.009311	6.455050	6.791218	-1.465900	-1.166751	1.111529	0.051895	-0.243529
1.61701	5.008706	5.380225	5.660418	-1.524675	-1.248584	1.183363	0.035523	-0.246600
1.70601	4.003563	4.300526	4.524489	-1.569456	-1.319821	1.255378	0.022155	-0.248315
1.80001	3.001052	3.223654	3.391536	-1.598965	-1.378578	1.329056	0.012268	-0.249154
1.89801	2.004079	2.152731	2.264842	-1.611043	-1.422161	1.405553	0.006502	-0.249515
1.99801	1.005158	1.079715	1.135945	-1.602762	-1.447385	1.486147	0.005635	-0.249666
2.00801	0.904406	0.971490	1.022083	-1.600669	-1.448758	1.494491	0.005854	-0.249673
2.01801	0.803221	0.862800	0.907733	-1.598324	-1.449908	1.502908	0.006133	-0.249678
2.02801	0.701516	0.753551	0.792794	-1.595718	-1.450827	1.511404	0.006475	-0.249681
2.03701	0.609457	0.654664	0.688757	-1.593142	-1.451454	1.519122	0.006838	-0.249681
2.04701	0.506492	0.544061	0.572394	-1.590015	-1.451921	1.527786	0.007304	-0.249679
2.05701	0.402702	0.432572	0.455100	-1.586598	-1.452138	1.536550	0.007839	-0.249674
2.06601	0.308482	0.331364	0.348621	-1.583265	-1.452113	1.544531	0.008381	-0.249667
2.07601	0.202768	0.217808	0.229151	-1.579261	-1.451833	1.553510	0.009055	-0.249654
2.08501	0.106581	0.114486	0.120447	-1.575375	-1.451344	1.561701	0.009728	-0.249638
2.09001	0.052667	0.056574	0.059520	-1.573095	-1.450972	1.566299	0.010130	-0.249627

ตารางที่ จ.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n=1$
อัตราส่วน $\gamma=1$ และ $\alpha=0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.00000	0.000000	-		-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.00001	0.136444			-0.007462	-0.004264	0.005330	0.249995	-0.001599
1.00101	1.366693			-0.074979	-0.042894	0.053542	0.249472	-0.016059
1.00301	2.343739			-0.129390	-0.074189	0.092351	0.248428	-0.027687
1.00501	3.003757			-0.166869	-0.095894	0.119043	0.247385	-0.035672
1.01001	4.176210			-0.235651	-0.136176	0.167907	0.244785	-0.050255
1.01501	5.030397			-0.288294	-0.167513	0.205171	0.242193	-0.061333
1.02301	6.067092			-0.356401	-0.208880	0.253175	0.238064	-0.075528
1.03301	7.034006			-0.426047	-0.252338	0.301986	0.232938	-0.089846
1.04701	8.023208			-0.507005	-0.304601	0.358338	0.225828	-0.106180
1.06801	9.025290			-0.607170	-0.372307	0.427463	0.215319	-0.125823
1.10601	10.006217			-0.751734	-0.477035	0.526176	0.196821	-0.152784
1.16801	10.439886			-0.932349	-0.621714	0.648553	0.168234	-0.183472
1.25301	10.003219			-1.118255	-0.789754	0.775958	0.132616	-0.210511
1.34701	9.002151			-1.272996	-0.947407	0.887489	0.098372	-0.228550
1.42801	8.011234			-1.376365	-1.063849	0.968945	0.073253	-0.237892
1.51001	7.001383			-1.459075	-1.165438	1.042531	0.051840	-0.243587
1.59401	6.004704			-1.524813	-1.253841	1.111686	0.033878	-0.246870
1.68301	5.006937			-1.576457	-1.331386	1.180462	0.018951	-0.248611
1.77801	4.007486			-1.613491	-1.396952	1.250908	0.007364	-0.249370
1.87901	3.005806			-1.634050	-1.448081	1.324595	-0.000310	-0.249615
1.98401	2.005634			-1.635438	-1.481273	1.402320	-0.003306	-0.249714
2.08901	1.007550			-1.615057	-1.493132	1.484355	-0.000903	-0.249833
2.10001	0.900705			-1.611501	-1.493023	1.493380	-0.000301	-0.249844
2.11001	0.802879			-1.608008	-1.492681	1.501678	0.000309	-0.249852
2.12001	0.704296			-1.604257	-1.492103	1.510073	0.000982	-0.249858
2.13001	0.604853			-1.600241	-1.491280	1.518572	0.001719	-0.249862
2.14001	0.504440			-1.595947	-1.490204	1.527184	0.002524	-0.249863
2.15001	0.402933			-1.591364	-1.488868	1.535916	0.003399	-0.249860
2.16001	0.300198			-1.586478	-1.487260	1.544780	0.004346	-0.249853
2.16901	0.206561			-1.581811	-1.485571	1.552878	0.005265	-0.249842
2.17901	0.101059			-1.576308	-1.483415	1.562022	0.006361	-0.249823
2.18801	0.004642			-1.571055	-1.481211	1.570393	0.007419	-0.249800

ตารางที่ จ.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 2$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.00000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.00001	1.711934	1.397788	1.210520	-0.007454	-0.004472	0.004472	0.249994	-0.001677
1.00101	5.414138	4.420625	3.828373	-0.074905	-0.044995	0.044918	0.249423	-0.016844
1.00201	6.415210	5.237997	4.536239	-0.105667	-0.063546	0.063328	0.248852	-0.023747
1.00301	7.079743	5.780586	5.006134	-0.129304	-0.077850	0.077451	0.248281	-0.029041
1.00501	8.003249	6.534625	5.659151	-0.166811	-0.100659	0.099804	0.247139	-0.037420
1.00901	9.180420	7.495781	6.491537	-0.223675	-0.135582	0.133529	0.244858	-0.050056
1.01401	10.131111	8.272017	7.163777	-0.278872	-0.169982	0.166022	0.242011	-0.062220
1.02101	11.028319	9.004585	7.798199	-0.341424	-0.209708	0.202491	0.238032	-0.075852
1.03301	12.006880	9.803577	8.490146	-0.427757	-0.266116	0.252088	0.231237	-0.094331
1.05601	13.000821	10.615126	9.192969	-0.556568	-0.354451	0.324215	0.218312	-0.120974
1.11901	13.666794	11.158890	9.663883	-0.807636	-0.544763	0.457424	0.183791	-0.168446
1.30301	12.010414	9.806462	8.492645	-1.256737	-0.961230	0.674874	0.094256	-0.230602
1.38701	11.004310	8.984982	7.781223	-1.396244	-1.113833	0.741387	0.060499	-0.241743
1.47501	10.000988	8.165773	7.071767	-1.514269	-1.252904	0.800830	0.030322	-0.247462
1.57001	9.005601	7.353042	6.367921	-1.615393	-1.380551	0.857514	0.003531	-0.249421
1.67601	8.002350	6.533891	5.658516	-1.701445	-1.497237	0.915010	-0.019838	-0.248791
1.79401	7.000420	5.715819	4.950044	-1.769522	-1.597998	0.974833	-0.038754	-0.246679
1.92501	6.000078	4.899043	4.242696	-1.816673	-1.677976	1.038741	-0.052366	-0.244256
2.06901	5.000051	4.082525	3.535570	-1.839846	-1.732370	1.108442	-0.059926	-0.242592
2.22401	4.000408	3.266319	2.828715	-1.836538	-1.757219	1.185375	-0.060844	-0.242418
2.38501	3.003439	2.452297	2.123752	-1.805743	-1.750484	1.270359	-0.054827	-0.243883
2.54501	2.003524	1.635870	1.416705	-1.748240	-1.712584	1.364068	-0.041931	-0.246446
2.69301	1.000341	0.816775	0.707348	-1.667520	-1.646899	1.465394	-0.022860	-0.248948
2.70601	0.904761	0.738734	0.639763	-1.658850	-1.639426	1.475336	-0.020775	-0.249131
2.71901	0.807411	0.659248	0.570926	-1.649874	-1.631628	1.485501	-0.018611	-0.249303
2.73301	0.700383	0.571860	0.495246	-1.639843	-1.622845	1.496717	-0.016188	-0.249472
2.74501	0.606649	0.495327	0.428966	-1.630928	-1.614983	1.506571	-0.014029	-0.249604
2.75801	0.502800	0.410534	0.355533	-1.620918	-1.606095	1.517517	-0.011600	-0.249729
2.77001	0.404586	0.330343	0.286085	-1.611331	-1.597528	1.527894	-0.009269	-0.249826
2.78201	0.303865	0.248105	0.214865	-1.601387	-1.588589	1.538555	-0.006847	-0.249905
2.79401	0.200359	0.163592	0.141675	-1.591060	-1.579250	1.549528	-0.004328	-0.249961
2.80501	0.102755	0.083899	0.072659	-1.581231	-1.570313	1.559885	-0.001926	-0.249991
2.81601	0.002250	0.001837	0.001591	-1.571026	-1.560986	1.570557	0.000570	-0.249998

ตารางที่ จ.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n=3$
อัตราส่วน $\gamma=1$ และ $\alpha=0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000001	2.657488	2.028043	1.674112	-0.00236	-0.00146	0.001273	0.249999	-0.00055
1.000003	3.191462	2.435541	2.010495	-0.0041	-0.00252	0.002205	0.249998	-0.00095
1.000012	4.020916	3.068533	2.533018	-0.00819	-0.00504	0.004411	0.249993	-0.00189
1.000045	5.011497	3.824488	3.157045	-0.01586	-0.00976	0.008541	0.249973	-0.00366
1.000133	6.002456	4.580731	3.78131	-0.02727	-0.01679	0.014683	0.24992	-0.00629
1.000336	7.002119	5.343617	4.411059	-0.04335	-0.02669	0.023335	0.249797	-0.01
1.000752	8.001517	6.1063	5.04064	-0.06485	-0.03994	0.034899	0.249547	-0.01496
1.002001	9.395069	7.16978	5.918523	-0.1058	-0.06525	0.056876	0.248794	-0.02438
1.003001	10.0311	7.65516	6.319195	-0.12957	-0.08001	0.069603	0.248191	-0.02984
1.006001	11.19051	8.539959	7.04958	-0.18327	-0.11356	0.098214	0.246382	-0.04212
1.010001	12.0862	9.223497	7.613829	-0.23667	-0.1473	0.126427	0.243971	-0.05425
1.017001	13.01834	9.934849	8.201037	-0.30874	-0.19364	0.16402	0.239752	-0.07043
1.032001	14.03919	10.71391	8.844138	-0.42402	-0.27026	0.222679	0.230722	-0.09572
1.090001	14.92535	11.39017	9.402381	-0.7132	-0.48104	0.35922	0.196084	-0.15431
1.205001	14.00583	10.68845	8.823118	-1.07696	-0.79546	0.506034	0.130343	-0.2125
1.288001	13.0084	9.927268	8.194779	-1.27114	-0.98887	0.574283	0.086923	-0.23365
1.374001	12.00126	9.158672	7.560317	-1.43634	-1.16794	0.628928	0.046648	-0.24496
1.468001	11.00024	8.394752	6.929715	-1.58456	-1.34015	0.677554	0.008769	-0.24931
1.574001	10.00645	7.636352	6.30367	-1.71823	-1.50527	0.724096	-0.02612	-0.24823
1.698001	9.000726	6.868839	5.670102	-1.83687	-1.66073	0.772238	-0.05713	-0.2431
1.841001	8.002078	6.106729	5.040994	-1.93202	-1.79402	0.823528	-0.08181	-0.23606
2.006001	7.002474	5.343888	4.411282	-1.99784	-1.89591	0.880632	-0.09885	-0.22953
2.193001	6.004189	4.582054	3.782402	-2.02922	-1.95836	0.945534	-0.10743	-0.22569
2.401001	5.004333	3.819021	3.152533	-2.02451	-1.97839	1.020382	-0.10749	-0.22569
2.626001	4.002466	3.054454	2.521396	-1.98476	-1.95693	1.107003	-0.09928	-0.22943
2.859001	3.00193	2.290902	1.891098	-1.91345	-1.89815	1.206334	-0.08328	-0.23572
3.086001	2.0036	1.529033	1.262189	-1.81596	-1.80856	1.318241	-0.06032	-0.24261
3.289001	1.003083	0.765496	0.631903	-1.69888	-1.69595	1.441197	-0.03179	-0.24797
3.375001	0.502123	0.383192	0.316318	-1.63566	-1.63402	1.5055	-0.01612	-0.24948
3.420001	0.203645	0.15541	0.128288	-1.59721	-1.59611	1.544266	-0.00655	-0.24991
3.434001	0.103297	0.078831	0.065073	-1.58421	-1.58326	1.557335	-0.0033	-0.24998
3.447001	0.006113	0.004665	0.003851	-1.571591	-1.570772	1.570000	-0.000158	-0.250000

ตารางที่ จ.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 4$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000000	1.797591	1.665660	1.647152	-0.000068	-0.000043	0.000034	0.250000	-0.000016
1.000001	4.368794	3.223243	3.463641	-0.002374	-0.001484	0.001187	0.249999	-0.000556
1.000003	5.011456	3.697392	3.973316	-0.004111	-0.002569	0.002056	0.249998	-0.000964
1.000013	6.019281	4.440953	4.771700	-0.008557	-0.005348	0.004278	0.249992	-0.002006
1.000044	7.009792	5.171740	5.554044	-0.015742	-0.009839	0.007871	0.249972	-0.003689
1.000127	8.001670	5.903536	8.894716	-0.026745	-0.016718	0.013371	0.249921	-0.006268
1.000327	9.002449	6.641898	8.341777	-0.042917	-0.026833	0.021452	0.249796	-0.010056
1.000763	10.000071	7.377932	5.811971	-0.065561	-0.041011	0.032756	0.249523	-0.015357
1.002000	11.254113	8.303149	4.943935	-0.106165	-0.066505	0.052979	0.248750	-0.024846
1.004000	12.226954	9.020900	4.937512	-0.150187	-0.094295	0.074800	0.247499	-0.035098
1.007000	13.039857	9.620650	4.927899	-0.198772	-0.125220	0.098708	0.245622	-0.046350
1.014000	14.037080	10.356389	4.905570	-0.281407	-0.178660	0.138798	0.241240	-0.065282
1.031000	15.030241	11.089131	4.851913	-0.419799	-0.271439	0.203724	0.230582	-0.096150
1.073000	15.535997	11.462271	4.722643	-0.647845	-0.436783	0.302504	0.204244	-0.143557
1.148000	15.001899	11.068220	4.502294	-0.929802	-0.668736	0.407513	0.157738	-0.193260
1.231000	14.004165	10.332104	4.271939	-1.167846	-0.891264	0.481199	0.108274	-0.224666
1.313000	13.008674	9.597643	4.056140	-1.361338	-1.090473	0.532448	0.062828	-0.241377
1.404000	12.004738	8.856951	3.828295	-1.541701	-1.290511	0.575193	0.017697	-0.248873
1.509000	11.001463	8.116747	3.578329	-1.713280	-1.493122	0.613837	-0.026353	-0.248222
1.633000	10.004469	7.381176	3.298104	-1.872577	-1.691807	0.651544	-0.067009	-0.240584
1.783000	9.002619	6.642024	2.976844	-2.011671	-1.874529	0.691970	-0.101426	-0.228339
1.962000	8.003798	5.905105	2.613224	-2.115833	-2.020126	0.738044	-0.126149	-0.215755
2.173000	7.000743	5.165064	2.203814	-2.175389	-2.114036	0.792990	-0.139979	-0.207101
2.414000	6.002365	4.428473	1.748542	-2.187726	-2.151364	0.858651	-0.143389	-0.204779
2.685000	5.002891	3.691073	1.228248	-2.157293	-2.137523	0.937479	-0.137673	-0.208673
2.983000	4.000001	2.951153	0.583217	-2.089843	-2.080175	1.031901	-0.123663	-0.217272
3.296000	3.000864	2.214001		-1.991639	-1.987506	1.143096	-0.101975	-0.228256
3.605000	2.002033	1.477076		-1.867933	-1.866483	1.271951	-0.073138	-0.239062
3.879000	1.001400	0.738821		-1.724757	-1.724387	1.416608	-0.038323	-0.247045
3.991000	0.501297	0.369851		-1.648570	-1.648416	1.492975	-0.019418	-0.249245
4.030000	0.300180	0.221469		-1.617461	-1.617358	1.524113	-0.011658	-0.249728
4.065000	0.100382	0.074060		-1.586417	-1.586352	1.555171	-0.003902	-0.249970
4.081000	0.000805	0.000594		-1.570922	-1.570870	1.570671	-0.000029	-0.250000

ตารางที่ จ.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 0.85$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.039809	0.042762	0.044988	-0.006256	0.000000	0.006256	0.499995	-0.002030
1.003010	1.127771	1.211423	1.274512	-0.108520	-0.000423	0.108326	0.498494	-0.035246
1.009010	2.093609	2.248902	2.366021	-0.187689	-0.002176	0.186694	0.495483	-0.061040
1.018010	3.025807	3.250246	3.419512	-0.265216	-0.006091	0.262448	0.490947	-0.086416
1.033010	4.051944	4.352496	4.579166	-0.358720	-0.014884	0.352018	0.483338	-0.117223
1.056010	5.019531	5.391853	5.672651	-0.466534	-0.032142	0.452269	0.471556	-0.153046
1.111010	6.001840	6.447024	6.782774	-0.653907	-0.085019	0.617540	0.442905	-0.215944
1.152010	6.149896	6.606063	6.950095	-0.762204	-0.131118	0.707731	0.421225	-0.252426
1.204010	6.002197	6.447409	6.783178	-0.877920	-0.194495	0.800234	0.393526	-0.291158
1.334010	5.006260	5.377598	5.657654	-1.102695	-0.364109	0.972591	0.324801	-0.363895
1.447010	4.001350	4.298149	4.521989	-1.249108	-0.512980	1.085859	0.267925	-0.407690
1.570010	3.000878	3.223467	3.391339	-1.371382	-0.667526	1.189388	0.211604	-0.440724
1.714010	2.005876	2.154662	2.266872	-1.474653	-0.831213	1.296876	0.155693	-0.465363
1.890010	1.004543	1.079055	1.135250	-1.550367	-0.998507	1.420682	0.105051	-0.481854
1.910010	0.901631	0.968509	1.018948	-1.555644	-1.014962	1.434741	0.100653	-0.483071
1.930010	0.800267	0.859627	0.904395	-1.560237	-1.030862	1.448876	0.096550	-0.484185
1.950010	0.700369	0.752319	0.791498	-1.564147	-1.046202	1.463088	0.092746	-0.485201
1.970010	0.601656	0.646284	0.679941	-1.567361	-1.060970	1.477414	0.089250	-0.486126
1.990010	0.504019	0.541404	0.569600	-1.569874	-1.075157	1.491863	0.086066	-0.486966
2.011010	0.402390	0.432237	0.454747	-1.571740	-1.089417	1.507198	0.083068	-0.487762
2.032010	0.301417	0.323774	0.340636	-1.572795	-1.103008	1.522731	0.080435	-0.488474
2.053010	0.200808	0.215702	0.226936	-1.573012	-1.115916	1.538498	0.078181	-0.489107
2.074010	0.100224	0.107658	0.113265	-1.572356	-1.128120	1.554543	0.076321	-0.489664
2.084010	0.052208	0.056081	0.059002	-1.571722	-1.133677	1.562297	0.075580	-0.489903
2.090010	0.023374	0.025107	0.026415	-1.571244	-1.136932	1.566983	0.075180	-0.490038
2.094010	0.004127	0.004433	0.004664	-1.570882	-1.139068	1.570122	0.074932	-0.490125

ตารางที่ จ.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n=1$
อัตราส่วน $\gamma=1$ และ $\alpha=0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.097976	-0.006124	0.000000	0.006124	0.499995	-0.002041	1.000010	0.097976
1.002010	1.377694	-0.086815	-0.000232	0.086699	0.498994	-0.028950	1.002010	1.377694
1.005010	2.148544	-0.137051	-0.000911	0.136596	0.497491	-0.045729	1.005010	2.148544
1.011010	3.108248	-0.203136	-0.002949	0.201671	0.494475	-0.067857	1.011010	3.108248
1.020010	4.040870	-0.273784	-0.007160	0.270242	0.489929	-0.091605	1.020010	4.040870
1.035010	5.035079	-0.361970	-0.016324	0.353963	0.482297	-0.121410	1.035010	5.035079
1.061010	6.006138	-0.477361	-0.036609	0.459668	0.468912	-0.160686	1.061010	6.006138
1.139010	6.785017	-0.717480	-0.117084	0.663511	0.427786	-0.242988	1.139010	6.785017
1.272010	6.006543	-0.991462	-0.285643	0.871357	0.356090	-0.335013	1.272010	6.006543
1.380010	5.007538	-1.154722	-0.431558	0.988342	0.298844	-0.386246	1.380010	5.007538
1.493010	4.004646	-1.288975	-0.582168	1.087023	0.242366	-0.424573	1.493010	4.004646
1.623010	3.001962	-1.407244	-0.744956	1.184252	0.184281	-0.454284	1.623010	3.001962
1.780010	2.001612	-1.506900	-0.918562	1.290290	0.126914	-0.475659	1.780010	2.001612
1.972010	1.002169	-1.572129	-1.088143	1.416033	0.079025	-0.488439	1.972010	1.002169
1.993010	0.902441	-1.575621	-1.103535	1.430081	0.075404	-0.489267	1.993010	0.902441
2.014010	0.803895	-1.578383	-1.118271	1.444261	0.072121	-0.490013	2.014010	0.803895
2.036010	0.701698	-1.580483	-1.132991	1.459282	0.069051	-0.490713	2.036010	0.701698
2.058010	0.600321	-1.581755	-1.146965	1.474501	0.066368	-0.491334	2.058010	0.600321
2.079010	0.504074	-1.582179	-1.159593	1.489242	0.064178	-0.491860	2.079010	0.504074
2.101010	0.403516	-1.581772	-1.172060	1.504943	0.062286	-0.492343	2.101010	0.403516
2.123010	0.302930	-1.580461	-1.183728	1.520946	0.060818	-0.492762	2.123010	0.302930
2.145010	0.201970	-1.578208	-1.194572	1.537295	0.059794	-0.493116	2.145010	0.201970
2.167010	0.100247	-1.574965	-1.204563	1.554043	0.059234	-0.493407	2.167010	0.100247
2.188010	0.002025	-1.570890	-1.213273	1.570456	0.059158	-0.493625	2.188010	0.002025

ตารางที่ จ.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 2$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	1.241787	1.013915	0.878076	-0.005578	0.000000	0.005578	0.499995	-0.002092
1.001010	3.924212	3.204106	2.774837	-0.056063	-0.000085	0.056006	0.499495	-0.021025
1.002010	4.646204	3.793610	3.285363	-0.079098	-0.000238	0.078940	0.498994	-0.029666
1.003010	5.123538	4.183352	3.622889	-0.096807	-0.000436	0.096517	0.498493	-0.036310
1.006010	6.033174	4.926066	4.266098	-0.136844	-0.001226	0.136028	0.496986	-0.051337
1.012010	7.039833	5.747999	4.977913	-0.193590	-0.003444	0.191303	0.493959	-0.072651
1.023010	8.005472	6.536441	5.660724	-0.268318	-0.009041	0.262334	0.488364	-0.100749
1.053010	9.011526	7.357880	6.372111	-0.408668	-0.030786	0.388488	0.472815	-0.153558
1.088010	9.245538	7.548950	6.537582	-0.528502	-0.063931	0.487079	0.454167	-0.198499
1.140010	9.000770	7.349098	6.364505	-0.669708	-0.123000	0.591428	0.425572	-0.250787
1.238010	8.008102	6.538588	5.662583	-0.878564	-0.253166	0.723120	0.369497	-0.325011
1.330010	7.008064	5.722060	4.955450	-1.037053	-0.387099	0.807816	0.315522	-0.376803
1.433010	6.001153	4.899921	4.243456	-1.186395	-0.541794	0.879160	0.255448	-0.420022
1.555010	5.001953	4.084078	3.536915	-1.333568	-0.722915	0.945704	0.187513	-0.455372
1.709010	4.003392	3.268756	2.830826	-1.480642	-0.936677	1.015288	0.111020	-0.481394
1.914010	3.003069	2.451996	2.123491	-1.617948	-1.178298	1.098186	0.031249	-0.495121
2.190010	2.001102	1.633893	1.414993	-1.711337	-1.406755	1.210719	-0.032011	-0.497104
2.521010	1.001401	0.817640	0.708097	-1.702567	-1.529588	1.369464	-0.044144	-0.497444
2.554010	0.902001	0.736481	0.637811	-1.694578	-1.532877	1.387932	-0.041579	-0.497741
2.587010	0.801151	0.654137	0.566499	-1.685177	-1.534469	1.407103	-0.038274	-0.498075
2.619010	0.701487	0.572761	0.496026	-1.674645	-1.534345	1.426451	-0.034328	-0.498424
2.650010	0.602653	0.492064	0.426140	-1.663030	-1.532594	1.445999	-0.029771	-0.498770
2.681010	0.500959	0.409031	0.354232	-1.649923	-1.529155	1.466454	-0.024440	-0.499109
2.710010	0.402577	0.328703	0.284665	-1.636190	-1.524313	1.486533	-0.018696	-0.499399
2.739010	0.300270	0.245169	0.212323	-1.620889	-1.517777	1.507673	-0.012149	-0.499639
2.766010	0.200624	0.163809	0.141863	-1.605066	-1.510025	1.528473	-0.005251	-0.499791
2.791010	0.103655	0.084634	0.073295	-1.588876	-1.501259	1.548871	0.001913	-0.499842
2.816010	0.001027	0.000838	0.000726	-1.570979	-1.490766	1.570579	0.009933	-0.499772

ตารางที่ จ.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n=3$
อัตราส่วน $\gamma=1$ และ $\alpha=0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	2.847242	2.172852	1.793650	-0.005303	0.000000	0.005303	0.499995	-0.002121
1.001010	6.127119	4.675867	3.859843	-0.053309	-0.000086	0.053245	0.499495	-0.021323
1.003010	7.309029	5.577833	4.604400	-0.092069	-0.000442	0.091738	0.498492	-0.036826
1.006010	8.133342	6.206902	5.123684	-0.130181	-0.001244	0.129250	0.496984	-0.052069
1.013010	9.072702	6.923767	5.715444	-0.191824	-0.003937	0.188879	0.493444	-0.076713
1.032010	10.010572	7.639496	6.306265	-0.302095	-0.014948	0.290963	0.483692	-0.120732
1.065010	10.332148	7.884905	6.508846	-0.433407	-0.042108	0.402278	0.466263	-0.172845
1.118010	10.009727	7.638852	6.305733	-0.589822	-0.098855	0.517631	0.437055	-0.233868
1.205010	9.006521	6.873262	5.673753	-0.788754	-0.212781	0.636602	0.386309	-0.307996
1.290010	8.004147	6.108307	5.042297	-0.949138	-0.338552	0.712220	0.334221	-0.362851
1.386010	7.001614	5.343232	4.410741	-1.106086	-0.489686	0.772024	0.273810	-0.410201
1.501010	6.004733	4.582469	3.782745	-1.269511	-0.675331	0.823228	0.201594	-0.450640
1.649010	5.003099	3.818079	3.151755	-1.447432	-0.909692	0.871377	0.113437	-0.481650
1.853010	4.002428	3.054424	2.521371	-1.639067	-1.201904	0.923529	0.009618	-0.496496
2.155010	3.002006	2.290959	1.891145	-1.818380	-1.527796	0.996666	-0.093855	-0.489581
2.586010	2.000286	1.526504	1.260101	-1.895564	-1.754135	1.122703	-0.145972	-0.477846
3.071010	1.001127	0.764003	0.630671	-1.796142	-1.745646	1.320413	-0.106784	-0.488418
3.117010	0.900008	0.686835	0.566969	-1.777466	-1.732716	1.343992	-0.098210	-0.490224
3.161010	0.800436	0.610847	0.504243	-1.757892	-1.718286	1.367720	-0.089104	-0.491968
3.203010	0.702131	0.535826	0.442315	-1.737516	-1.702523	1.391599	-0.079518	-0.493614
3.244010	0.602331	0.459665	0.379445	-1.715869	-1.685113	1.416254	-0.069235	-0.495166
3.284010	0.500393	0.381871	0.315228	-1.692870	-1.666014	1.441813	-0.058217	-0.496586
3.321010	0.401039	0.306050	0.252639	-1.669701	-1.646258	1.467035	-0.047037	-0.497773
3.356010	0.301385	0.229999	0.189860	-1.645824	-1.625450	1.492585	-0.035446	-0.498735
3.389010	0.200968	0.153367	0.126602	-1.621225	-1.603613	1.518527	-0.023444	-0.499445
3.419010	0.102648	0.078335	0.064664	-1.596719	-1.581516	1.544061	-0.011440	-0.499865
3.447010	0.002948	0.002250	0.001857	-1.571545	-1.558512	1.570028	0.000929	-0.499996

ตารางที่ จ.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 4$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	4.270319	3.150590	2.539147	-0.005138	0.000000	0.005138	0.499995	-0.002141
1.001010	7.583339	5.594896	4.509080	-0.051652	-0.000087	0.051582	0.499495	-0.021520
1.002010	8.242930	6.081535	4.901276	-0.072886	-0.000244	0.072691	0.498994	-0.030365
1.005010	9.167661	6.763790	5.451124	-0.115166	-0.000956	0.114401	0.497487	-0.047970
1.012010	10.042576	7.409291	5.971351	-0.178654	-0.003528	0.175837	0.493947	-0.074378
1.052010	10.915158	8.053072	6.490192	-0.375792	-0.030779	0.351383	0.473109	-0.155844
1.148010	10.007317	7.383278	5.950386	-0.649241	-0.137757	0.541817	0.419120	-0.264951
1.226010	9.007887	6.645910	5.356121	-0.816309	-0.247051	0.626394	0.371677	-0.326690
1.312010	8.001929	5.903727	4.757975	-0.975489	-0.380535	0.687704	0.316538	-0.379735
1.413010	7.000621	5.164973	4.162594	-1.141301	-0.547418	0.735427	0.249453	-0.426835
1.539010	6.000348	4.426985	3.567828	-1.324688	-0.762020	0.773828	0.165174	-0.466590
1.707010	5.003947	3.691852	2.975365	-1.534990	-1.043575	0.805953	0.058383	-0.492718
1.957010	4.002742	2.953175	2.380045	-1.778448	-1.414619	0.839296	-0.072889	-0.492540
2.364010	3.001583	2.214531	1.784752	-2.001716	-1.812394	0.900604	-0.194191	-0.460135
2.953010	2.000519	1.475958	1.189515	-2.038822	-1.977528	1.040700	-0.220966	-0.448458
3.599010	1.000032	0.737811	0.594622	-1.860879	-1.847671	1.272961	-0.141960	-0.479421
3.659010	0.900172	0.664136	0.535245	-1.835178	-1.824128	1.300514	-0.129767	-0.482865
3.717010	0.800528	0.590620	0.475997	-1.808526	-1.799329	1.328657	-0.117003	-0.486116
3.773010	0.700587	0.516885	0.416572	-1.780890	-1.773285	1.357482	-0.103656	-0.489137
3.826010	0.601656	0.443894	0.357747	-1.752747	-1.746483	1.386550	-0.089961	-0.491840
3.877010	0.501297	0.369851	0.298073	-1.723506	-1.718395	1.416516	-0.075637	-0.494245
3.925010	0.400801	0.295706	0.238318	-1.693635	-1.689496	1.446935	-0.060922	-0.496274
3.969010	0.301865	0.222712	0.179490	-1.663757	-1.660419	1.477212	-0.046136	-0.497867
4.010010	0.201765	0.148860	0.119970	-1.633160	-1.630496	1.508099	-0.030940	-0.499042
4.047010	0.102409	0.075556	0.060893	-1.602530	-1.600420	1.538928	-0.015689	-0.499754
4.081010	0.000369	0.000272	0.000219	-1.570911	-1.569265	1.570681	0.000080	-0.500000

ตารางที่ จ.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 0.85$ อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.75$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.055552	0.059673	0.062781	-0.005533	0.004221	0.007473	0.749995	-0.001583
1.002010	1.240908	1.332952	1.402370	-0.078444	0.059440	0.105724	0.749022	-0.022519
1.005010	2.081805	2.236222	2.352680	-0.123834	0.092889	0.166393	0.747568	-0.035728
1.010010	3.027257	3.251803	3.421151	-0.175014	0.129081	0.233986	0.745154	-0.050910
1.018010	4.061951	4.363245	4.590475	-0.234697	0.168479	0.311315	0.741317	-0.069144
1.029010	5.017504	5.389676	5.670361	-0.297776	0.205925	0.390820	0.736083	-0.089197
1.048010	6.012992	6.459004	6.795377	-0.382881	0.248118	0.493708	0.727131	-0.117783
1.111010	6.922141	7.435589	7.822821	-0.581321	0.301533	0.710585	0.697732	-0.192391
1.225010	6.006778	6.452329	6.788354	-0.824883	0.270511	0.931227	0.643318	-0.299440
1.308010	5.008696	5.380214	5.660406	-0.961530	0.205337	1.036486	0.601715	-0.365709
1.397010	4.008527	4.305858	4.530100	-1.085375	0.116333	1.124117	0.555281	-0.428426
1.502010	3.006338	3.229332	3.397510	-1.208759	0.002357	1.208063	0.498913	-0.492378
1.635010	2.005439	2.154192	2.266378	-1.336178	0.161796	1.297652	0.427333	-0.558886
1.819010	1.003070	1.077472	1.133585	-1.466497	0.381467	1.407651	0.334164	-0.626849
1.842010	0.901297	0.968150	1.018570	-1.479297	0.408021	1.420966	0.323401	-0.633593
1.865010	0.803713	0.863328	0.908289	-1.491346	0.434275	1.434264	0.312890	-0.639985
1.890010	0.702061	0.754136	0.793411	-1.503595	0.462441	1.448723	0.301773	-0.646545
1.916010	0.600857	0.645425	0.679038	-1.515401	0.491291	1.463793	0.290571	-0.652956
1.943010	0.500186	0.537287	0.565268	-1.526657	0.520739	1.479516	0.279352	-0.659187
1.971010	0.400168	0.429851	0.452236	-1.537251	0.550689	1.495927	0.268190	-0.665209
2.006010	0.280750	0.301574	0.317280	-1.548946	0.587225	1.516646	0.254955	-0.672138
2.037010	0.179530	0.192846	0.202889	-1.557859	0.618698	1.535247	0.243941	-0.677750
2.065010	0.091281	0.098052	0.103158	-1.564729	0.646367	1.552298	0.234599	-0.682417
2.088010	0.020737	0.022275	0.023435	-1.569521	0.668534	1.566515	0.227379	-0.685979

ตารางที่ จ.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n=1$
อัตราส่วน $\gamma=1$ และ $\alpha=0.75$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000			-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.136440			-0.005330	0.004264	0.007462	0.749995	-0.001599
1.003010	2.322619			-0.092473	0.073222	0.129028	0.748566	-0.027878
1.006010	3.220731			-0.130668	0.102412	0.181719	0.747141	-0.039583
1.010010	4.054478			-0.168637	0.130377	0.233495	0.745248	-0.051407
1.017010	5.063466			-0.219835	0.165939	0.302086	0.741952	-0.067734
1.027010	6.009437			-0.277030	0.202063	0.376661	0.737273	-0.086611
1.046010	7.027013			-0.361609	0.247018	0.482165	0.728458	-0.116004
1.098010	7.761752			-0.527987	0.300094	0.670141	0.704508	-0.179793
1.189010	7.001245			-0.733505	0.293341	0.864539	0.661824	-0.269836
1.264010	6.008760			-0.866428	0.245671	0.970296	0.625048	-0.333778
1.343010	5.000443			-0.985730	0.174430	1.054828	0.584554	-0.393942
1.432010	4.007371			-1.101708	0.079159	1.130551	0.537106	-0.453993
1.542010	3.000609			-1.223631	0.050593	1.207304	0.476908	-0.517712
1.684010	2.003516			-1.351339	0.225631	1.291586	0.399605	-0.583915
1.886010	1.001350			-1.481686	0.469115	1.400441	0.298705	-0.650382
1.911010	0.901539			-1.493846	0.497806	1.413762	0.287485	-0.656637
1.937010	0.802076			-1.505584	0.527179	1.427674	0.276190	-0.662734
1.964010	0.703083			-1.516793	0.557141	1.442211	0.264889	-0.668644
1.993010	0.601187			-1.527722	0.588669	1.457961	0.253265	-0.674535
2.023010	0.500116			-1.537816	0.620524	1.474442	0.241832	-0.680156
2.053010	0.402960			-1.546670	0.651561	1.491155	0.231036	-0.685322
2.086010	0.300027			-1.554966	0.684703	1.509861	0.219937	-0.690507
2.119010	0.200599			-1.561729	0.716744	1.528967	0.209696	-0.695204
2.153010	0.101152			-1.567061	0.748544	1.549144	0.200096	-0.699562
2.188010	0.001215			-1.570762	0.779929	1.570529	0.191283	-0.703569

ตารางที่ จ.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 2$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.75$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	1.711884	1.397747	1.210485	-0.004472	0.004472	0.007453	0.749996	-0.001677
1.001010	5.398058	4.407496	3.817004	-0.044952	0.044788	0.074802	0.749567	-0.016879
1.002010	6.377444	5.207161	4.509534	-0.063425	0.062965	0.105377	0.749139	-0.023846
1.003010	7.017575	5.729826	4.962175	-0.077628	0.076787	0.128774	0.748711	-0.029224
1.006010	8.211097	6.704333	5.806123	-0.109747	0.107387	0.181211	0.747429	-0.041474
1.010010	9.135675	7.459247	6.459898	-0.141732	0.136692	0.232589	0.745721	-0.053829
1.017010	10.063178	8.216550	7.115741	-0.184978	0.173941	0.300349	0.742739	-0.070850
1.034010	11.001497	8.982685	7.779233	-0.262317	0.231942	0.415357	0.735515	-0.102427
1.055010	11.242564	9.179515	7.949693	-0.334804	0.274260	0.514573	0.726584	-0.133579
1.083010	11.012647	8.991788	7.787117	-0.413218	0.305331	0.611540	0.714585	-0.169112
1.139010	10.000676	8.165518	7.071546	-0.539651	0.321977	0.744819	0.689964	-0.230292
1.189010	9.001839	7.349971	6.365261	-0.634159	0.308197	0.827012	0.666997	-0.278705
1.242010	8.015025	6.544240	5.667478	-0.723101	0.276149	0.892418	0.641458	-0.325807
1.303010	7.012950	5.726050	4.958905	-0.815609	0.224673	0.949981	0.610474	-0.375767
1.375010	6.008567	4.905975	4.248699	-0.914785	0.150435	1.001975	0.571783	-0.429650
1.463010	5.002943	4.084886	3.537615	-1.024526	0.046625	1.050451	0.521759	-0.488606
1.574010	4.005949	3.270844	2.832634	-1.148062	0.096930	1.097180	0.455533	-0.552590
1.725010	3.000805	2.450147	2.121889	-1.292529	0.302940	1.146954	0.363323	-0.621671
1.947010	2.000937	1.633758	1.414876	-1.458174	0.603431	1.209925	0.234687	-0.688865
2.315010	1.000059	0.816545	0.707149	-1.612311	1.021053	1.324132	0.078937	-0.735187
2.363010	0.900181	0.734995	0.636524	-1.621471	1.063979	1.341678	0.066011	-0.737645
2.412010	0.801902	0.654750	0.567031	-1.628209	1.104593	1.360485	0.054798	-0.739678
2.569010	0.500979	0.409048	0.354246	-1.631536	1.211773	1.428143	0.033078	-0.743942
2.622010	0.400259	0.326810	0.283026	-1.626022	1.239643	1.454143	0.030967	-0.744848
2.673010	0.301624	0.246275	0.213280	-1.617237	1.262247	1.481090	0.031665	-0.745524
2.723010	0.201768	0.164743	0.142671	-1.605000	1.280172	1.509709	0.035171	-0.745987
2.771010	0.101183	0.082615	0.071547	-1.589443	1.293141	1.539694	0.041465	-0.746200
2.816010	0.000563	0.000460	0.000398	-1.570910	1.301143	1.570621	0.050357	-0.746107

ตารางที่ จ.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 3$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.75$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	3.900473	2.976618	2.457144	-0.004027	0.004602	0.007478	0.749996	-0.001726
1.001010	8.375750	6.391894	5.276392	-0.040478	0.046085	0.075035	0.749599	-0.017367
1.002010	9.347519	7.133492	5.888568	-0.057119	0.064787	0.105689	0.749202	-0.024533
1.004010	10.385558	7.925664	6.542492	-0.080725	0.090875	0.148824	0.748408	-0.034745
1.006010	11.002436	8.396430	6.931100	-0.098882	0.110482	0.181640	0.747614	-0.042650
1.013010	12.100552	9.234450	7.622870	-0.145777	0.158649	0.264440	0.744836	-0.063330
1.038010	12.908457	9.850997	8.131819	-0.250945	0.248637	0.435924	0.734883	-0.111606
1.091010	12.020620	9.173450	7.572516	-0.394062	0.319311	0.628830	0.713308	-0.182491
1.132010	11.012984	8.404480	6.937745	-0.479848	0.331063	0.720940	0.695893	-0.227755
1.174010	10.020425	7.647015	6.312472	-0.556946	0.323150	0.789893	0.677220	-0.269834
1.222010	9.000770	6.868873	5.670130	-0.636625	0.298220	0.849016	0.654728	-0.314277
1.276010	8.005983	6.109709	5.043454	-0.718896	0.256441	0.898957	0.627886	-0.360672
1.340010	7.010587	5.350079	4.416393	-0.809147	0.193936	0.942939	0.593957	-0.411495
1.419010	6.004110	4.581994	3.782352	-0.912422	0.103391	0.982129	0.549071	-0.468612
1.518010	5.006760	3.820873	3.154061	-1.031895	0.024080	1.016149	0.488724	-0.531863
1.650010	4.004616	3.056094	2.522750	-1.176767	0.208901	1.046045	0.403071	-0.602032
1.839010	3.004198	2.292632	1.892526	-1.357781	0.486022	1.073801	0.276688	-0.674884
2.152010	2.002264	1.528013	1.261347	-1.587452	0.924471	1.111857	0.085933	-0.733150
2.763010	1.000500	0.763524	0.630275	-1.773656	1.480475	1.237594	-0.107417	-0.739948
2.842010	0.900486	0.687200	0.567271	-1.773593	1.515914	1.262083	-0.112715	-0.739688
2.921010	0.801044	0.611311	0.504626	-1.768255	1.543186	1.288970	-0.113665	-0.739969
3.000010	0.700687	0.534724	0.441405	-1.757597	1.562420	1.318519	-0.110258	-0.740823
3.077010	0.600478	0.458250	0.378277	-1.741935	1.573472	1.350230	-0.102648	-0.742178
3.151010	0.500327	0.381821	0.315186	-1.721686	1.576841	1.383865	-0.091140	-0.743878
3.221010	0.400307	0.305491	0.252177	-1.697388	1.573218	1.419112	-0.076142	-0.745712
3.286010	0.300725	0.229496	0.189445	-1.669713	1.563461	1.455554	-0.058166	-0.747439
3.346010	0.200521	0.153026	0.126320	-1.638935	1.548287	1.493284	-0.037479	-0.748844
3.400010	0.100398	0.076618	0.063247	-1.605821	1.528602	1.531748	-0.014681	-0.749697
3.447010	0.001780	0.001358	0.001121	-1.571430	1.505581	1.570102	0.009401	-0.749825

ตารางที่ จ.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 3$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	2.847242	2.172852	1.793650	-0.005303	0.000000	0.005303	0.499995	-0.002121
1.001010	6.127119	4.675867	3.859843	-0.053309	-0.000086	0.053245	0.499495	-0.021323
1.003010	7.309029	5.577833	4.604400	-0.092069	-0.000442	0.091738	0.498492	-0.036826
1.006010	8.133342	6.206902	5.123684	-0.130181	-0.001244	0.129250	0.496984	-0.052069
1.013010	9.072702	6.923767	5.715444	-0.191824	-0.003937	0.188879	0.493444	-0.076713
1.032010	10.010572	7.639496	6.306265	-0.302095	-0.014948	0.290963	0.483692	-0.120732
1.065010	10.332148	7.884905	6.508846	-0.433407	-0.042108	0.402278	0.466263	-0.172845
1.118010	10.009727	7.638852	6.305733	-0.589822	-0.098855	0.517631	0.437055	-0.233868
1.205010	9.006521	6.873262	5.673753	-0.788754	-0.212781	0.636602	0.386309	-0.307996
1.290010	8.004147	6.108307	5.042297	-0.949138	-0.338552	0.712220	0.334221	-0.362851
1.386010	7.001614	5.343232	4.410741	-1.106086	-0.489686	0.772024	0.273810	-0.410201
1.501010	6.004733	4.582469	3.782745	-1.269511	-0.675331	0.823228	0.201594	-0.450640
1.649010	5.003099	3.818079	3.151755	-1.447432	-0.909692	0.871377	0.113437	-0.481650
1.853010	4.002428	3.054424	2.521371	-1.639067	-1.201904	0.923529	0.009618	-0.496496
2.155010	3.002006	2.290959	1.891145	-1.818380	-1.527796	0.996666	-0.093855	-0.489581
2.586010	2.000286	1.526504	1.260101	-1.895564	-1.754135	1.122703	-0.145972	-0.477846
3.071010	1.001127	0.764003	0.630671	-1.796142	-1.745646	1.320413	-0.106784	-0.488418
3.117010	0.900008	0.686835	0.566969	-1.777466	-1.732716	1.343992	-0.098210	-0.490224
3.161010	0.800436	0.610847	0.504243	-1.757892	-1.718286	1.367720	-0.089104	-0.491968
3.203010	0.702131	0.535826	0.442315	-1.737516	-1.702523	1.391599	-0.079518	-0.493614
3.244010	0.602331	0.459665	0.379445	-1.715869	-1.685113	1.416254	-0.069235	-0.495166
3.284010	0.500393	0.381871	0.315228	-1.692870	-1.666014	1.441813	-0.058217	-0.496586
3.321010	0.401039	0.306050	0.252639	-1.669701	-1.646258	1.467035	-0.047037	-0.497773
3.356010	0.301385	0.229999	0.189860	-1.645824	-1.625450	1.492585	-0.035446	-0.498735
3.389010	0.200968	0.153367	0.126602	-1.621225	-1.603613	1.518527	-0.023444	-0.499445
3.419010	0.102648	0.078335	0.064664	-1.596719	-1.581516	1.544061	-0.011440	-0.499865
3.434010	0.050337	0.038414	0.031710	-1.583545	-1.569513	1.557680	-0.004971	-0.499972
3.447010	0.002948	0.002250	0.001857	-1.571545	-1.558512	1.570028	0.000929	-0.499996

ตารางที่ จ.16 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 3$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000001	2.657488	2.028043	1.674112	-0.002365	-0.001455	0.001273	0.249999	-0.000546
1.000003	3.191462	2.435541	2.010495	-0.004096	-0.002521	0.002205	0.249998	-0.000945
1.000012	4.020916	3.068533	2.533018	-0.008192	-0.005041	0.004411	0.249993	-0.001890
1.000045	5.011497	3.824488	3.157045	-0.015863	-0.009762	0.008541	0.249973	-0.003661
1.000133	6.002456	4.580731	3.781310	-0.027272	-0.016785	0.014683	0.249920	-0.006293
1.000336	7.002119	5.343617	4.411059	-0.043347	-0.026686	0.023335	0.249797	-0.010001
1.000752	8.001517	6.106300	5.040640	-0.064851	-0.039943	0.034899	0.249547	-0.014958
1.002001	9.395069	7.169780	5.918523	-0.105797	-0.065255	0.056876	0.248794	-0.024382
1.003001	10.031097	7.655160	6.319195	-0.129574	-0.080011	0.069603	0.248191	-0.029841
1.006001	11.190511	8.539959	7.049580	-0.183274	-0.113556	0.098214	0.246382	-0.042123
1.010001	12.086200	9.223497	7.613829	-0.236672	-0.147299	0.126427	0.243971	-0.054248
1.017001	13.018336	9.934849	8.201037	-0.308738	-0.193642	0.164020	0.239752	-0.070428
1.032001	14.039194	10.713910	8.844138	-0.424021	-0.270259	0.222679	0.230722	-0.095720
1.090001	14.925349	11.390173	9.402381	-0.713202	-0.481036	0.359220	0.196084	-0.154310
1.205001	14.005827	10.688446	8.823118	-1.076962	-0.795459	0.506034	0.130343	-0.212505
1.288001	13.008401	9.927268	8.194779	-1.271144	-0.988868	0.574283	0.086923	-0.233645
1.374001	12.001256	9.158672	7.560317	-1.436343	-1.167938	0.628928	0.046648	-0.244956
1.468001	11.000236	8.394752	6.929715	-1.584556	-1.340146	0.677554	0.008769	-0.249314
1.574001	10.006452	7.636352	6.303670	-1.718234	-1.505270	0.724096	-0.026115	-0.248227
1.698001	9.000726	6.868839	5.670102	-1.836869	-1.660734	0.772238	-0.057134	-0.243100
1.841001	8.002078	6.106729	5.040994	-1.932021	-1.794017	0.823528	-0.081810	-0.236056
2.006001	7.002474	5.343888	4.411282	-1.997838	-1.895906	0.880632	-0.098848	-0.229528
2.193001	6.004189	4.582054	3.782402	-2.029223	-1.958361	0.945534	-0.107427	-0.225693
2.401001	5.004333	3.819021	3.152533	-2.024514	-1.978386	1.020382	-0.107492	-0.225690
2.626001	4.002466	3.054454	2.521396	-1.984758	-1.956926	1.107003	-0.099282	-0.229433
2.859001	3.001930	2.290902	1.891098	-1.913449	-1.898155	1.206334	-0.083275	-0.235721
3.086001	2.003600	1.529033	1.262189	-1.815959	-1.808563	1.318241	-0.060320	-0.242613
3.289001	1.003083	0.765496	0.631903	-1.698881	-1.695952	1.441197	-0.031788	-0.247971
3.375001	0.502123	0.383192	0.316318	-1.635664	-1.634024	1.505500	-0.016124	-0.249479
3.447001	0.006113	0.004665	0.003851	-1.571591	-1.570772	1.570000	-0.000158	-0.250000

ตารางที่ จ.17 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลุดวิกชนิด Bi-modulus ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 0.50$

α	\bar{P}_{CR}						Remark	
	$n = 0.85$			$n = 2$				
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$		$\bar{h} = 2\bar{b}$
0.1	15.371992	16.512205	17.372130	16.723655	21.291183	17.384179	15.055140	$E_c = 1$
0.15	10.406654	11.178565	11.760724	11.330196	14.495697	11.835687	10.250005	$E_t = 2$
0.2	7.977150	8.568853	9.015103	8.693888	11.191730	9.138009	7.913748	
0.25	6.566011	7.053043	7.420353	7.164805	9.288195	7.583780	6.567746	
0.3	5.668622	6.089091	6.406199	6.194358	8.090692	6.606022	5.720983	
0.35	5.070072	5.446144	5.729769	5.549028	7.304579	5.964164	5.165118	
0.4	4.664531	5.010522	5.271461	5.113949	6.785975	5.540725	4.798409	
0.45	4.395258	4.721275	4.967150	4.827705	6.458956	5.273715	4.567171	
0.50	4.230769	4.544585	4.781259	4.656500	6.283209	5.130219	4.442900	
0.55	4.154597	4.462763	4.695176	4.582947	6.240183	5.095088	4.412476	
0.60	4.160612	4.469224	4.701973	4.601347	6.327727	5.166567	4.474379	
0.65	4.251953	4.567340	4.805199	4.716502	6.559982	5.356203	4.638608	
0.70	4.442418	4.771933	5.020446	4.945910	6.973106	5.693517	4.930730	
0.75	4.762029	5.115251	5.381644	5.326824	7.640376	6.238341	5.402562	
0.80	5.271194	5.662183	5.957060	5.934421	8.711571	7.112968	6.160011	
0.85	6.099781	6.552231	6.893459	6.932582	10.527629	8.595773	7.444158	
0.90	7.580448	8.142725	8.566783	8.752022	14.051122	11.472693	9.935643	

ตารางที่ จ.18 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลวดวิคชนิด Bi-modulus ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 1$

α	\bar{P}_{CR}							Remark
	$n = 0.85$			$n = 2$				
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	
0.1	15.37199	16.5122	17.37213	16.72366	31.32928	25.58025	22.15315	$E_c = 1$
0.15	10.40665	11.17857	11.76072	11.3302	21.32994	17.41583	15.08255	$E_t = 1$
0.2	7.97715	8.568853	9.015103	8.693888	16.46827	13.44628	11.64482	
0.25	6.566011	7.053043	7.420353	7.164805	13.66728	11.15928	9.664224	
0.3	5.668622	6.089091	6.406199	6.194358	11.90519	9.720546	8.41824	
0.35	5.070072	5.446144	5.729769	5.549028	10.74845	8.776073	7.600302	
0.4	4.664531	5.010522	5.271461	5.113949	9.98534	8.152996	7.060702	
0.45	4.395258	4.721275	4.96715	4.827705	9.504143	7.7601	6.720444	
0.50	4.230769	4.544585	4.781259	4.6565	9.245538	7.54895	6.537582	
0.55	4.154597	4.462763	4.695176	4.582947	9.182226	7.497256	6.492814	
0.60	4.160612	4.469224	4.701973	4.601347	9.311043	7.602435	6.583902	
0.65	4.251953	4.56734	4.805199	4.716502	9.652799	7.881477	6.82556	
0.70	4.442418	4.771933	5.020446	4.94591	10.2607	8.377824	7.255409	
0.75	4.762029	5.115251	5.381644	5.326824	11.24256	9.179515	7.949693	
0.80	5.271194	5.662183	5.95706	5.934421	12.81879	10.4665	9.064255	
0.85	6.099781	6.552231	6.893459	6.932582	15.49106	12.6484	10.95384	
0.90	7.580448	8.142725	8.566783	8.752022	20.67577	16.88169	14.61997	

ตารางที่ จ.19 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลวดวิคชนิด Bi-modulus ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 อัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อสูงและอัตราส่วน $\gamma = 2$

α	\bar{P}_{CR}						Remark	
	$n = 0.85$			$n = 2$				
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$		$\bar{h} = 2\bar{b}$
0.1	30.743983	33.024410	34.744261	33.447311	42.582367	34.768357	30.110280	$E_c = 2$
0.15	20.813309	22.357130	23.521449	22.660392	28.991393	23.671374	20.500011	$E_t = 1$
0.2	15.954300	17.137706	18.030206	17.387776	22.383460	18.276018	15.827496	
0.25	13.132031	14.106096	14.840716	14.329610	18.576391	15.167560	13.135489	
0.3	11.337244	12.178181	12.812399	12.388717	16.181384	13.212045	11.441966	
0.35	10.140145	10.892287	11.459538	11.098055	14.609158	11.928328	10.330235	
0.4	9.329063	10.021043	10.542921	10.227898	13.571950	11.081450	9.596818	
0.45	8.790516	9.442550	9.934300	9.655409	12.917912	10.547431	9.134343	
0.5	8.461546	9.089179	9.562527	9.312999	12.566431	10.260448	8.885808	
0.55	8.309194	8.925526	9.390352	9.165894	12.480367	10.190177	8.824952	
0.6	8.321224	8.938448	9.403947	9.202693	12.655454	10.333135	8.948757	
0.65	8.503905	9.134680	9.610397	9.433005	13.119964	10.712405	9.277215	
0.7	8.884836	9.543866	10.040893	9.891820	13.946211	11.387034	9.861461	
0.75	9.524069	10.230514	10.763301	10.653649	15.280720	12.476655	10.805100	
0.8	10.542388	11.324367	11.914119	11.868841	17.423141	14.225935	12.320021	
0.85	12.199563	13.104462	13.786919	13.865164	21.055258	17.191546	14.888316	
0.9	15.160895	16.285450	17.133567	17.504044	28.102243	22.945385	19.871287	

ตารางที่ จ.20 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 4$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	4.270319	3.150590	2.539147	-0.005138	0.000000	0.005138	0.499995	-0.002141
1.001010	7.583339	5.594896	4.509080	-0.051652	-0.000087	0.051582	0.499495	-0.021520
1.002010	8.242930	6.081535	4.901276	-0.072886	-0.000244	0.072691	0.498994	-0.030365
1.005010	9.167661	6.763790	5.451124	-0.115166	-0.000956	0.114401	0.497487	-0.047970
1.012010	10.042576	7.409291	5.971351	-0.178654	-0.003528	0.175837	0.493947	-0.074378
1.052010	10.915158	8.053072	6.490192	-0.375792	-0.030779	0.351383	0.473109	-0.155844
1.148010	10.007317	7.383278	5.950386	-0.649241	-0.137757	0.541817	0.419120	-0.264951
1.226010	9.007887	6.645910	5.356121	-0.816309	-0.247051	0.626394	0.371677	-0.326690
1.312010	8.001929	5.903727	4.757975	-0.975489	-0.380535	0.687704	0.316538	-0.379735
1.413010	7.000621	5.164973	4.162594	-1.141301	-0.547418	0.735427	0.249453	-0.426835
1.539010	6.000348	4.426985	3.567828	-1.324688	-0.762020	0.773828	0.165174	-0.466590
1.707010	5.003947	3.691852	2.975365	-1.534990	-1.043575	0.805953	0.058383	-0.492718
1.957010	4.002742	2.953175	2.380045	-1.778448	-1.414619	0.839296	-0.072889	-0.492540
2.364010	3.001583	2.214531	1.784752	-2.001716	-1.812394	0.900604	-0.194191	-0.460135
2.953010	2.000519	1.475958	1.189515	-2.038822	-1.977528	1.040700	-0.220966	-0.448458
3.599010	1.000032	0.737811	0.594622	-1.860879	-1.847671	1.272961	-0.141960	-0.479421
3.659010	0.900172	0.664136	0.535245	-1.835178	-1.824128	1.300514	-0.129767	-0.482865
3.717010	0.800528	0.590620	0.475997	-1.808526	-1.799329	1.328657	-0.117003	-0.486116
3.773010	0.700587	0.516885	0.416572	-1.780890	-1.773285	1.357482	-0.103656	-0.489137
3.826010	0.601656	0.443894	0.357747	-1.752747	-1.746483	1.386550	-0.089961	-0.491840
3.877010	0.501297	0.369851	0.298073	-1.723506	-1.718395	1.416516	-0.075637	-0.494245
3.925010	0.400801	0.295706	0.238318	-1.693635	-1.689496	1.446935	-0.060922	-0.496274
3.969010	0.301865	0.222712	0.179490	-1.663757	-1.660419	1.477212	-0.046136	-0.497867
4.010010	0.201765	0.148860	0.119970	-1.633160	-1.630496	1.508099	-0.030940	-0.499042
4.047010	0.102409	0.075556	0.060893	-1.602530	-1.600420	1.538928	-0.015689	-0.499754
4.058010	0.070719	0.052176	0.042050	-1.592723	-1.590767	1.548784	-0.010799	-0.499883
4.064010	0.052935	0.039055	0.031475	-1.587213	-1.585340	1.554318	-0.008052	-0.499935
4.071010	0.031700	0.023388	0.018849	-1.580631	-1.578852	1.560927	-0.004769	-0.499977
4.077010	0.013050	0.009628	0.007760	-1.574846	-1.573147	1.566733	-0.001883	-0.499996
4.081010	0.000369	0.000272	0.000219	-1.570911	-1.569265	1.570681	0.000080	-0.500000

ตารางที่ จ.21 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 4$
อัตราส่วน $\gamma = 1$ และ $\alpha = 0.75$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	5.824887	4.297532	3.463499	-0.003752	0.004690	0.007505	0.749996	-0.001759
1.001010	10.322209	7.615601	6.137622	-0.037725	0.046972	0.075296	0.749621	-0.017700
1.002010	11.196548	8.260678	6.657507	-0.053239	0.066032	0.106047	0.749246	-0.025002
1.004010	12.092148	8.921441	7.190034	-0.075253	0.092617	0.149300	0.748496	-0.035405
1.009010	13.073387	9.645387	7.773482	-0.113013	0.136426	0.221996	0.746617	-0.053406
1.029010	13.843658	10.213684	8.231488	-0.204294	0.228307	0.386085	0.739059	-0.098154
1.073010	13.008960	9.597854	7.735174	-0.329304	0.310431	0.574675	0.722018	-0.163098
1.109010	12.004886	8.857060	7.138148	-0.407503	0.333379	0.669377	0.707468	-0.205898
1.146010	11.010202	8.123194	6.546705	-0.477601	0.336149	0.739917	0.691814	-0.245415
1.187010	10.015319	7.389182	5.955144	-0.547860	0.323532	0.798439	0.673542	-0.285794
1.235010	9.000264	6.640287	5.351589	-0.623547	0.294591	0.849646	0.650836	-0.329744
1.290010	8.012258	5.911348	4.764117	-0.704234	0.248399	0.892833	0.623026	-0.376597
1.358010	7.000762	5.165078	4.162678	-0.797632	0.177875	0.930822	0.586009	-0.430098
1.441010	6.008115	4.432715	3.572446	-0.904613	0.077829	0.961865	0.537071	-0.489340
1.549010	5.006834	3.693981	2.977081	-1.034948	0.067884	0.986211	0.467922	-0.556806
1.697010	4.001702	2.952408	2.379427	-1.200078	0.285285	1.002354	0.365598	-0.631568
1.918010	3.001890	2.214758	1.784934	-1.419332	0.625720	1.009150	0.206421	-0.705258
2.325010	2.000771	1.476145	1.189666	-1.726512	1.205720	1.016316	-0.050996	-0.741784
3.224010	1.000033	0.737812	0.594623	-1.915943	1.791866	1.159196	-0.238984	-0.710521
3.331010	0.900391	0.664298	0.535376	-1.900532	1.799617	1.191047	-0.230804	-0.713350
3.436010	0.800738	0.590775	0.476121	-1.878998	1.797414	1.225739	-0.217725	-0.717537
3.538010	0.700926	0.517135	0.416773	-1.852048	1.786469	1.263029	-0.200254	-0.722666
3.636010	0.600854	0.443303	0.357270	-1.820394	1.767968	1.302668	-0.178888	-0.728287
3.729010	0.500440	0.369219	0.297563	-1.784708	1.743021	1.344404	-0.154109	-0.733954
3.815010	0.400820	0.295720	0.238329	-1.746106	1.713043	1.387447	-0.126734	-0.739188
3.894010	0.300998	0.222072	0.178974	-1.704868	1.678767	1.431906	-0.097017	-0.743682
3.965010	0.201168	0.148419	0.119615	-1.661658	1.641138	1.477382	-0.065497	-0.747125
4.028010	0.100132	0.073876	0.059539	-1.616483	1.600463	1.524112	-0.032253	-0.749300
4.055010	0.051464	0.037970	0.030601	-1.594362	1.580163	1.546776	-0.015898	-0.749827
4.081010	0.000239	0.000176	0.000142	-1.570906	1.558414	1.570685	0.001479	-0.749995

ตารางที่ จ.22 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 0.85$ อัตราส่วน $\gamma = 0.50$ และ $\alpha = 0.25$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.038218	0.041053	0.043191	-0.007473	-0.004221	0.005533	0.249995	-0.001583
1.003010	1.085228	1.165724	1.226433	-0.129568	-0.073440	0.095882	0.248457	-0.027409
1.009010	2.023910	2.174033	2.287252	-0.223883	-0.127746	0.165485	0.245392	-0.047231
1.019010	3.029112	3.253796	3.423247	-0.324494	-0.187179	0.239411	0.240314	-0.068143
1.034010	4.042953	4.342838	4.569005	-0.432586	-0.253494	0.318347	0.232771	-0.090210
1.056010	5.017805	5.389999	5.670701	-0.552347	-0.330874	0.405139	0.221880	-0.113994
1.096010	6.001276	6.446419	6.782137	-0.716220	-0.445183	0.522867	0.202647	-0.144993
1.180010	6.566011	7.053043	7.420353	-0.959173	-0.637353	0.696872	0.164950	-0.186313
1.307010	6.002964	6.448233	6.784045	-1.205708	-0.867712	0.879932	0.115695	-0.220173
1.431010	5.000854	5.371791	5.651544	-1.369537	-1.046947	1.016112	0.076990	-0.236624
1.549010	4.000536	4.297274	4.521069	-1.478427	-1.183471	1.125591	0.048485	-0.244259
1.673010	3.005971	3.228938	3.397095	-1.554832	-1.295211	1.229035	0.026648	-0.247816
1.809010	2.000394	2.148772	2.260676	-1.600868	-1.383333	1.336058	0.011544	-0.249202
1.953010	1.001098	1.075354	1.131356	-1.609226	-1.438548	1.449341	0.005361	-0.249616
1.967010	0.905090	0.972224	1.022856	-1.607721	-1.441755	1.460669	0.005324	-0.249635
1.982010	0.801984	0.861471	0.906335	-1.605610	-1.444738	1.472920	0.005405	-0.249651
1.996010	0.705321	0.757639	0.797095	-1.603151	-1.447084	1.484486	0.005598	-0.249664
2.011010	0.601330	0.645933	0.679572	-1.599992	-1.449127	1.497009	0.005931	-0.249674
2.025010	0.503634	0.540991	0.569164	-1.596528	-1.450576	1.508846	0.006366	-0.249680
2.039010	0.405146	0.435197	0.457861	-1.592539	-1.451567	1.520847	0.006926	-0.249681
2.053010	0.305669	0.328342	0.345442	-1.588001	-1.452081	1.533032	0.007616	-0.249677
2.067010	0.204980	0.220184	0.231651	-1.582879	-1.452097	1.545423	0.008445	-0.249666
2.081010	0.102820	0.110446	0.116198	-1.577136	-1.451589	1.558047	0.009421	-0.249646
2.088010	0.051096	0.054887	0.057745	-1.574018	-1.451129	1.564456	0.009967	-0.249632
2.091010	0.028785	0.030920	0.032530	-1.572629	-1.450888	1.567223	0.010213	-0.249625
2.093010	0.013857	0.014884	0.015659	-1.571684	-1.450713	1.569076	0.010381	-0.249620

ตารางที่ จ.23 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{S}_i , \bar{P} , θ_A , θ_C , θ_B , \bar{x}^* และ \bar{y}^* โดยพิจารณาค่าคงที่ $n = 0.85$ อัตราส่วน $\gamma = 0.50$ และ $\alpha = 0.50$

\bar{S}_i	\bar{P}			θ_A	θ_C	θ_B	\bar{x}^*	\bar{y}^*
	$\bar{h} = \bar{b}$	$\bar{h} = 1.5\bar{b}$	$\bar{h} = 2\bar{b}$					
1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1.000010	0.027386	0.029417	0.030949	-0.006256	0.000000	0.006256	0.499995	-0.002030
1.001010	0.411744	0.442285	0.465319	-0.062869	-0.000082	0.062831	0.499495	-0.020410
1.002010	0.614503	0.660083	0.694459	-0.088685	-0.000231	0.088578	0.498994	-0.028797
1.003010	0.775841	0.833388	0.876790	-0.108520	-0.000423	0.108326	0.498494	-0.035246
1.004010	0.914419	0.982246	1.033399	-0.125249	-0.000649	0.124951	0.497993	-0.040688
1.005010	1.037809	1.114788	1.172845	-0.139989	-0.000906	0.139574	0.497491	-0.045487
1.017010	2.021523	2.171469	2.284555	-0.257764	-0.005597	0.255218	0.491453	-0.083971
1.040010	3.029998	3.254747	3.424248	-0.394745	-0.019720	0.385903	0.479766	-0.129157
1.094010	4.007922	4.305208	4.529416	-0.602640	-0.067342	0.573497	0.451823	-0.198678
1.152010	4.230769	4.544585	4.781259	-0.762204	-0.131118	0.707731	0.421225	-0.252426
1.235010	4.000371	4.297098	4.520883	-0.938614	-0.233974	0.847442	0.376996	-0.311228
1.406010	3.000408	3.222962	3.390808	-1.200204	-0.459406	1.047362	0.288099	-0.393501
1.582010	2.002424	2.150953	2.262970	-1.381535	-0.681960	1.198774	0.206499	-0.443287
1.806010	1.003251	1.077667	1.133790	-1.520836	-0.923558	1.361904	0.126619	-0.475429
1.833010	0.900030	0.966789	1.017138	-1.531629	-0.948658	1.380789	0.119152	-0.477746
1.859010	0.803299	0.862884	0.907821	-1.540856	-0.971932	1.398968	0.112436	-0.479744
1.887010	0.701792	0.753847	0.793106	-1.549518	-0.995992	1.418577	0.105736	-0.481662
1.915010	0.602742	0.647450	0.681168	-1.556856	-1.018989	1.438267	0.099599	-0.483359
1.944010	0.502333	0.539594	0.567695	-1.563046	-1.041660	1.458814	0.093856	-0.484906
1.974010	0.400418	0.430119	0.452518	-1.567920	-1.063854	1.480293	0.088588	-0.486301
2.004010	0.300066	0.322324	0.339110	-1.571207	-1.084737	1.502066	0.084027	-0.487506
2.034010	0.200758	0.215649	0.226880	-1.572852	-1.104267	1.524222	0.080204	-0.488538
2.064010	0.101909	0.109468	0.115169	-1.572779	-1.122398	1.546866	0.077156	-0.489408
2.077010	0.059026	0.063404	0.066706	-1.572185	-1.129804	1.556866	0.076089	-0.489737
2.085010	0.032612	0.035031	0.036856	-1.571648	-1.134224	1.563076	0.075511	-0.489926
2.091010	0.012770	0.013718	0.014432	-1.571156	-1.137468	1.567766	0.075116	-0.490060
2.094010	0.002838	0.003049	0.003208	-1.570882	-1.139068	1.570122	0.074932	-0.490125



เอกสารประกอบการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22

PROCEEDINGS OF THE 22nd NATIONAL CONVENTION ON CIVIL ENGINEERING

“เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”

GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT

VOLUME 1:

วิศวกรรมโครงสร้างและวิศวกรรมการบริหารงานก่อสร้าง

(Structural Engineering & Construction Engineering and Management)

18-20 กรกฎาคม 2560

ณ เดอะกรีนเนอรี รีสอร์ท เขาใหญ่

อำเภอปากช่อง จังหวัดนครราชสีมา

จัดโดย

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

และสมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ผู้สนับสนุนหลักอย่างเป็นทางการ

บริษัท ปูนซีเมนต์นครหลวง จำกัด (มหาชน)



การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒ “เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”

ขอมอบเกียรติบัตรฉบับนี้เพื่อแสดงว่า

ขจรเกียรติ รักษา และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม

ได้เข้าร่วมประชุมและเสนอบทความ

การแอนิเมชันของคานามีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่แข็งเส้น
จำพวกลู่วิกแบบ Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทาง

ระหว่างวันที่ ๑๘ - ๒๐ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ณ เดอะกรีนเนอริ รีสอร์ท อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา

ได้รับการรับรองจากสภาวิศวกรให้มีจำนวนหน่วยพัฒนา ๑๒ หน่วย รหัสกิจกรรม ๓๐๑-๐๑-๒๐๑๑-๐๐/๖๐๐๗-๐๐๔

ศาสตราจารย์ ดร.วิระศิริ

(ดร.วิเนต วิระศิริ)

นายกวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี พ.ศ. ๒๕๖๐-๒๕๖๒

ศาสตราจารย์ เอนก ศิริพานิชกร

(รองศาสตราจารย์ เอนก ศิริพานิชกร)

ประธานกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการ

วิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒

กำหนดการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22

ณ โรงแรม เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่ จังหวัดนครราชสีมา

18 - 20 กรกฎาคม 2560

วันจันทร์ ที่ 17 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
17.00 – 20.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1

วันอังคาร ที่ 18 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
8.00 – 10.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1
10.00 – 10.15 น.	พิธีถวายราชสักการะและน้อมรำลึกในพระมหากรุณาธิคุณพระบาทสมเด็จพระปรมินทรมหาภูมิพลอดุลยเดชฯ**
10.15 – 11.00 น.	พิธีเปิด ณ ห้อง Falcon 1 - กล่าวรายงาน โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิระยุทธ สืบสุข (ประธานคณะกรรมการจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์เอนก ศิริพานิชกร (ประธานคณะกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22 และประธานคณะกรรมการสาขาวิศวกรรมโยธา วสท.) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ศักดิ์ ชรวมโชติ (คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี) - กล่าวเปิดการประชุมฯ โดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี) - พิธีมอบโล่ให้ผู้สนับสนุนการประชุมโดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี)
11.00 – 12.00 น.	การบรรยายพิเศษ เรื่อง " วิศวกรรมโยธามาตามแนวทางพระราชดำริ " โดย รองศาสตราจารย์ ดร.กาญจนา จันทร์ทางสุ
12.00 – 13.00 น.	พักรับประทานอาหารกลางวัน
13.00 - 13.45 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.เป็นหนึ่ง วานิชชัย (สถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย) ณ ห้องประชุม Falcon 1
13.00 - 15.00 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ ช่วงที่ 1
15.00 – 15.15 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
15.15 – 16.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สมนึก ตั้งเต็มศิริกุล (สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยรามคำแหง) ณ ห้องประชุม Falcon 1
15.15 – 16.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย รองศาสตราจารย์ เกษม เพชรเกตุ (บริษัท เกษมดีไซน์ จำกัด) ณ ห้องประชุม Falcon 2
15.15 – 17.15 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ ช่วงที่ 2
18.00 – 22.00 น.	งานเลี้ยงต้อนรับ ณ ห้องเลี้ยงรับรอง KYCC Grand Ballroom

** ในพิธีถวายราชสักการะ ขอความร่วมมือในการแต่งกาย

สุภาพบุรุษ : ขอความกรุณาสวมเสื้อมีปกสีขาวหรือดำ กางเกงขายาวสีด้า (งดเว้นกางเกงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีด้า

สุภาพสตรี : ขอความกรุณาสวมชุดสุภาพสีด้า มีแขน ไม่รัดรูป กระโปรงยาวคลุมเข่าหรือผ้าถุง (งดเว้นกระโปรงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีด้า

วันพุธ ที่ 19 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
9.00 – 9.45 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ ลิ้มคดี (มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์) ณ ห้องประชุม Falcon 1
9.00 – 9.45 น.	การบรรยายพิเศษ โดย รองศาสตราจารย์ ดร.พนกฤษณ คลังบุญครอง (มหาวิทยาลัยขอนแก่น) ณ ห้องประชุม Falcon 2
8.00 – 10.00 น.	การนำเสนอความวิชาการ ช่วงที่ 3
10.00 – 10.15 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
10.15 – 11.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.ชัยยุทธ ชินณะราศรี (มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี) ณ ห้องประชุม Falcon 1
10.45 – 12.15 น.	การบรรยายพิเศษ Newton Fund – Low Carbon Cement and Concrete in Modern Construction Industry ณ ห้องประชุม Falcon 2
10.15 – 12.15 น.	การนำเสนอความวิชาการ ช่วงที่ 4
12.15 – 13.15 น.	พักรับประทานอาหารกลางวัน
13.15 – 14.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สุชนัด หอพิบูลสุข (มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี) ณ ห้องประชุม Falcon 1
13.15 – 14.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุเชษฐ์ ประวีณวงศ์วุฒิ (สถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย) ณ ห้องประชุม Falcon 2
13.15 – 15.15 น.	การนำเสนอความวิชาการ ช่วงที่ 5
15.15 – 15.30 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
15.30 – 17.30 น.	การนำเสนอความวิชาการ ช่วงที่ 6

วันพฤหัสบดีที่ 20 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
8.00 – 16.30 น.	ศึกษาดูงาน ห้องเที่ยวเชิงอนุรักษ์ธรรมชาติ อุทยานแห่งชาติเขาใหญ่ อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา



STR475	การศึกษาความต้านทานต่อแรงแผ่นดินไหวของอาคารสูงไม่เกิน 15 เมตร A Study of Earthquake Resistance of the Building with Less Than 15 Meters Height สรวิชัย บัวสี, วุฒิชัย สหะมา, ธนากร เขียวเหลือง และ ชูชัย สุจิรวกุล	421
STR478	การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่เชิงเส้นจำพวกลูควิกแบบ Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทาง Large Deflection of Variable – Arc – Length Beam Made from Bi-Modulus Nonlinear Material Obeying Ludwick's Law under Follower Load ชจรเกียรติ รักษา และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม	429
STR482	Displacement-Based Formulation of Beam Element on Kerr-Type Foundation S. Limkatanyu, P. Ponbunyanon, W. Sae-Long and A. Sangkeaw	439
STR489	การตรวจวัดความถี่ธรรมชาติและการประเมินแรงดึงของลวดอัดแรงภายนอกของคานสะพานรูปกล่อง ชิ้นส่วนสำเร็จ Measurement of Natural Frequencies and Tension Estimation of External Tendon in Segment Bridge Box Girder ธนโรจน์ วัฒนสุขสกุล	446
STR500	การออกแบบเบื้องต้นสำหรับอาคารสูงภายใต้แรงลม Preliminary design of Highrise buildings subject to wind load พิชัยยุทธ ศิริพรหมพิศาล, ภวรินทร์ ฤทธิธรรพ์ และ วุฒิชัย สมิตขาก	453

CEM บทความสาขาวิศวกรรมการบริหารงานก่อสร้าง

CEM004	การศึกษาปัจจัยที่มีผลกระทบต่อความพึงพอใจของลูกค้าโครงการ อี พี ซี (งานวิศวกรรม งานจัดซื้อจัด จ้าง และ งานก่อสร้าง) บีโตร์เคมี ในเขตอุตสาหกรรมมาบตาพุด Study on Factors Affecting to Customer Satisfaction of EPC (Engineering Procurement and Construction) Petrochemical Projects in Map Ta Phut Industrial Zone ภูติส เกิดศรีเสริม, แผลมทอง เหล่าคงถาวร และ ทรงกรด แซ่อึ้ง	459
CEM008	การคาดการณ์ระยะเวลาโครงการก่อสร้างรถไฟฟ้าโดยใช้เทคนิคการจำลองสถานการณ์แบบมอนติคาร์ โล Forecasting Project Duration of Mass Rapid Transit Construction using Monte Carlo Simulation อัทญา รัตนปัญญา และ ศุภวุฒิ มาลัยกฤษณะชัย	466
CEM010	ความคิดเห็นเกี่ยวกับแบบจำลองความสามารถในการแข่งขันของผู้ทำสัญญาของวิศวกรรุ่นใหม่ใน อุตสาหกรรมก่อสร้าง The Perceptions about Covenanter Competitiveness Model (CCM) of Young Professional Engineers in the Construction Industry นันทนัช จินตพิทักษ์	477
CEM016	ปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อระยะเวลาการอนุมัติแบบสำหรับใช้ก่อสร้างกรณีศึกษาโครงการก่อสร้างระบบ รถไฟฟ้าชานเมืองสายสีแดงช่วงบางซื่อ – รังสิต Factors affecting the approval time of shop drawings: Case study in the red line commuter train system project Bang sue - Rangsit เม็ญจภรณ์ เจริญชัยพัฒน์, กนกพ วัฒนา และ สมิตร์ ส่งพิริยะกิจ	485
CEM021	ปัจจัยที่ส่งผลต่อความล่าช้าในโครงการก่อสร้างของการท่าเรือแห่งประเทศไทย The Study of Factors Affected in Construction Delays in Port Authority of Thailand สิทธิโชค สุนทรโสภาส และ ธีรนนท์ ปริงทอง	491





การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่ทำจากวัสดุที่ไม่เชิงเส้น
จำพวกลูกศรแบบ Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำที่เปลี่ยนแปลงทิศทางการเสียรูปของคาน

Large Deflection of Variable-ARC-Length Beam Made from Bi-Modulus
Nonlinear Material Obeying Ludwick's Law under Follower Load

ขจรเกียรติ รักษา* และ บุญชัย ผ่องไธสง*

^{1,2}มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ถนนรังสิต-นครนายก (คลองหก) ธัญบุรี ปทุมธานี 12110

*Corresponding author; E-mail address: Kha_john_kiat@hotmail.co.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานที่มีคุณสมบัติไม่เชิงเส้นประเภท Bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสียรูปของคานโดยใช้แบบจำลองวัสดุชนิดลูควิก เพื่อหาความสัมพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นของโมเมนต์คดและความโค้ง การสร้างสมการครอบคลุมปัญหาได้จากการพิจารณาสมการของคานและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยของคาน การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการอาศัยระเบียบวิธีกรวยเชิงเส้นการศึกษาแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าคงที่ของวัสดุ n และ อัตราส่วนระหว่าง E_1 / E_2 ที่ต่างกัน มีผลต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคาน ทั้งนี้ได้แสดงผลในรูปแบบกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรง-ระยะการเคลื่อนที่และรูปร่างสมมูลของคาน

คำสำคัญ: การแอ่นตัวมาก, วัสดุ Bi-modulus, วัสดุแบบลูควิก, ภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปของคาน, วิธียิงเป้า

Abstract

This paper presents behavior of a variable-arc-length beam having nonlinear elastic bi-modulus material properties under follower load. The Ludwick's material model have been chosen for developing the moment-curvature relationship of the proposed problem. The governing differential equations are formulated by equilibrium equations, moment-curvature relation, and geometric relations. The shooting method is employed to compute the solutions. From the results, it is found that changes in the nonlinear material constants (n) and ratios of E_1 / E_2 have a significant effect on the large deflection behavior. The effects of these parameters have been explained by load-deflection diagrams and their equilibrium configurations.

Keywords: large deflection, bi-modulus material, Ludwick's material, follower load, shooting method

1. คำนำ

ปัญหาการแอ่นตัวมากของคานเป็นปัญหาทางอีลาสติคาคานที่น่าสนใจมากปัญหาหนึ่ง เนื่องจากปัญหาในลักษณะนี้มีสมการครอบคลุมปัญหาที่มีความโค้งสูงซึ่งปัญหาในลักษณะนี้มีสมการครอบคลุมปัญหาที่มีความโค้งต่ำ การพิจารณาการโก่งตัวของคานหรือการพิจารณาถึงความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตเป็นสิ่งจำเป็น นอกจากนี้ในปัจจุบันเทคโนโลยีด้านวัสดุวิศวกรรมได้มีการพัฒนาไปอย่างมาก วัสดุที่ใช้ในการทำโครงสร้างเริ่มมีการนำเอาวัสดุพิเศษที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในช่วงยืดหยุ่นมีลักษณะไม่เชิงเส้นเป็นเชิงเส้น ซึ่งการวิเคราะห์โครงสร้างโดยทั่วไปที่มีพื้นฐานและหลักการตามทฤษฎีที่เป็นเชิงเส้นจะไม่สามารถทำได้ ดังนั้นการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างที่มีความไม่เชิงเส้น ร่วมกับความสัมพันธ์ในด้านวัสดุจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจตัวอย่างของปัญหานี้ที่สามารถนำมาใช้จริงได้ ได้แก่ ท่อลำเลียงของไหล (Risers) ที่ใช้ลำเลียงปิโตรเลียม (Petroleum) หรือก๊าซธรรมชาติ (Gas) ในงานวิศวกรรมนอกชายฝั่ง การออกแบบไม้ค้ำถ่อ บาร์โหน กระดานกระโดดน้ำการดึงกระดาษของเครื่องพิมพ์ ที่ด้านหนึ่งตัวจับกระดาษเปรียบเสมือนจุดรองรับแบบยึดหมุน และส่วนมือกระดาษเปรียบเหมือนจุดรองรับแบบใบแรงเสียดทาน และส่วนลูกกลิ้งกระดาษเปรียบเหมือนน้ำหนักบรรทุกแบบจุดที่กดกระดาษให้เคลื่อนที่ไปตามทิศทางที่กำหนดโดยทิศทางของแรงกระทำที่ตั้งฉากกับกระดาษเสมอ ซึ่งล้วนแต่รับภาระกระทำแบบติดตาม ทั้งแบบจุดและกระจายตามความยาวของชิ้นส่วนแทบทั้งสิ้น เป็นต้น

การศึกษาปัญหาการโก่งตัวของคานโครงสร้างในอดีตเริ่มต้นจากการปัญหาการโก่งตัวของคานโดย สุรพันธ์ บุญเจริญ [1] ได้ทำการศึกษากวาระการแอ่นตัวมากของคาน โดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลต่อมา จีระพงษ์ [2] ได้ทำการศึกษากวาระการแอ่นตัว



มากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งของคานมีค่าไม่คงที่ เนื่องจากปลายข้างหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับไร้แรงเสียดทาน Chucheepsakul และคณะ [3] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายคาน โดยคานด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนอิสระ ส่วนอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีอีลิปติกอินทิกรัลในการวิเคราะห์ค่าคาน ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้นำมาซึ่งสองวิธีมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก จีระพงษ์ [4] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งของคานมีค่าไม่คงที่ เนื่องจากปลายข้างหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบข้อหมุน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งพาดอยู่บนจุดรองรับไร้แรงเสียดทาน โดยนำหน้าหน้าบรทุกที่กระทำบนคานแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ 1. กรณีนำหน้าบรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ 2. กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม 3. กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้ามและมีหน้าหน้าบรทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใด ๆ และ 4. กรณีโมเมนต์ดัดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกันซึ่งทำการแก้ปัญหาด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัล

เพื่อให้การวิเคราะห์ครอบคลุมปัญหามากขึ้นเมื่อรับแรงแบบต่าง ๆ ได้มีการวิเคราะห์พฤติกรรมของเพิ่มภาระกระทำแบบต่าง ๆ ดังเช่น Wang และคณะ [5] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกแบบจุดกระทำ ณ ตำแหน่งใดก็ตามแนวแกนราบของคาน โดยทำการวิเคราะห์และหาค่าคานของคานที่รับแรงกระทำ, ค่าโมเมนต์ และค่าของมุมที่เปลี่ยนแปลงที่จุดรองรับด้วยวิธีการอิงเป่าและวิธีอีลิปติกอินทิกรัล ต่อมา ทินกร [6] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยคำนึงถึงผลของการยัดเยียดและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน สำหรับวิธีที่ผู้ทำการศึกษาใช้วิเคราะห์และหาค่าคานมี 2 วิธี คือ วิธีการอิงเป่า และวิธีอีลิปติกอินทิกรัล Chucheepsakul และคณะ [7] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้โมเมนต์ดัดกระทำที่ปลายคานในทิศทางเดียวกัน โดยหาค่าคานด้วยวิธีการอิงเป่าและวิธีอีลิปติกอินทิกรัล

ต่อมาได้เริ่มมีการศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างรับภาระกระทำที่ซับซ้อนขึ้น โดยบุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกเฉียงที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสวยรูปของคาน โดยหาค่าคานด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัลและวิธีการอิงเป่า จากนั้น นฤพนธ์ [9] ได้ศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกกระทำแบบจุดที่กระทำที่ตำแหน่งใด ๆ ในแนวตั้งฉากกับแนวราบไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสวยรูป 2. นำหน้าหน้าบรทุกกระทำแบบแรงอัดที่ปลายคาน มีทิศทางเปลี่ยนแปลงตามการเสวยรูป และ 3. นำหน้าหน้าบรทุกกระทำที่เป็นแรงอัดกระทำที่ปลายคาน ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเสวยรูป โดยหาค่าคานด้วยวิธีอิงเป่า ต่อมา Phungpaingam และคณะ [10] ได้ศึกษารวบรวมคานของคานอย่างง่ายที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกที่เปลี่ยนแปลงตามการเสวยรูปของคาน โดยการหาค่าคานด้วยวิธีอิงเป่าและวิธีอีลิปติกอินทิกรัล จากผลการวิเคราะห์พบว่า

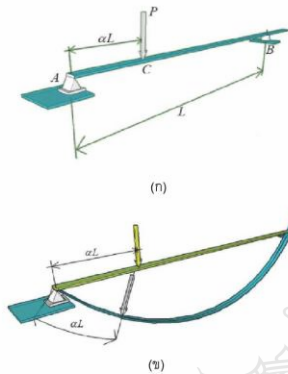
ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดมีค่าเท่ากับ 8.422 ส่วน Puingern และคณะ [11] ได้ศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยการหาค่าคานนั้นทั้งหมด 3 วิธี คือ 1. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 2. วิธีการอิงเป่า และ 3. ทฤษฎีของคานแบบเชิงเส้น จากนั้น Athissakul และ Chucheepsakul [12] ได้ศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยหาค่าคานด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการอิงเป่า และ กฤษณะชัย [13] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ด้วยวิธีอีลิปติกอินทิกรัลไม่เป็นเชิงเส้น ภายใต้หน้าหน้าบรทุกแบบต่าง ๆ 3 ลักษณะ คือ 1. ภายใต้หน้าหน้าบรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ 2. ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางตรงกันข้าม และ 3. ภายใต้โมเมนต์ดัดที่มีทิศทางตรงกันข้าม โดยใช้ระเบียบวิธีการอิงเป่าในการหาค่าคานเชิงตัวเลข

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นล้วนแต่เป็นการศึกษาพฤติกรรมของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้เป็นเชิงเส้น แต่ในปัจจุบันมีวัสดุจำนวนมากที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นสมมุติฐานข้างต้นจึงไม่เหมาะสมสำหรับคานที่ทำการวิเคราะห์นี้ โดย Shatanawi และคณะ [14] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้หน้าหน้าบรทุกแบบกระจายตัวไม่สม่ำเสมอและแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคาน โดยศึกษาแบบจำลอง 2 ตัวอย่างโดยกำหนดคุณสมบัติของวัสดุดังนี้ $E_1 = 1.73$ MPa และ $E_2 = 5.32$ MPa ค่าคงที่ของวัสดุ $n = 1.619$ สำหรับส่วนรับแรงดึง และ $m = 1.216$ สำหรับส่วนรับแรงอัด B. Albert และคณะ [16] ได้ทำการศึกษา การร่อนคานของคานที่ยึดทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นแบบ Ludwick ที่รับภาระกระทำตามแนวราบและแนวตั้งและแรงดัดที่ปลายคาน เพื่อทำการวิเคราะห์ระยะการร่อนตัวในแนวราบและแนวตั้งในวัสดุไม่เชิงเส้นได้แก่ annealed Copper Zhou และคณะ [17] ได้ทำการศึกษารวบรวมคานแบบ bi-modulus ภายใต้ภาระกระทำแบบผสมโดยทำการศึกษาคานที่ยึดทำโดยเงินไซ $L/h \leq 5$, อัตราส่วนระหว่างโมดูลัสด้านแรงอัดต่อแรงดึง (E_c/E_t) อยู่ในช่วงระหว่าง 0-5 และค่าคงที่ $n = 0.2, 1$ และ 5 ตามลำดับ

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงศึกษาการร่อนคานของคานช่วงเดียวที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ทำจากวัสดุไม่เชิงเส้นประเภทลูคิกแบบ Bi-modulus ที่รับภาระกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสวยรูปของคานภายใต้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง [8] และ [14] เพื่อวิเคราะห์ผลของค่า n และอัตราส่วนระหว่าง E_c/E_t ที่มีผลต่อระยะการโก่งตัวและแรงที่กระทำและแสดงพฤติกรรม, ระยะโก่งตัวมากของคานที่มีผลมาจากวัสดุที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงและระยะการเคลื่อนที่

2. ทฤษฎีและสมการควบคุมปัญหา

งานวิจัยนี้เพื่อศึกษาการแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่หัววัสดุไม่เชิงเส้นจำพวกลูควิก ที่มีความแตกต่างของค่าโมดูลัสระหว่างส่วนแรงดึงและแรงอัด ซึ่งถูกกระทำด้วยภาระกระทำแบบติดตาม ณ ตำแหน่ง α เท่ากับ 0.25, 0.50 และ 0.75 ตามรูปที่ 1(ก.) โดยปลายด้านหนึ่งของคาน (A) วางอยู่บนจตุรกรรบแบบหมุนได้อิสระ ส่วนปลายอีกด้านหนึ่ง (B) วางอยู่บนจตุรกรรบที่ไว้แรงเสียดทาน โดยปลายทั้งสองข้างของจตุรกรรบวางห่างกันเป็นระยะเท่ากับ L



รูปที่ 1 แสดงรูปคานทดสอบ เมื่อ (ก) รูปคานทดสอบก่อนรับภาระกระทำ (ข) เมื่อรับภาระกระทำแบบติดตาม

2.1 สมมติฐาน

- โดยสมมติฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องรวมถึงสมการควบคุมปัญหาแสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้
- * วัสดุคานมีความสม่ำเสมอและเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogenous Material) และมีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) ตลอดความยาวของคาน
 - * คานไม่มีกาวยึดหรือหัดตัวตามแนวแกนเมื่อรับแรง
 - * แรงที่กระทำต่อคานเป็นแรงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสวยรูปของคาน (Follower load) โดยจะยึดติดกับตำแหน่งเดิมเสมอ
 - * แรงที่กระทำต่อคานจะยึดติดกับตำแหน่งเดิมเสมอ
 - * การแอ่นตัวของคานมีค่ามากในขณะที่ความเครียดมีค่าน้อย
 - * การแอ่นตัวของคานอยู่ภายใต้กฎของ Bernoulli-Euler

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง

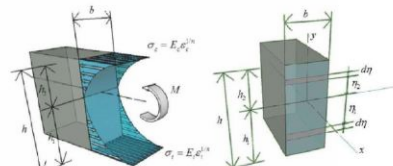
สมการของโมเมนต์ดัดและความโค้งของคานสามารถสร้างขึ้นจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดร่วมกับเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบ โดยงานวิจัยนี้ใช้สมบัติของวัสดุไม่เชิงเส้นแบบลูควิกแบบ Bi-modulus โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแบบลูควิกแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c^{1/n} \tag{1}$$

$$\sigma_t = E_t \epsilon_t^{1/n} \tag{2}$$

เมื่อ σ_t, σ_c คือ ความเค้นในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ ϵ_t, ϵ_c คือ ความเครียดในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ E_t, E_c คือ ค่าโมดูลัสในส่วนของแรงดึงและแรงอัด ตามลำดับ จากการพิจารณาของการกระจายความเค้นภายในหน้าตัด ดังรูป 2 ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดภายในกับความเค้นที่ดึงจากกับหน้าตัดตามสมการที่ (3)

$$M = \int \sigma_t \eta dA + \int \sigma_c \eta dA \tag{3}$$



รูปที่ 2 การกระจายความเค้นตามแนวแกนของคานซึ่งมีความสัมพันธ์ของวัสดุแบบลูควิก

จากเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบ ค่าความโค้ง (κ) ของเส้นโค้งเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{4}$$

เมื่อ ρ คือ ค่ารัศมีความโค้งของระนาบสะท้อนของคาน κ คือ ค่าความโค้งของคาน

เนื่องจากความเครียดและความโค้งของคาน มีความสัมพันธ์กันด้วยสมการ

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = \eta \kappa \tag{5}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (1) - (5) ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดภายในคานกับความโค้งของคาน สำหรับคานที่จากวัสดุที่มีคุณสมบัติไม่เป็นเชิงเส้นแบบลูควิก ตามสมการต่อไปนี้

$$M = \int_0^{h/2} E_t (\eta \kappa)^{1/n} \eta (b \cdot d\eta) + \int_0^{h/2} E_c (\eta \kappa)^{1/n} \eta (b \cdot d\eta) \tag{6}$$

จากสมการที่ (6) ทำการอินทิเกรตตลอดพื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้งของคานที่จากวัสดุไม่เป็นเชิงเส้นแบบลูควิกได้ดังสมการที่ (7)

$$M = bE_t \frac{n}{2n+1} h_1^{(2n+1)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} h_2^{(2n+1)/n} \left[\frac{d\theta}{ds} \right]^{1/n} \tag{7}$$

เมื่อ M คือ โมเมนต์คัตตัวภายในหน้าตัด ณ ตำแหน่งใด ๆ ของความยาวโค้ง s

b คือ ค่าความกว้างของหน้าตัดคาน

h คือ ค่าความสูงของหน้าตัดคาน

เมื่อพิจารณาสมการที่ (7) จัดรูปใหม่จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ของความโค้งและโมเมนต์คัตตัวสมการที่ (8)

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left(bE_c \frac{n}{2n+1} h_1^{(2n+1)/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} h_2^{(2n+1)/n} \right)^n} \quad (8)$$

พิจารณาสมการที่ (9) เพื่อหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทิน

$$\int \sigma_c dA - \int \sigma_c dA = 0 \quad (9)$$

แทนค่าสมการที่ (1), (2), (4) และ (5) ใน (9) และทำการอินทิเกรตตลอดพื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้งของคานที่ทำการวัดไม่เป็นเชิงเส้นแบบดิวคิกได้ดังสมการที่ (10)

$$bE_c \frac{n}{n+1} h_1^{(n+1)/n} \kappa^{1/n} - bE_c \frac{n}{n+1} h_2^{(n+1)/n} \kappa^{1/n} = 0 \quad (10)$$

เพื่อหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทินของหน้าตัดคานที่มีความสูง h ทำการจตุรูปสมการที่ (10) ใหม่ให้อยู่ในรูปของ h_1 และ h_2 จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$E_c \frac{n}{n+1} h_1^{(n+1)/n} - E_c \frac{n}{n+1} h_2^{(n+1)/n} = 0 \quad (11)$$

โดยความสูง h , h_1 และ h_2 มีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ (11)

$$h = h_1 + h_2 \quad (12)$$

เขียนความสัมพันธ์ใหม่จะได้ว่า

$$h_2 = h - h_1 \quad (13)$$

เมื่อ h_1 และ h_2 คือความสูงจากแนวแกนสะเทินถึงผิวบนและผิวล่างของหน้าตัด ตามลำดับ

แทนค่าสมการที่ (13) ใน (11) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$E_c h_1^{(n+1)/n} - E_c (h - h_1)^{(n+1)/n} = 0 \quad (14)$$

จัดรูปใหม่จะได้ $h_1 = \beta h$ (15)

$$\text{เมื่อ } \beta = \frac{1}{[(E_c / E_c)^{n/(n+1)} + 1]} \quad (16)$$

แทนค่าสมการที่ (15) ใน (8) จะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left(bE_c \frac{n}{2n+1} (\beta h)^{(2n+1)/n} + bE_c \frac{n}{2n+1} (h - \beta h)^{(2n+1)/n} \right)^n} \quad (17)$$

จากสมการที่ (17) จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M^n}{\left(E_c b \frac{n}{2n+1} h^{(2n+1)/n} (\beta^{(2n+1)/n} + \gamma(1-\beta)^{(2n+1)/n}) \right)^n} \quad (18)$$

$$\text{เมื่อ } \gamma = \frac{E_c}{E_c} \quad (19)$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปแบบที่กระชับขึ้นดังสมการที่ (20)

$$\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{M}{E_c I^*} \right)^n \quad (20)$$

เมื่อ I^* คือโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคานที่มีคุณสมบัติแบบดิวคิกชนิด Bi-modulus

หากพิจารณาคานที่มีพื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง b ความสูง h จะได้ว่า I^* ดังแสดงในสมการที่ (21)

$$I^* = b \frac{n}{2n+1} h^{(2n+1)/n} (\beta^{(2n+1)/n} + \gamma(1-\beta)^{(2n+1)/n}) \quad (21)$$

จากสมการที่ (21) หากพิจารณาคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบเชิงเส้น $n=1$ และ $E_c = E_c$ จะทำให้ค่า I^* ลดรูปลงได้ตรงกับค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าดังสมการที่ (22)

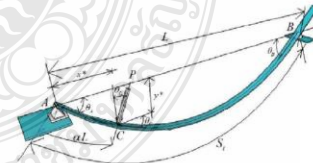
$$I_0 = \frac{bh^3}{12} \quad (22)$$

เมื่อ I_0 หมายถึงโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีคุณสมบัติแบบเชิงเส้น

2.3 สมการครอบคลุมปัญหา

จากรูปที่ 1 คานช่วงเดียวมีความยาว L โดยปลายด้านหนึ่งของคาน (A) วางอยู่บนจตุรกรงรับแบบหมุนได้อิสระ ส่วนปลายอีกด้านหนึ่ง (B) วางอยู่บนจตุรกรงรับที่โรแรงเสียดทาน โดยหน้าตัดคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 2

เมื่อคานรับภาระกระทำแบบติดตามที่จุด C คานจะเกิดการกอนตัวดังแสดงในรูปที่ 3 โดยพบว่าจตุรกรงรับ A และ B จะเกิดการหมุนเป็นมุม θ_A และ θ_B ตามลำดับ ที่จุด C แรง P จะเกิดการเสียรูปเป็นมุม θ_C โดยที่แรง P ยังคงตั้งฉากกับแกนของคานเสมอและยังคงยึดติดอยู่ในตำแหน่งเดิม นั่นคือตำแหน่ง αL ทำให้ตำแหน่งที่แรง P กระทำเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจาก $(\alpha L, 0)$ เป็นระยะ x^* จากแนวแกน x (อ้างอิงจากจุด A) และ เป็นระยะ y^* จากแนวแกน y และมีการเปลี่ยนแปลงความยาวช่วงคานจากเดิมเป็นระยะ L_{AC} เป็นระยะ αL



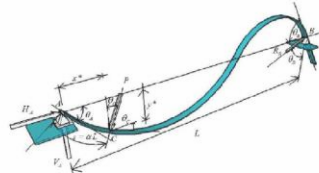
รูปที่ 3 รูปร่างของคานทดสอบเมื่อเกิดการเสียรูป

พิจารณาสมการในระบบของคานช่วงเดียวดังแสดงในรูปที่ 4 จะได้แรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่งกระทำดังสมการที่ (23), (24), และ (25) นั่นคือ

$$R_B = \frac{P}{L \cos \theta_B} (x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C) \quad (23)$$

$$V_A = P \left[\cos \theta_C - \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right] \quad (24)$$

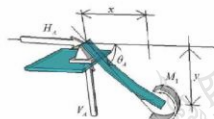
$$H_A = P \left[\sin \theta_C - \tan \theta_B \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right] \quad (25)$$



รูปที่ 4 รูปอิสระแทนแรงเพื่อใช้ในการวิเคราะห์

พิจารณารูปอิสระแทนแรงของชิ้นส่วนอิสระที่จุดหมุน A เพื่อหาสมการของโมเมนต์ที่ตำแหน่งใด ๆ ดังแสดงในรูปที่ 5 ของคานในช่วงต่าง ๆ ดังนี้

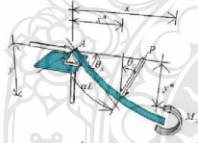
พิจารณาช่วง $x < x^*$



รูปที่ 5 แรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อคานในช่วง $x < x^*$

$$M_1 = P \left[\begin{aligned} & \left(\sin \theta_C - \tan \theta_B \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right) (y) \\ & + \left(\cos \theta_C - \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right) (x) \end{aligned} \right] \quad (26)$$

พิจารณาช่วง $x > x^*$



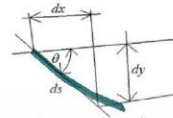
รูปที่ 6 แสดงแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อคานในช่วง $x > x^*$

$$M_2 = P \left[\begin{aligned} & \left(\sin \theta_C - \tan \theta_B \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right) (y) + \\ & \left(\cos \theta_C - \frac{(x^* \cos \theta_C + y^* \sin \theta_C)}{L} \right) (x) \\ & - \cos \theta_C (x - x^*) - \sin \theta_C (y - y^*) \end{aligned} \right] \quad (27)$$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนของคานจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (28)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (29)$$



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของคาน

นำสมการที่ (26) และ (27) ไปแทนลงในสมการที่ (20) แล้วทำการจัดรูปสมการใหม่ทำให้ได้สมการที่ (30) และ (31)

$$\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{M_1}{EI^*} \right)^n \quad 0 \leq s \leq \alpha \quad (30)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{M_2}{EI^*} \right)^n \quad \alpha \leq s \leq s_1 \quad (31)$$

ดังนั้นสมการที่ (30) และ (31) คือชุดของระบบสมการครอบคลุมปัญหาของคานช่วงเดียวที่ทำจากวัสดุประเภทดิวิกแบบ Bi-modulus ภายใต้การกระทำแบบเปลี่ยนแปลงไปตามการเสียรูปของคาน

3. เปรียบวิธีการหาค่าตอบเชิงตัวเลข

จากระบบสมการครอบคลุมปัญหานั้นได้แก่ สมการที่ (4), (28), (29), (30) และ (31) เป็นระบบสมการอนุพันธ์ที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น การหาค่าตอบเชิงวิเคราะห์ไม่สามารถทำได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีรุ่ง-คุตดาอันดับ 4 และแก้ปัญหาโดยวิธีกระทำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันในการหาค่าตอบ วิธีนี้เป็นวิธีการหาค่าตอบเชิงตัวเลขของปัญหาแบบเงื่อนไขขอบเขตซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 ตัวแปรไร้มิติ

เพื่อความสะดวกในการหาค่าตอบเชิงตัวเลขและลดความผิดพลาดจากการคำนวณ จึงจัดการจัดรูปของสมการครอบคลุมปัญหาให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ โดยตัวแปรไร้มิติที่ใช้งานวิจัยนี้ได้แก่

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \quad \bar{x}^* = \frac{x^*}{L} \quad (31a-c)$$

$$\bar{y}^* = \frac{y^*}{L} \quad \bar{b} = \frac{b}{L} \quad \bar{h} = \frac{h}{L} \quad (31d-f)$$

$$\bar{s} = \frac{s}{L} \quad \bar{P} = \frac{PL^2}{EI_0} \quad \bar{M} = \frac{ML}{EI_0} \quad (31g-i)$$

$$\bar{I}_0 = \frac{I_0}{L^4} \quad \bar{I}^* = \frac{I^*}{L^n} \quad (31j-k)$$

3.2 สมการครอบคลุมปัญหาในตัวแปรไร้มิติ

สำหรับปัญหาคานภายใต้การกระทำแบบบิดตามสามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหาให้อยู่ในตัวแปรไร้มิติได้โดยอาศัยสมการ

ที่ (4), (28), (29), (30) และสมการที่ (31) ซึ่งทำให้ระบบสมการครอบคลุมปัญหาในรูปตัวแปรไร้มิติดังนี้

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (32)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (33)$$

สำหรับชิ้นส่วนคานในช่วง $\bar{x} < \bar{x}^*$

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left(\frac{\bar{M}_1 \bar{I}_0}{\bar{I}^*} \right)^n \quad (34)$$

และสำหรับชิ้นส่วนคานในช่วง $\bar{x} > \bar{x}^*$

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \left(\frac{\bar{M}_2 \bar{I}_0}{\bar{I}^*} \right)^n \quad (35)$$

โดยที่

$$\bar{M}_1 = \bar{P} \left[\begin{array}{l} (\sin \theta_c - \tan \theta_c (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)) \bar{y} \\ + (\cos \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)) \bar{x} \end{array} \right] \quad (36a)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{P} \left[\begin{array}{l} (\sin \theta_c - \tan \theta_c (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)) \bar{y} + \\ (\cos \theta_c - (\bar{x}^* \cos \theta_c + \bar{y}^* \sin \theta_c)) \bar{x} \\ - \cos \theta_c (\bar{x} - \bar{x}^*) - \sin \theta_c (\bar{y} - \bar{y}^*) \end{array} \right] \quad (36b)$$

การหาค่าของระบบสมการอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติข้างต้นสามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้า โดยมีเงื่อนไขของเขต 2 จุด ณ ตำแหน่งปลายทั้งสองของคานดังนี้

เงื่อนไขขอบเขตจุดปลายด้านซ้าย (จุด A)

$$\bar{s} = 0, \bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \theta = \theta_A \quad (37a-d)$$

เงื่อนไขขอบเขตจุดปลายด้านขวา (จุด B)

$$\bar{s} = 1, \bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \theta = \theta_B \quad (38a-d)$$

ขั้นตอนการคำนวณเริ่มต้นจากการกำหนดค่าเริ่มต้น ระยะ α และกำหนดคุณสมบัติวัสดุ n, \bar{b}, \bar{h}, E_c และ E_c จากนั้นกำหนดค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเริ่มต้น \bar{s}_c จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นตัวแปรที่ต้องการ ได้แก่ $\bar{P}, \theta_A, \theta_B, \theta_c, \bar{x}^*$ และ \bar{y}^* เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการคำนวณด้วยวิธีการยิงเป้าร่วมกับวิธีอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ โดยการอินทิเกรตจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดในสมการที่ (37a-d) และ (38a-d) ซึ่งได้ใช้กระบวนการกระทำซ้ำของ นิวตัน-ราฟสันในการปรับแก้ค่าประมาณการเริ่มต้นเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (39) โดยมีความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ 10^{-7}

$$\begin{aligned} \text{Min} \phi &= |\bar{x}(\bar{s}_c = 1) - 1| + |\bar{y}(\bar{s}_c = 1)| + \\ &|\theta(\bar{s}_c = 1) - \theta_B| + |\theta_c - \theta_A| + \\ &|\bar{x}^* - \bar{x}_c| + |\bar{y}^* - \bar{y}_c| \end{aligned} \quad (39)$$

ภายหลังกระบวนการหาค่าตอบโดยวิธีนิวตัน ราฟสัน จะทำการปรับค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้นเป็น $\bar{s}_i = \bar{s}_j + \Delta \bar{s}_i$ และเริ่มกระบวนการหาค่าตอบโดยวิธีนิวตัน-ราฟสันต่อไป จนกระทั่งได้คำตอบทั้งหมดที่อยู่ในช่วงที่สนใจ

4. ผลการวิเคราะห์

4.1 ตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์

เพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นมานั้นมีความถูกต้อง และสามารถนำมาใช้ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น จำเป็นต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยนำไปเปรียบเทียบกับปัญหาการโค้งตัวของคานที่มีส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสวยรูปของคานในงานวิจัยของ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8]

จากตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ปัญหาในการนิเวศแบบเชิงเส้นโดย กำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] กล่าวคือกำหนดให้ $n = 1, \bar{b} = \bar{h}, E_c = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ เพื่อเปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} ที่ตำแหน่ง α ระหว่าง 0.10 - 0.90 ซึ่งได้ค่าใกล้เคียงกันมาก

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบเชิงเส้น $n = 1, \bar{b} = \bar{h}, E_c = E_c$ และมุม $\gamma = 0$ กับงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8]

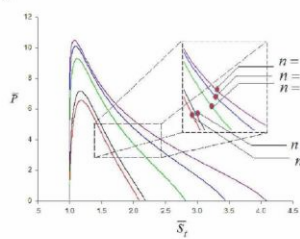
α	\bar{P}_{CR}	
	[8]	งานวิจัยนี้
0.10	24.3682	24.368151529
0.15	16.5093	16.509305756
0.20	12.6679	12.667923213
0.25	10.43989	10.439885815
0.30	9.0258	9.025841651
0.35	8.0855	8.08552593
0.40	7.4516	7.451569448
0.45	7.0345	7.034481281
0.50	6.7850	6.785017344
0.55	6.6778	6.677843435
0.60	6.7047	6.704653235
0.65	6.8724	6.872447657
0.70	7.2067	7.206719023
0.75	7.7618	7.747010727
0.80	8.6471	8.647084566
0.85	10.1015	10.101512141
0.90	12.7527	12.752630516

4.2 พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคาน

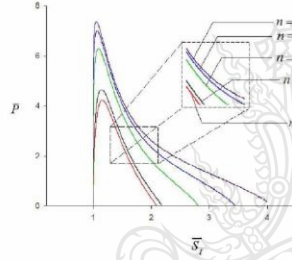
ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของคาน (Load-Deflection Curve) ดังแสดงในรูปที่ 8 เป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างผลการทดสอบที่คำนวณได้ (น้ำหนักบรรทุก \bar{P})

และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด \bar{s} , เพื่อใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมและหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} และความยาวส่วนโค้งวิกฤต ก่อนที่จะเกิดการไร้เสถียรภาพของคานที่ทำการวัดแบบลูตริก ชนิด Bi-modulus

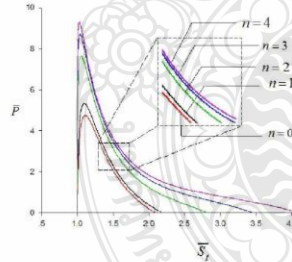
เมื่อนำค่าของ \bar{P} และ \bar{s} ของทง α มาสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก \bar{P} กับความยาวส่วนโค้ง \bar{s} , ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 8(n)-8(ค) จะมีลักษณะคล้ายกันนั้นคือ เริ่มแรกเมื่อนำน้ำหนัก \bar{P} ให้กับคาน ค่าของแรง \bar{P} จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึงจุดสูงสุดที่มีค่าเท่ากับน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} โดยที่น้ำหนักบรรทุกวิกฤตนี้มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น ภายหลังจากจุดวิกฤตน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ลดลงในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้น



(n) $\alpha = 0.25$



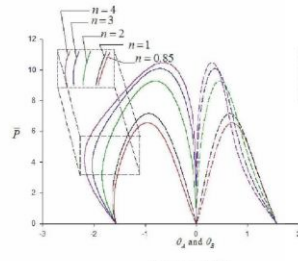
(ข) $\alpha = 0.50$



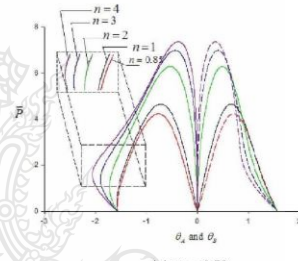
(ค) $\alpha = 0.75$

รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างแรง \bar{P} กับความยาวส่วนโค้ง \bar{s} , ที่ค่าคงที่ n ต่าง ๆ และความสัมพันธ์ระหว่าง $E_1/E_2 = 2$
(n) $\alpha = 0.25$ (ข) $\alpha = 0.50$ (ค) $\alpha = 0.75$

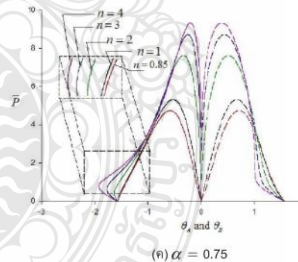
เมื่อนำค่าของ \bar{P} θ_A θ_B มาสร้างเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก \bar{P} กับมุมที่ปลายของคาน (θ_A, θ_B) ได้ดังแสดงในรูปที่ 9(n) -9(ค) โดยที่มีการแปรผันค่า n ที่อยู่ระหว่าง 0.85 ถึง 4 และคงอัตราส่วน $E_1/E_2 = 2$ ซึ่งจากกราฟความสัมพันธ์สามารถกล่าวได้ว่า เมื่อค่าคงที่ n เพิ่มขึ้นระบบจะมีค่าสัฟเฟนส์ที่สูงขึ้นเช่นกัน และภายหลังจากจุดวิกฤตน้ำหนักบรรทุก \bar{P} มีค่าที่ลดลงในขณะที่คานมีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้นซึ่งบ่งบอกได้ว่าคานในสภาวะที่อยู่ในสภาวะที่ไร้เสถียรภาพ น้ำหนักบรรทุก \bar{P} จะลดลงอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งเป็นศูนย์เมื่อมุมที่ปลายคานมีค่าเท่ากับ $\pi/2$



(n) $\alpha = 0.25$

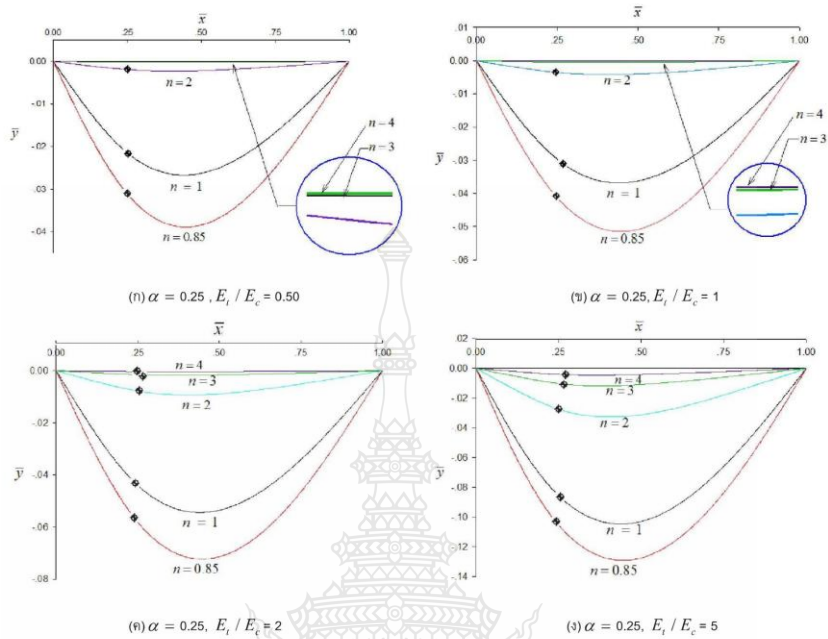


(ข) $\alpha = 0.50$



(ค) $\alpha = 0.75$

รูปที่ 9 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและมุมที่ปลายคานเมื่อ $\alpha = 0.25$ (ข) $\alpha = 0.50$ (ค) $\alpha = 0.75$



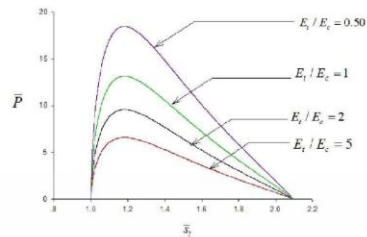
รูปที่ 10 รูปร่างของคานเมื่อขนาดของแรง $\bar{P} = 2.50$ (ก) $E_1/E_c = 0.50$ (ข) $E_1/E_c = 1$ (ค) $E_1/E_c = 2$ (ง) $E_1/E_c = 5$

เมื่อพิจารณารูปที่ 10 (ก)-(ง) แสดงถึงรูปร่างสมดุลของคานที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่กรณี $E_1/E_c = 0.50, 1, 2$ และ 5 ที่ค่าแรง $\bar{P} = 2.50$ พบว่ากรณีที่ค่าคงที่ $n \leq 1$ จะการแอ่นตัวที่มากกว่าวัสดุที่มีค่าคงที่ $n > 1$ เนื่องจากผลของค่าสตีเฟนของคานแต่จะมีผลตรงกันข้ามกับค่าอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c นั่นคือ หากอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c ยิ่งมีค่ามากจะส่งผลให้การแอ่นตัวของคานจะค่ามากขึ้น

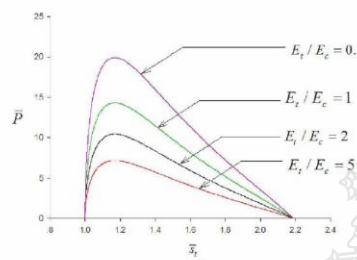
จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเมื่อทำการแปรผันค่า E_1/E_c ดังแสดงในรูปที่ 11 (ก)-(ค) ได้ทำการเปรียบเทียบค่าของน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ ที่ค่า $n = 0.85, 1$ และ 2 และอัตราส่วนระหว่าง $E_1/E_c = 0.50, 1, 2$ และ 5 พบว่าหากอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c เพิ่มขึ้นจะมีผลให้น้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของคานมีค่าลดลง เนื่องจากเมื่อเพิ่มอัตราส่วนดังกล่าวจะมีผลทำให้ค่า I มีขนาดที่ลดลง และค่าของ \bar{P} ถูกปรับขนาดด้วย E_1 ซึ่งเมื่ออัตราส่วน E_1/E_c มีค่าที่สูงขึ้นจะส่งผลให้น้ำหนักบรรทุกในรูปไร้หน่วย \bar{P} ที่คำนวณได้มีค่าลดลง

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่าลักษณะของปัญหาที่พิจารณานี้พบจุดวิกฤตซึ่งภายหลังจากจุดวิกฤตคานจะอยู่สภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพซึ่งงานวิจัยนี้ได้แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตของคานที่มีคุณสมบัติของวัสดุแบบสุวิวก ดังแสดงในตารางที่ 2 เมื่อกำหนดให้

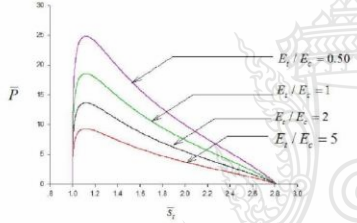
ค่า α อยู่ระหว่าง $0.10 - 0.90$ ที่ค่า $n = 0.85, 1, 2, 3$ และ 4 เมื่ออัตราส่วนระหว่าง $E_1/E_c = 2$ และอัตราส่วนของหน้าตัด $b = h$ เพื่อแสดงผลกระทบของค่าแรงวิกฤตที่เกิดขึ้นตามเงื่อนไขดังกล่าว พบว่ากรณีที่กำหนดให้ค่าคงที่ $n < 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} จะมีค่าสูงสุดที่ $\alpha = 0.10$ และมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึงจุดต่ำสุดและหลังจากนั้นค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีค่าเพิ่มขึ้นอีกเล็กน้อย ในกรณีที่กำหนดค่าคงที่ $n = 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีลักษณะคล้ายกับกรณี $n < 1$ แต่มีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อย จากงานวิจัยของบุญชัย ผึ้งไผ่งาม [8] ได้แสดงค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต กรณีอัตราส่วนระหว่าง $E_1/E_c = 1$ (กรณีเชิงเส้น) ไว้ที่ $\bar{P}_{CR} = 6.671809$ ที่ $\alpha = 0.5651$ ในงานวิจัยนี้ได้ค่า $\bar{P}_{CR} = 4.59006$ ที่ $\alpha = 0.585683$ เนื่องจากผลของอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c ที่เพิ่มขึ้นซึ่งมีผลทำให้ค่าแรงวิกฤตที่คำนวณได้มีค่าลดลงโดยตำแหน่งของ α จะมีค่ามากขึ้นเมื่อเทียบกับงานวิจัยที่ยังอิงและในกรณีที่กำหนดค่าคงที่ $n > 1$ ค่าน้ำหนักบรรทุกจะมีค่าสูงสุดที่ $\alpha = 0.10$ คือ $21.2912, 22.81$ และ 23.4138 สำหรับค่าคงที่ $n = 2, 3$ และ 4 ตามลำดับ และมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งถึงจุดต่ำสุดและหลังจากนั้นค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตจะมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งกรณีนี้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ตำแหน่ง $\alpha = 0.90$ จะมีขนาด $14.0511, 16.7927$ และ 18.3763 ตามลำดับดังแสดงไว้ในรูปที่



(ก) ค่าคงที่ $n = 0.85$

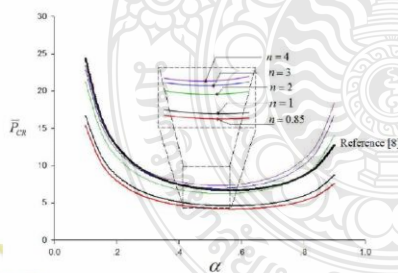


(ข) ค่าคงที่ $n = 1$



(ค) ค่าคงที่ $n = 2$

รูปที่ 11 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต ณ ตำแหน่ง $\alpha = 0.25$ และอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c ระหว่าง 0.50, 1, 2 และ 5 เมื่อ (ก) ค่าคงที่ $n = 0.85$, (ข) ค่าคงที่ $n = 1$, (ค) ค่าคงที่ $n = 2$



รูปที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กับ α ที่ค่าคงที่ n ต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่าง $E_1/E_c = 2$

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต \bar{P}_{CR} กรณีวัสดุแบบไม่เชิงเส้นแบบลูตวิกรินิด BI-modulus ที่ค่า n ต่าง ๆ โดยกำหนดให้ $b = h$ และอัตราส่วน $E_1/E_c = 2$

α	\bar{P}_{CR}				หมายเหตุ	
	n					
	0.85	1	2	3		4
0.1	15.372	16.7237	21.2912	22.81	23.4138	$E_1/E_c = 2$
0.15	10.4067	11.3302	14.4957	15.5973	16.0688	$\bar{b} = \bar{h}$
0.2	7.97715	8.69389	11.1917	12.1015	12.5146	
0.25	6.56601	7.1648	9.2882	10.094	10.4766	
0.3	5.66862	6.19436	8.09069	8.83624	9.20226	
0.35	5.07007	5.54903	7.30458	8.01582	8.37405	
0.4	4.66453	5.11395	6.78597	7.48084	7.83794	
0.45	4.39526	4.8277	6.45896	7.15189	7.51383	
0.5	4.23077	4.6565	6.28321	6.98764	7.36057	
0.55	4.1546	4.58295	6.24018	6.97037	7.36143	
0.6	4.16061	4.60135	6.32773	7.10077	7.51902	
0.65	4.25195	4.7165	6.55998	7.39864	7.85657	
0.7	4.44242	4.94591	6.97311	7.91065	8.42702	
0.75	4.76203	5.32682	7.64038	8.73	9.33538	
0.8	5.27119	5.93442	8.71157	10.0484	10.7984	
0.85	6.09978	6.93258	10.5276	12.3089	13.3196	
0.9	7.58045	8.75202	14.0511	16.7927	18.3763	

5. บทสรุป

งานวิจัยนี้วิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งตัวของคานที่ทำการวัดแบบลูตวิกรินิด BI-modulus ภายใต้ภาระกระทำแบบติดตาม โดยใช้เปรียบเทียบวิธีเชิงปริมาตรกับเทคนิคการอินทิเกรตเชิงตัวเลข รุ่ง-กุดตา อันต์น 4 และเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม จากผลการศึกษานี้สามารถสรุปได้ดังนี้ ค่าคงที่ของวัสดุ n และอัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c มีผลต่อการรับน้ำหนัก \bar{P} ของคานและพฤติกรรมการแอ่นตัวของคานเป็นอย่างมาก โดยค่าคงที่ n จะมีผลโดยตรงกับสติฟเนสของคาน โดยค่าคงที่ n ที่มีค่ามากจะมีผลให้สติฟเนสของคานมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย ในขณะที่อัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c จะมีผลในทางตรงกันข้ามกล่าวคือ เมื่ออัตราส่วนระหว่าง E_1/E_c ที่มีค่ามากจะมีผลทำให้การรับน้ำหนักบรรทุก \bar{P} ของคานมีค่าลดลงเนื่องจากพารามิเตอร์ให้หน่วย \bar{P} ถูกปรับขนาดด้วย E_1 ในสมการที่ (31h) ส่วนผลของตำแหน่งของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง α มีผลโดยตรงเช่นเดียวกันนั้นคือ เมื่อน้ำหนักบรรทุกอยู่ใกล้จุดรองรับแบบหมุนทำให้ระบบมีสติฟเนสที่สูงกว่าในการที่น้ำหนักบรรทุกอยู่ห่างจากจุดรองรับแบบหมุน

เอกสารอ้างอิง

- [1] สุพันธ์ บุญเจริญ (2536). การวิเคราะห์การแอ่นตัวของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระโดยวิธีอีลิปติกอินทิกรัล.

- วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-103.
- [2] Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Wang, C.M. (1994). Large deflection of beams under moment gradient, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, 120, pp. 1848-1860.
- [3] Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Huang, T. (1995). Elastica of simple variable-arc-length beam subjected to end moment. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics*, 121, pp. 767-772.
- [4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ (2538). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยค่านิ่งถึงผลของการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-168.
- [5] Wang, C.M., Lam, K.Y., He, X.Q. and Chucheepsakul, S. (1997). Large deflection of an end supported beam subjected to a point load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32, pp. 63-72.
- [6] ทินกร มนต์ประภัสสร (2540). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยค่านิ่งถึงผลของการยึดรั้งและความเสียดทานของที่รองรับและผลของแรงเฉือน, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-130.
- [7] Chucheepsakul, S., Wang, C.M., He, X.Q. and Monprapussorn, T. (1999). Double curvature bending of variable-arc-length elasticas. *ASCE Journal of Applied Mechanics*, 66, pp. 87-94.
- [8] บุญชัย ฉิ่งไผ่งาม (2544). การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยค่านิ่งทุกรูปแบบเชิงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียดรูป, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-91.
- [9] นฤพนธ์ ศิลลาภากุล (2548). การแอ่นตัวมากของคานที่หาจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-71.
- [10] Phungpaingam B., Chucheepsakul, S. and Wang, C.M. (2006). Postbuckling of beam subjected to intermediate follower force. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 132, pp. 16-25.
- [11] Pulgern, T., Halling, M.W., Chucheepsakul, S. and Poovarodom, P. (2006). On the free vibrations of variable-arc-length beam, analytical and experimental. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 132, pp. 772-778.
- [12] Athisakul, C. and Chucheepsakul, S. (2008). Effect of inclination on bending of variable-arc-length beam subjected to uniform self – weight. *Engineering Structures*, 30, pp. 902-908.
- [13] กฤษณะชัย จันทรวง (2554). การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่หาจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแบบต่างๆ, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, หน้า 1-149.
- [14] Shatnawi, A.S. and Sadder, S.A. (2007). Exact large deflection analysis of nonprismatic cantilever beam of nonlinear bimodulus material subjected to tip moment. *Journal of Reinforced Plastic and Composites*, 26, pp. 1-16.
- [15] Baykara, C. and Ismail, B. (2005). Large deflections of a cantilever beam of nonlinear bimodulus material subjected to an end moment. *Journal of Reinforced Plastics and Concrete Mechanics*, 24, pp. 1-16.
- [16] Brojan, M., Cebron, M. and Kosel, F. (2012). Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end. *Acta Mechanica Sinica*, 28, pp.863-869
- [17] Borboni, A. and Santis, D.D. (2014). Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric Ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end. *Acta Meccanica Sinica*, 49, pp 1327-1336.
- [18] Zhao, H. and Ye, Z. (2015). Analytic elasticity solution of bi-modulus beams under combined Loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 36, pp. 427-438.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นายขจรเกียรติ รักษา
วัน เดือน ปีเกิด	4 สิงหาคม 2518
ที่อยู่	111/149 หมู่ที่ 7 ซอยมาสุข 2 ตำบลท่าไม้ อำเภอกะทู้มแบน จังหวัดสมุทรสาคร 74110
ประวัติการศึกษา	ปริญญาตรี คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
ประวัติการทำงาน	พ.ศ. 2542 ถึง พ.ศ. 2544 ครูพิเศษสอน สังกัดฝ่าย/กอง สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา ชื่อหน่วยงาน วิทยาลัยเทคนิคนครปฐม จังหวัดนครปฐม
พ.ศ. 2544 ถึง ปัจจุบัน	ครู วิทยฐานะ ชำนาญการ สังกัดฝ่าย/กอง สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา ชื่อหน่วยงาน วิทยาลัยเทคนิคสระแก้ว จังหวัดสระแก้ว
เบอร์โทรศัพท์	08 – 9234 - 1133
อีเมล	kha_john_kiat@hotmail.co.th

