

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 3 ส่วน
จากเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

SMOOTHED FINITE ELEMENT USING THREE SMOOTHING
DOMAINS CREATED BY QUADRILATERAL ELEMENT FOR
PLANE STRESS PROBLEM

กิตติภูมิ เรื่องทรัพย์สินคุณา



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีการศึกษา 2563

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 3 ส่วน จากเอลิเมนต์ทรง
เหลี่ยมสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

กิตติภูมิ เรื่องทรัพย์คณา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2563
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

หัวข้อวิทยานิพนธ์

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสมำเสมอ 3 ส่วน จากเอลิเมนต์
ทรงเหลี่ยมสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ

Smoothed Finite Element using Three Smoothing Domains
Created by Quadrilateral Element for Plane Stress Problem

ชื่อ-นามสกุล

นายกิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา

สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.

ปีการศึกษา

2563

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ปิตินันต์ กร้ามาตร, ปร.ด.)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)

วันที่ 17 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2564

| | |
|-------------------|---|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์ | สมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 3 ส่วน จากเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ |
| ชื่อ-นามสกุล | นายกิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา |
| สาขาวิชา | วิศวกรรมโยธา |
| อาจารย์ที่ปรึกษา | ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิกเกต, Ph.D. |
| ปีการศึกษา | 2563 |

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนความเครียดแบบสม่ำเสมอจำนวน 3 ส่วนภายในเอลิเมนต์หลักของปัญหาความเค้นในระนาบ ผลของความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี ณ ตำแหน่งเดียวกัน

ปัญหาของงานวิจัยฉบับนี้ เป็นคานยื่นปลายที่รับแรงเฉือนพาราโบลาที่ปลายคาน พารามิเตอร์ที่ใช้สำหรับการศึกษาในครั้งนี้คือค่าความละเอียดของโครงตาข่ายจำนวน 5 ค่าและอัตราส่วนความยาวด้านของเอลิเมนต์สม่ำเสมอต่อความยาวด้านของเอลิเมนต์หลักที่เท่ากันทั้งสองทิศทางจำนวน 3 ช่วง เอลิเมนต์สม่ำเสมออยู่รูปทรงสี่หน้าเหล่านั้นนั้นถูกจัดเรียงตำแหน่งในลักษณะที่จะทำให้เกิดการกระจายตัวของพื้นที่อย่างสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนของปัญหาโดยอาศัยรูปแบบที่เรียกว่า semi-unit-cell

ผลจากการวิเคราะห์พบว่า จำนวนของการแบ่งโครงตาข่ายและค่าอัตราส่วนความยาวด้านของเอลิเมนต์ มีผลต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้อย่างชัดเจน โดยที่จำนวนการแบ่งโครงตาข่ายแบบหยาบสุดขนาด 16×4 มีค่าความคลาดเคลื่อนของความเค้นตึงฉากและความเค้นเฉือนคิดเป็นร้อยละ 8.75 และ 12.08 ตามลำดับ สำหรับการแบ่งโครงตาข่ายแบบละเอียดมากขนาด 48×12 นั้น ค่าความคลาดเคลื่อนของความเค้นตึงฉากและความเค้นเฉือนมีค่าลดลงเหลือร้อยละ 1.41 และ 2.24 ตามลำดับ สำหรับในส่วนของค่าอัตราส่วนความยาวด้านของเอลิเมนต์นั้น มีแนวโน้มในลักษณะเดียวกัน กล่าวคือ ในช่วง 0.2-0.3 เมื่อเทียบกับช่วง 0.4-0.5 ค่าความคลาดเคลื่อนของความเค้นตึงฉากมีค่าลดลงจากร้อยละ 8.75 และ 12.08 เหลือเพียงร้อยละ 5.86 และ 9.80

คำสำคัญ : สมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ โดเมนสม่ำเสมอ ปัญหาความเค้นในระนาบ คานยื่นปลาย แรงเฉือนรูปพาราโบลา

| | |
|-----------------------|--|
| Thesis Title | Smoothed Finite Element using Three Smoothing Domains Created by Quadrilateral Element for Plane Stress Problem |
| Name-Surname | Mr. Kittipoom Ruangsubkana |
| Program | Civil Engineering |
| Thesis Advisor | Assistant Professor Kamtornkiat Musiket, Ph.D. |
| Academic Year | 2020 |

ABSTRACT

This research presents cell-based smooth finite element method created by three sub-cell smoothing domains of plane stress problem. The stress results obtained from numerical analysis were compared to the theoretical results.

Numerical benchmark used in this research was a cantilever subjected to parabolic shear force at the free end. The control parameters were the 5 meshes and the three element's side ratios between smoothed and main element, which was equal in both axes. To establish the distribution of smoothing area over the whole problem domain, all smoothed elements were arranged using pattern called semi-unit cell.

The analysis result revealed that both mesh and the element's side ratios used to determine smoothing domains clearly led to the accuracy of the results. The mean tolerances of normal and shear stresses with 16x4 using coarsest mesh were 8.75% and 12.08%, respectively. At the finest mesh size with 48x12, those values were found decreasingly to 1.41% and 2.24%. The effect of element's side ratios was also found to be the same trend as meshing. When comparing both normal and shear stresses at 0.2-0.3 and 0.4-0.5 of element's side ratios, it demonstrated that the mean tolerances decreased from 8.75% and 12.08% to 5.86% and 9.80%, respectively.

Keywords: smooth finite element, three sub-cell smoothing domains, element's side ratio, plane stress, cantilever beam, parabola shear force

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษา ค้นคว้า ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณา และความอนุเคราะห์ของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกตุ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้ทำการศึกษาวินิจฉัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม ประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบรองศาสตราจารย์ ดร.ปิตินันต์ กร้ามาตร และผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล ที่ได้ให้ความกรุณา ในการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของงานวิจัย รวมทั้งเสียสละเวลาในการเป็นกรรมการสอบในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ และมอบความดีทั้งหมดนี้ให้แก่ ครอบครัว เพื่อนและคณะครู-อาจารย์ ที่ให้การสนับสนุน รวมทั้งเสียสละเวลาในการประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้ ตลอดระยะเวลาในการจัดทำวิทยานิพนธ์ชิ้นนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่างานค้นคว้าฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้สนใจหากการค้นคว้าในครั้งนี้ขาดตกบกพร่อง หรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขอภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย



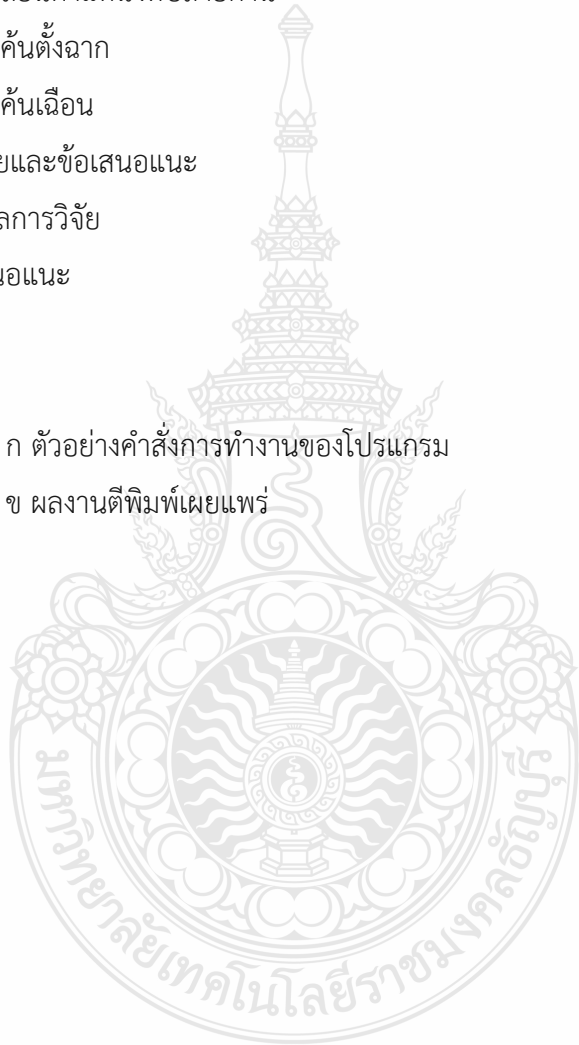
กิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา

สารบัญ

| | หน้า |
|--|------|
| บทคัดย่อภาษาไทย | (3) |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ | (4) |
| กิตติกรรมประกาศ | (5) |
| สารบัญ | (6) |
| สารบัญตาราง | (8) |
| สารบัญรูป | (9) |
| บทที่ 1 บทนำ | 11 |
| 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา | 11 |
| 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย | 13 |
| 1.3 ขอบเขตของการวิจัย | 13 |
| 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ | 13 |
| บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง | 14 |
| 2.1 สมการครอบคลุมปัญหาอิลาสติกใน 2 มิติ | 14 |
| 2.2 โดเมนสมำเสมอทรงเหลี่ยมสี่หน้า | 17 |
| 2.3 สมการสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ | 19 |
| 2.4 การสร้างสนามความเครียดสมำเสมอ | 19 |
| 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง | 22 |
| บทที่ 3 วิธีการศึกษาและวิธีดำเนินการวิจัย | 24 |
| 3.1 วิธีการดำเนินการวิจัย | 24 |
| 3.2 เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบ | 24 |
| 3.3 สถานที่ทำการทดลองและค้นคว้าข้อมูล | 24 |
| 3.4 ปัญหาสำหรับงานวิจัย | 24 |
| 3.5 วิธีการวิเคราะห์และแก้ปัญหาของงานวิจัย | 27 |

สารบัญ (ต่อ)

| | หน้า |
|--|------|
| บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล | 31 |
| 4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน | 31 |
| 4.2 ความเค้นตึงฉาก | 32 |
| 4.3 ความเค้นเฉือน | 40 |
| บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ | 45 |
| 5.1 สรุปผลการวิจัย | 45 |
| 5.2 ข้อเสนอแนะ | 46 |
| บรรณานุกรม | 47 |
| ภาคผนวก | 49 |
| ภาคผนวก ก ตัวอย่างคำสั่งการทำงานของโปรแกรม | 50 |
| ภาคผนวก ข ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่ | 57 |
| ประวัติผู้เขียน | 74 |



สารบัญตาราง

| | หน้า |
|---|------|
| ตารางที่ 2.1 แสดงจำนวนน้อยที่สุดของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอสำหรับปัญหาของแข็ง | 22 |
| ตารางที่ 4.1 ความเค้นตั้งฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่าง ๆ ที่ระยะ $L/2$ | 32 |
| ตารางที่ 4.2 ความเค้นตั้งฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่าง ๆ ที่ระยะ $L/4$ | 33 |
| ตารางที่ 4.3 ค่าความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่โครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ | 40 |



สารบัญรูป

| | หน้า |
|--|------|
| รูปที่ 1.1 รูปแบบการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ | 12 |
| รูปที่ 2.1 เงื่อนไขขอบของโดเมนของปัญหา | 16 |
| รูปที่ 2.2 การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย | 16 |
| รูปที่ 2.3 การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 3 โดเมนสม่ำเสมอ | 18 |
| รูปที่ 2.4 ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss Points) | 18 |
| รูปที่ 3.1 การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอแบบอิสระ | 25 |
| รูปที่ 3.2 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ | 25 |
| รูปที่ 3.3 โดเมนสม่ำเสมอย่อย 3 ส่วนที่เป็นไปได้ | 26 |
| รูปที่ 3.4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 ส่วน | 26 |
| รูปที่ 3.5 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนที่ปลายคาน | 27 |
| รูปที่ 3.6 ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหา | 28 |
| รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม MATLAB ในงานวิจัยชิ้นนี้ | 29 |
| รูปที่ 4.1 ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน (Tip Displacements) | 31 |
| รูปที่ 4.2 ตำแหน่งที่ทำการวิเคราะห์ค่าความเค้นตึงฉาก ระยะ $L/2$ และ $L/4$ | 32 |
| รูปที่ 4.3 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 16×4 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$ | 34 |
| รูปที่ 4.4 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 24×6 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$ | 35 |
| รูปที่ 4.5 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 32×8 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$ | 35 |
| รูปที่ 4.6 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 40×10 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$ | 36 |
| รูปที่ 4.7 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 48×12 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$ | 36 |
| รูปที่ 4.8 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 16×4 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/4$ | 37 |

สารบัญรูป (ต่อ)

| | หน้า |
|---|------|
| รูปที่ 4.9 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 24x6 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4 | 37 |
| รูปที่ 4.10 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 32x8 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4 | 38 |
| รูปที่ 4.11 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 40x10 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4 | 38 |
| รูปที่ 4.12 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 48x12 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4 | 39 |
| รูปที่ 4.13 ความแตกต่างของค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) กับค่าทางทฤษฎี ที่ ตำแหน่งหน้าตัด L/2 | 39 |
| รูปที่ 4.14 ความแตกต่างของค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) กับค่าทางทฤษฎี ที่ ตำแหน่งหน้าตัด L/4 | 40 |
| รูปที่ 4.15 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 16x4 | 41 |
| รูปที่ 4.16 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 24x6 | 42 |
| รูปที่ 4.17 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 32x8 | 42 |
| รูปที่ 4.18 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 40x10 | 43 |
| รูปที่ 4.19 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาด โครงตาข่าย 48x12 | 43 |
| รูปที่ 4.20 ความแตกต่างของค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) กับค่าทางทฤษฎี | 44 |

บทที่ 1

บทนำ

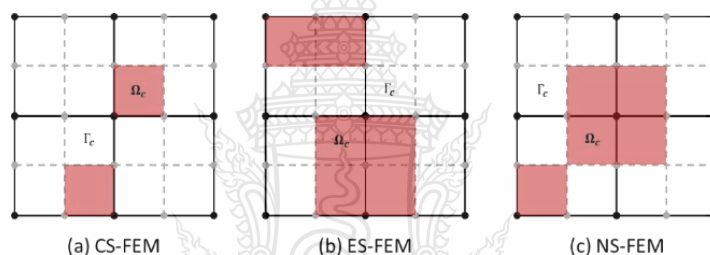
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จัดว่าเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมมากที่สุดในปัจจุบัน เนื่องจากความสามารถในการจัดการกับความซับซ้อนทั้งในส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์ รูปทรงของปัญหาโจทย์และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งมีผลการคำนวณที่มีความแม่นยำ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้หลักในการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็ก ๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) ซึ่งเชื่อมโยงกันด้วยโครงตาข่าย (Mesh) ฟังก์ชันของความเครียดถูกสร้างมาจากการใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลเพื่อประมาณค่าของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งภายในเอลิเมนต์ สติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์จะถูกนำมารวมกันเป็นสติฟเนสของทั้งโดเมนเพื่อแก้ระบบสมการหาค่าของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง ความเค้นและความเครียดของปัญหาต่อไป ความแม่นยำของคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบการเสีรูปร่างของเอลิเมนต์ [1] ถึงแม้ว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (Triangular element) จะมีความยืดหยุ่นมากกว่าในการสร้างโครงตาข่ายของปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปทรงก็ตาม ความแม่นยำของค่าที่ได้ก็ยิ่งน้อยกว่าเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) นอกจากนี้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังมีพฤติกรรมที่ให้ค่าความแข็งแกร่งของการวิเคราะห์ที่สูงกว่าความจริงรวมถึงปัญหาเรื่องความเที่ยงตรงของผลลัพธ์อีกด้วย

นักวิจัยหลายกลุ่มได้พยายามคิดค้นวิธีใหม่ ๆ ขึ้นมาเพื่อขจัดปัญหาเหล่านั้นออกไป ได้แก่ วิธีไม่ใช้โครงตาข่าย (Meshless Methods) [2] วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่ง (Partition of Unity) [3] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (Polygonal Finite Element Methods) [4-6] วิธีไม่ใช้โครงตาข่ายสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งมาก (Large deformation) วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่งยอมให้ใช้รูปทรงเรขาคณิตของโดเมนปัญหาเป็นอิสระไม่ขึ้นตรงกับโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นจากไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านนั้นสามารถสร้างโครงตาข่ายเป็นรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ก็ได้ [7] Liu et al. [8,9] ได้คิดค้นวิธีที่เรียกว่าสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element Method, SFEM) โดยอาศัยหลักการของ gradient smoothing technique หลักพื้นฐานที่สำคัญของวิธีนี้คือการสร้างสนามความเครียด (strain field) ด้วยการใช้อยู่ Smoothed Galerkin weak form ซึ่งจะทำให้โมเดลที่ได้ด้วยวิธีนี้มีความแข็งแกร่งน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นรวมทั้งมีความถูกต้องแม่นยำมากกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม [10]

เทคนิคการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domains) นั้นสามารถทำได้หลายแบบคือ [9] cell-based SFEM (CSFEM) node-based SFEM (NSFEM), edge-based SFEM (ESFEM) และ face-based SFEM (FSFEM) เป็นต้นดังแสดงในรูปที่ 1.1 ขึ้นอยู่กับการใช้ชิ้นส่วนใดในการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ นั่นเอง ทำให้มีทางเลือกหลายทางสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการ นอกจากนี้แล้ว วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ยังสามารถนำไปปรับปรุงใช้กับปัญหา geometry nonlinearity ใน 3 มิติที่มีวัสดุเป็นแบบใกล้บีบอัดไม่ได้ (nearly-incompressible material) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ [11]

ในวิธี cell-based SFEM ซึ่งถือว่าเป็นวิธี SFEM ที่เป็นพื้นฐานนั้นได้ถูกศึกษาอย่างแพร่หลายเช่น นำไปใช้กับปัญหาทางด้านพลศาสตร์ (Dynamics) [12] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นและแผ่นเปลือกบาง (Plate and Shell) [13] ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของการแตกหักโดยใช้ร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) สำหรับปัญหาใน 2 มิติ [14]



รูปที่ 1.1 รูปแบบการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 3 โดเมนภายในเอลิเมนต์หลักที่สร้างขึ้นมาจากโครงตาข่ายทรงเหลี่ยมจตุรัสด้วยโปรแกรม MATLAB [16] ความยาวแต่ละด้านของโดเมนย่อยนี้ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของด้านของเอลิเมนต์หลัก อัตราส่วนของโครงตาข่ายในแนวตั้งต่อแนวนอนถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1:4 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับขนาดของคานยื่นปลายที่ใช้ในการศึกษา หลักในการสมมาตรของ Unit cell ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับโดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องภายในโดเมนทั้งหมดของปัญหา

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เข้าใจทฤษฎีของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ

1.2.2 ศึกษาผลกระทบของการกำหนดจำนวนการแบ่งโครงตาข่ายเอลิเมนต์ (mesh) และการกำหนดตำแหน่งของการแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอด้วยค่า α

1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบผลของการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักออกเป็น 3 ส่วนย่อยกับผลเฉลยทางทฤษฎี

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 การวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างจะใช้วิธี CS-FEM (Cell-based Smoothed Finite Element Method) โดยมุ่งเน้นไปที่การแบ่งเอลิเมนต์หลักรูปทรงสี่หน้าออกเป็น 3 โดเมนย่อย (Smoothing domains)

1.3.2 จำนวนการแบ่งโครงตาข่ายสำหรับเอลิเมนต์หลักรูปทรงสี่หน้า (Mesh) มีจำนวน 5 ชุด คือ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ

1.3.3 ค่า α ที่ใช้อยู่ในช่วง 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับสำหรับทั้งในแนวตั้งและแนวนอน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ทราบถึงองค์ความรู้เกี่ยวกับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นของของแข็งใน 2 มิติด้วยวิธี SFEM

1.4.2 ทราบถึงอัลกอริทึมของการเขียนโปรแกรมการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

1.4.3 ทราบถึงหลักการในการประยุกต์ใช้วิธี SFEM สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นและความเครียดใน 2 มิติประเภทอื่น ๆ ในงานวิศวกรรมโยธา

1.4.5 สามารถนำองค์ความรู้จากงานวิจัยครั้งนี้ ไปใช้ในการต่อยอดองค์ความรู้และเป็นข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญ สำหรับการพัฒนาการเลือกโดเมนสำหรับสร้างเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอใหม่ ๆ ซึ่งสามารถให้ผลการคำนวณที่มีความแม่นยำสูงในขณะเดียวกันก็ใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยลง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการครอบคลุมปัญหาอีลาสติคใน 2 มิติ

ตัวแปรภายในซึ่งไม่ทราบค่าทั้งสามตัวของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติภายใต้ทฤษฎีอีลาสติคเชิงเส้นได้แก่ การเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ความเครียด (Strain) และความเค้น (Stress) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังสมการที่ 2.1 ถึง 2.3 คือ

$$u = [u_x \quad u_y]^T \quad (2.1)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (2.2)$$

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (2.3)$$

สมการดังกล่าวจะถูกเชื่อมโยงเข้าด้วยกันด้วยสมการ Kinematic, Constitutive และ Internal-equilibrium ถ้าสมมติให้ค่าความเค้นและเครียด ณ สถานะเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ ความเชื่อมโยงของสมการดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} [u_x \quad u_y] \quad (2.4)$$

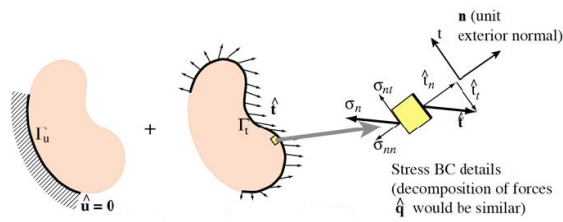
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

เมื่อเวกเตอร์ \mathbf{b} คือแรงภายในเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุและ \mathbf{E} คืออีลาสติคโมดูลัสเมทริกซ์ ถ้ากำหนดให้ \mathbf{D} เป็นเมทริกซ์โอเปอเรเตอร์สำหรับการหาความชัน (gradient) ซึ่งมีขนาดเป็น 3×2 แล้ว สมการที่ 2.4 ถึง 2.6 สามารถลดรูปลงเป็นสมการในรูปสัญลักษณ์ของเทนเซอร์ (Tensor notations) คือ

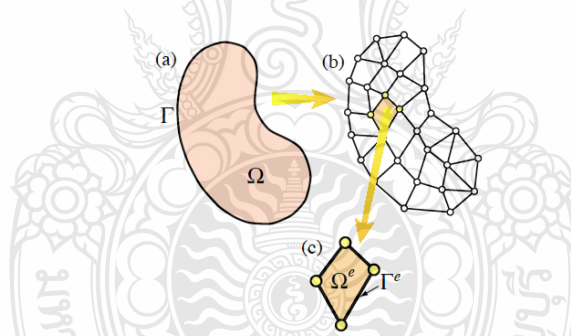
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.7)$$

เงื่อนไขขอบที่ถูกกำหนดไว้บนโดเมนของปัญหาทางกลศาสตร์ Γ นั้น แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ เงื่อนไขขอบของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement boundary conditions) และ เงื่อนไขขอบของแรง (Force boundary conditions) การที่จะระบุเงื่อนไขขอบเหล่านั้น นิยมแบ่งโดเมนของปัญหาดังกล่าวออกเป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ Γ_u และ Γ_t เพื่อแยกความแตกต่างของเงื่อนไขขอบทั้ง 2 ประเภท ดังแสดงในรูปที่ 2.1 เมื่อเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยนตำแหน่งถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_u โดย $\hat{\mathbf{u}}$ หมายถึงการเคลื่อนที่บนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ซึ่งมักจะมีค่าเท่ากับศูนย์ $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ณ ตำแหน่งของฐานรองรับ ส่วนเงื่อนไขขอบของแรงนั้นถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_t ในรูปของสมการ $\boldsymbol{\sigma}_n = \hat{\mathbf{t}}$ โดย $\hat{\mathbf{t}}$ หมายถึงแรงบนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ในรูปของแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่และ $\boldsymbol{\sigma}_n$ คือเวกเตอร์ของความเค้นนั่นเอง สมการที่ 2.7 รวมกับเงื่อนไขขอบทั้งสองแบบที่ได้กล่าวมาแล้วนี้เป็นสมการที่เรียกว่า Strong form ของปัญหาความเค้นในระนาบซึ่งไม่สะดวกสำหรับการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง นอกจากนี้ ในกรณีที่ปัญหามีความสลับซับซ้อนหรือลำดับอนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีลำดับสูงขึ้น การหาผลเฉลยดังกล่าวในรูปของ Closed form อาจไม่สามารถทำได้ วิธีที่สะดวกกว่าและสามารถหาค่าได้คือการเปลี่ยนจากรูป Strong form ดังกล่าวในอยู่ในรูปของ Weak form ด้วยการแทนที่สมการอนุพันธ์ของ Strong form ด้วยการอินทิเกรตหรือเป็นการเฉลี่ยค่าทั้งหมดที่อยู่ในช่วงโดเมนนั้น ๆ



รูปที่ 2.1 เงื่อนไขขอบของโดเมนของปัญหา [17]

วิธีการเปลี่ยนรูปของ Strong form ไปเป็น Weak form นั้นสามารถทำได้ 2 แบบด้วยกัน คือ การใช้หลักการของพลังงาน (Energy Methods) หรือหลักการของการถ่วงเศษน้ำหนักตกค้าง (Weighted Residual Methods) ในที่นี้ จะขอกล่าวถึงการเปลี่ยนรูปสมการด้วยวิธีแรก เริ่มจากการพิจารณาแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็ก ๆ ด้วยโครงตาข่าย (Mesh) เรียกว่าเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ใช้สัญลักษณ์ด้วยตัวยกเป็น e เอลิเมนต์ดังกล่าวใน 2 มิติ อาจเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมก็ได้ สมการพลังงานศักย์รวมทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันนอล (ฟังก์ชันของฟังก์ชัน) ของเอลิเมนต์สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.8



รูปที่ 2.2 การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย [17]

$$\Pi^e = U^e - W^e \tag{2.8}$$

เรียกสมการนี้ว่า Total Potential Energy Functional (TPE) เมื่อพลังงานภายในที่เกิดขึ้นมาจากพลังงานความเครียดภายในของวัตถุซึ่งมีสมการคือ

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma^T \varepsilon d\Omega^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon^T E \varepsilon d\Omega^e \quad (2.9)$$

และพลังงานภายนอกที่เกิดขึ้นเป็นผลรวมของแรงภายในที่ทราบค่าแล้วกับแรงภายนอกซึ่งกระทำบริเวณของขอบโดเมน Γ_t นั้นเองโดยมีสมการคือ

$$W^e = \int_{\Omega^e} u^T b d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} u^T \hat{t} d\Gamma^e \quad (2.10)$$

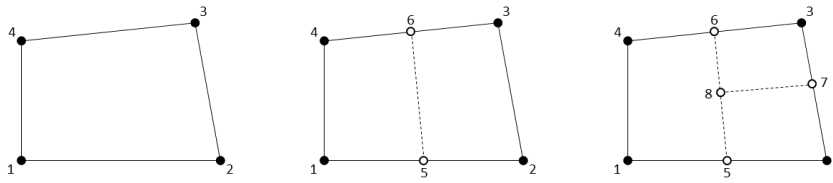
หลังจากการแทนค่าด้วย $u = \sum N u^e$, $\varepsilon = B u^e$, $\sigma = E \varepsilon$ กลับลงไปในสมการ TPE (2.8) ของแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูป Weak form ร่วมกับหลักการของการแปรผัน (Variational Principle) เพื่อหาสถานะสมดุลของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งกล่าวว่า $\delta \Pi = 0$ เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลง δu ที่เกิดขึ้นเพียงเล็กน้อย [18] จะได้สมการไฟไนท์เอลิเมนต์สุดท้ายในรูป

$$K u = F \quad (2.11)$$

เมื่อ K, u, F คือสติเฟนสมเมทริกซ์ เวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อและเวกเตอร์ของแรงภายในที่จุดต่อในระบบโคออร์ดิเนตหลักตามลำดับ

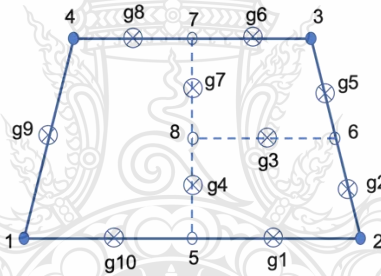
2.2 โดเมนสมำเสมอทรงเหลี่ยมสี่หน้า

งานวิจัยในครั้งนี้ ใช้การแบ่งโดเมนของทั้งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) ดังแสดงในรูปที่ 2.3 เอลิเมนต์หลักดังกล่าว จะถูกนำมาแบ่งออกเป็นส่วยย่อยที่เรียกว่าโดเมนสมำเสมอ (Smoothing Domain, SD) ด้วยการใช้อิเลเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าจำนวน 3 เอลิเมนต์ จำนวนน้อยที่สุดของโดเมนสมำเสมอสำหรับปัญหาของของแข็งใน 2 มิติซึ่งเสนอโดย [19] มีค่าเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมดของปัญหา การแบ่งนี้โดเมนย่อยสมำเสมอนี้ สามารถทำได้โดยทำการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างกึ่งกลางด้านทั้งสองที่อยู่ตรงข้ามกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 3 โดเมนสามเหลี่ยม

เนื่องจากการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของด้านที่อยู่บนโดเมนสามเหลี่ยมนี้ใช้การประมาณเป็นแบบเชิงเส้น เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสามเหลี่ยมในระบบโคออร์ดิเนตหลัก ที่สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ของเกาส์ ณ จุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียวโดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของมัน ในทางปฏิบัตินั้น นิยมใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับการหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าว



รูปที่ 2.4 ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss Points)

รูปที่ 2.4 วงกลมทึบ 1-2-3-4 แสดงตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าหลัก วงกลม 5-6-7-8 แสดงตำแหน่งของจุดต่อของโดเมนย่อยสามเหลี่ยม 3 โดเมนที่ถูกสร้างขึ้นมา วงกลมกากบาท g_1-g_{10} แสดงตำแหน่งจุดของเกาส์ทั้งหมด ค่าของฟังก์ชันรูปร่างสามารถหาได้โดยค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปร่างของจุดต่อทั้งสองบนด้านที่กำลังพิจารณาเช่น $N_1(5)$ มีค่าเท่ากับ $(N_1(1) + N_1(2))/2 = (1 + 0)/2 = 0.5$ ในลักษณะเดียวกัน $N_2(5)$ มีค่าเท่ากับ $(N_2(1) + N_2(2))/2 = (0 + 1/2) = 0.5$ ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง $N_1(g_1)$ มีค่าเท่ากับ $(N_1(5) + N_1(2))/2 = (0.5 + 0)/2 = 1/4$ ทำนองเดียวกัน ค่าฟังก์ชันรูปร่าง $N_2(g_1)$ มีค่าเท่ากับ $(N_2(2) + N_2(5))/2 = (1 + 0.5)/2 = 3/4$ เป็นต้น

2.3 สมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

จากหลักการของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งหมดที่กล่าวมาเบื้องต้น สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} = \bar{F} \quad (2.12)$$

สัญลักษณ์บาร์ด้านบน ใช้เพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกับสมการไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง ดังนั้น สติเฟนสมเมทริกซ์สม่าเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของ สติเฟนสมม่าเสมอย่อยได้เป็น

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum \bar{K}^{SFEM^e} = \sum \bar{B}^T D \bar{B} A_k^s \quad (2.13)$$

ภายหลังการแก้ระบบสมการที่ 2.12 ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ก็สามารถหาค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของปลายจุดต่อที่ต้องการได้และนำไปสู่การการวิเคราะห์เพื่อหาค่าความเค้น ความเครียดภายในชิ้นส่วนได้ต่อไป

2.4 การสร้างสนามความเครียดสม่าเสมอ

ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์อยู่ที่ขั้นตอนของการสร้างสนามความเครียดแบบสม่าเสมอโดยอาศัยเทคนิคของ strain smoothing บนโดเมนสม่าเสมอที่อยู่ภายในทุกเอลิเมนต์นั่นเองซึ่งไม่มีขั้นตอนนี้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติ ขั้นตอนอื่น ๆ นอกเหนือจากขั้นตอนนี้นั้น เหมือนกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทุกประการทำให้สามารถใช้ประโยชน์จากโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งมีใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งส่วนที่เป็น open source และ commercial software โดยไม่จำเป็นต้องสร้างขึ้นใหม่ทั้งหมด สนามหรือตัวแปรความเครียดสม่าเสมอนี้สามารถสร้างขึ้นได้ด้วยการปรับปรุงตัวแปรสนามความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติโดยใช้ smoothing operation ขบวนการดังกล่าวเริ่มจากการสร้างโครงตาข่าย (Element mesh) แบบสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้วยวิธีปกติเหมือนกับในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แล้วหาค่าของตัวแปรความเครียดในรูปของ

$$\bar{\varepsilon} = L \left(\sum_{I=1}^N N_I(x) \bar{d}_I \right) = \sum_{I=1}^N \tilde{B}_I \bar{d}_I = \tilde{B} \bar{d} \quad (2.14)$$

การคำนวณหาค่าของตัวแปรความเครียดสม่ำเสมอ $\bar{\varepsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_k จะใช้เทคนิคการประมาณของค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน [20] กล่าวคือ

$$\bar{\varepsilon}(x_k) = \int_{\Omega_k^s} L \bar{u}(x) W(x_k - x) d\Omega \quad (2.15)$$

เมื่อ Ω_k^s คือโดเมนสม่ำเสมอสำหรับตำแหน่ง x_k และ $W(x_k - x)$ คือฟังก์ชันน้ำหนักที่สัมพันธ์กับค่า ณ ตำแหน่งดังกล่าว ตัวแปรความเครียดที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอจะถูกคำนวณจากการกระจายตัวแปรความเครียดในสมการที่ 2.15 ตลอดทั่วทั้งโดเมน Ω_k^s และถูกสมมุติให้มีค่าคงที่ ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ นั้น มีความสำคัญกับการทำให้ตัวแปรความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกิดการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนซึ่งจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [9] (1) ค่าของมันจะต้องไม่เป็นศูนย์และต้องมีค่าเป็นบวกภายในโดเมนสม่ำเสมอที่พิจารณา (2) ต้องมีศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x_k (3) ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของคุณสมบัติการมีค่าเป็น 1 (Unity property) เพื่อความง่ายของการคำนวณโดยที่ยังคงสอดคล้องตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น งานวิจัยนี้จะกำหนดให้ใช้ Heaviside step function ซึ่งเป็นฟังก์ชันน้ำหนักอย่างง่ายและแสดงได้ดังสมการที่ 2.16

$$W(x_k - x) = \begin{cases} \frac{1}{A_k^s}, & x \in \Omega_k^s \\ 0, & x \notin \Omega_k^s \end{cases} \quad (2.16)$$

เมื่อ A_k^s คือพื้นที่ของโดเมนสม่ำเสมอที่กำลังพิจารณาอยู่

ในกรณีทั่วไป การเปลี่ยนจากตัวแปรความเครียดซึ่งอาจไม่สามารถหาได้ง่าย มาเป็นตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งหาได้ง่ายกว่านั้นเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ นอกเหนือไปจากนั้น การที่ตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งถูกสมมุติให้มีความต่อเนื่องตลอดบนขอบเขตของโดเมนสม่ำเสมอ ทำให้สามารถเปลี่ยนรูปของสมการที่ 2.15 โดยใช้การอินทิเกรตทีละส่วน กลายเป็น

$$\bar{\epsilon}(x_k) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (2.17)$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสองทิศทางที่พุ่งออกจากด้านหรือขอบเขตของโดเมนสมาชิกตัวเอง

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

สติเฟเนสมเมทริกซ์สมาชิกในระบอบโคออร์ดิเนตหลักในสมการที่ 2.13 นั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ strain-displacement matrix \bar{B} หากทำการแทนค่า $\bar{u}(x) = \sum N_i \bar{u}_i$ ลงในสมการที่ 2.17 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(x) = \bar{B}(x) \bar{u}(x) &\Rightarrow \bar{B}(x) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) N(x) d\Gamma \\ &= \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma} n_i(x) N(x) d\Gamma, \quad i = x, y \quad (2.20)$$

สมการที่ 2.20 เป็นเพียงการอินทิเกรตตลอดความยาวของด้านที่อยู่บนโดเมนสมาชิกซึ่งถูกสมมุติว่าตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งเป็นเส้นตรง เมื่อใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ จำนวนของจุดที่ต้องการคือ 1 จุดซึ่งโดยทั่วไปมักจะใช้จุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของด้านนั้น ๆ เมื่อเป็นเช่นนี้สามารถเปลี่ยนจากเครื่องหมายอินทิเกรตเป็นเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \sum_{j=1}^{n_t^s} n_i^j N(x_j^G) L_j, \quad i = x, y \quad (2.21)$$

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขอบเขตความสม่ำเสมอซึ่งถูกสร้างบนพื้นฐานของเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (polygonal elements) นั้นถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย [15] โดยทางทฤษฎีแล้ว เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านนี้ สามารถเป็นได้ทั้งเอลิเมนต์ที่มีด้านยื่นเข้าไปหรือยื่นออกจากเอลิเมนต์ คุณสมบัติที่สำคัญของวิธี SFEM นั้นมีอยู่หลายอย่าง [9] หาก SFEM ถูกใช้โดยมีเพียงหนึ่งเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ในขอบเขตของปัญหานั้น ผลเฉลยที่ได้ จะใกล้เคียงหรือเท่ากับ FEM ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่ด้านด้วย reduced integration Gauss's rule

สำหรับการใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเพื่อสร้างโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอ นั้น จำนวนของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอจะต้องไม่น้อยกว่าจำนวนน้อยที่ยอมให้ดังแสดงในตารางที่ 2.1 เมื่อ n_t คือจำนวนของโหนดทั้งหมดของโดเมน

ตารางที่ 2.1 แสดงจำนวนน้อยที่สุดของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอสำหรับปัญหาของแข็ง

| Dimension of the Problem | Minimum Number of Smoothing Domains |
|--------------------------|-------------------------------------|
| 1D | $N_s^{\min} = n_t$ |
| 2D | $N_s^{\min} = 2n_t/3$ |
| 3D | $N_s^{\min} = 3n_t/6 = n_t/2$ |

เนื่องจากไม่มีการ mapping ระหว่าง physical coordinates กับ natural coordinates วิธี CS-FEM โอกาสที่จะเกิดปัญหาเรื่องการบิดตัวหรือเกิดการเสียรูปอย่างมากของเอลิเมนต์ จึงมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อยกว่าในวิธี FEM ปกติ

นอกจากนี้ยังพบอีกว่าถ้าแต่ละเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) ของขอบเขตปัญหาที่สนใจถูกแบ่งย่อยออกเป็นโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอที่ใช้เอลิเมนต์แบบรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าด้วยแล้ว ค่าของสติเฟเนสมเทริกซ์หลักที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธี CS-FEM นี้ จะลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันกับสติเฟเนสมเทริกซ์หลักของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้ Gauss integration แบบ 2X2 นั้นเอง

การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเรื่อง Volumetric locking ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อค่าของอัตราส่วนปริมาตรของวัสดุมีค่าเข้าใกล้ 0.5 สำหรับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น ทำได้โดยการกำหนดค่าที่แตกต่างกันของ

Gauss quadrature สำหรับวัสดุที่แตกต่างกัน [22] ในขณะที่วิธี CS-FEM สามารถทำได้ง่ายกว่านั้นมาก โดยเพียงแต่ใช้จำนวนของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอที่แตกต่างกันสำหรับแต่ละส่วนของวัสดุที่ต่างกัันนั่นเอง

วิธี SFEM ยังได้มีการศึกษาเพิ่มเติมในส่วนของคุณสมบัติอย่างมากมาย [23] รวมไปถึงการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาด้านไดนามิกส์ [12] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นและแผ่นเปลือกบาง [13] รวมไปถึงนำไปใช้ควบคู่กันกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบขยาย (XFEM: eXtended Finite Element Method) สำหรับแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์การแตกหักใน 2 มิติ และในปัญหาแผ่น



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1.1 ศึกษาทฤษฎี Smoothed Finite Element Methods โดยมุ่งเน้นไปที่การสร้างแบบจำลอง Smoothed Domain โดยการแบ่ง Element รูปทรงสี่เหลี่ยมออกเป็น 3 ส่วน

3.1.2 ศึกษาขั้นตอนการดำเนินการทดสอบ และเครื่องมือที่จำเป็นในการใช้ทดสอบ รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวข้องต่างๆ

3.1.3 กำหนดปัญหาของตัวอย่างที่จะทำการวิจัย

3.1.4 ตั้งสมมติฐานในการแก้ไขปัญหา

3.1.5 วิเคราะห์ปัญหา โดยใช้ Algorithm ที่ได้กำหนดไว้ในบทที่ 2 นำมาเขียนเป็น Code ด้วยโปรแกรม MATLAB

3.1.5 ทำการเปรียบเทียบ Exact Solution ของตัวอย่างกับผลการวิเคราะห์ที่ได้

3.2 เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบ

3.2.1 โปรแกรม MATLAB

3.2.2 คอมพิวเตอร์หรือคอมพิวเตอร์แบบพกพา ที่มีระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows 7 แบบ 64 bit ขึ้นไปและมีคุณสมบัติอย่างน้อยดังนี้

- CPU แบบ x86-64 processor 4 cores ขึ้นไป
- RAM 4 GB ขึ้นไป
- พื้นที่ว่างบน Harddisk อย่างน้อย 2 GB ขึ้นไป สำหรับการติดตั้งเฉพาะ MATLAB และ 4-6 GB สำหรับติดตั้ง Toolboxes ของโปรแกรม

3.3 สถานที่ทำการทดลองและค้นคว้าข้อมูล

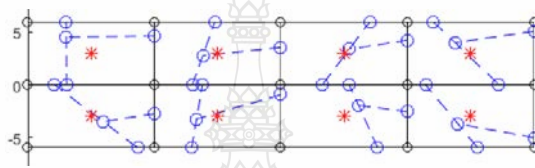
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

3.4 ปัญหาสำหรับงานวิจัย

3.4.1 โดเมนสามเหลี่ยมแบบ 3 ส่วนย่อย (Three Arbitrary Smoothing Domains)

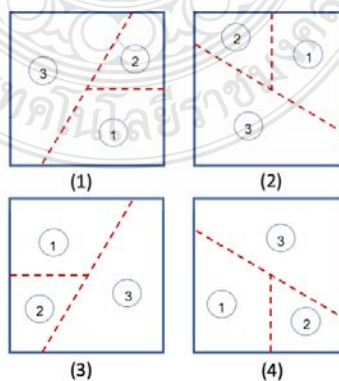
การแบ่งโดเมนสามเหลี่ยมย่อยสำหรับงานวิจัยนี้ เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนใหญ่ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักโดยใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral element) จากนั้นจึง

ทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักดังกล่าวออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอจำนวน 3 ส่วนย่อยโดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสามสอดคล้องกับค่า α ที่กำหนดไว้ รูปที่ 3.1 เป็นการสร้าง smoothing domain ในลักษณะแบบอิสระ จะพบว่าลักษณะรูปร่างของโดเมนสม่ำเสมอที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดและรูปร่างแตกต่างกันอย่างไม่มีทิศทางและสังเกตได้อย่างชัดเจนว่าการกระจายตัวของโดเมนเป็นไปอย่างไรการควบคุม ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณหาค่าผลลัพธ์ของการวิจัยมีความไม่แน่นอน แตกต่างกันไปทุกครั้งที่มีการสุ่มเลือกค่าของ α ใหม่ การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอแบบนี้จึงไม่สามารถนำไปใช้ได้



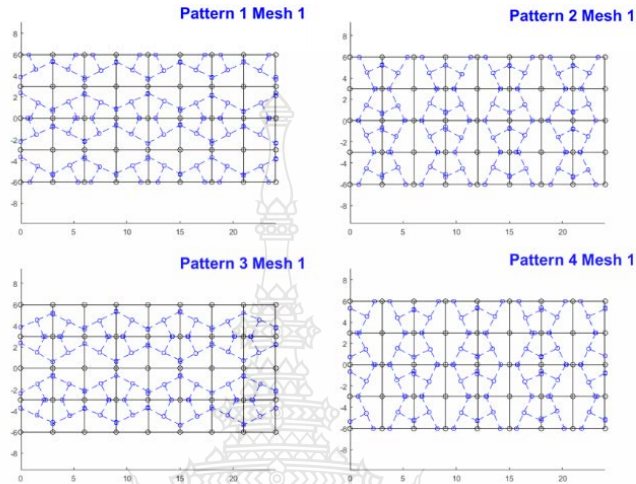
รูปที่ 3.1 การสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอแบบอิสระ

ถึงแม้ว่ารูปแบบของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ โดเมนสามารถมีได้ 34 รูปแบบด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.2 แต่ก็ยังเป็นเพียงลักษณะของการหมุนเอลิเมนต์ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาเท่านั้น โดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 โดเมนดังกล่าวนี้ เมื่อมีการนำไปประยุกต์ใช้โดยอาศัยคุณสมบัติของการกระจายตัวและความสมมาตรแล้ว จึงมีรูปร่างเหมือนกันทุกประการดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.2 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ ผู้วิจัยจึงขอเลือกรูปแบบของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 3 โดเมนย่อยตามแบบที่ (4) ของรูปที่ 3.2 สำหรับการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขต่อไป เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยโดเมนสม่ำเสมอ 3 โดเมนย่อยทั้งสี่แบบสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.3 โดเมนสม่ำเสมอย่อย 3 ส่วนที่เป็นไปได้

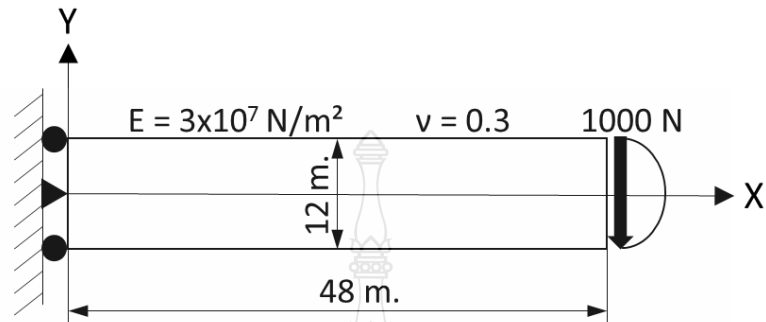


รูปที่ 3.4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 ส่วน

3.4.2 คานยื่นปลาย

ตัวอย่างคานปลายยื่นที่มีความยาว 48 เมตร ความสูง 12 เมตร และมีความหนา 1 เมตร เพื่อกำหนดให้เป็นปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ สำหรับทดสอบขบวนการและผลของการวิเคราะห์ ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ปลายคานด้านขวามี มีแรงกระทำในแนวตั้งโดยมีการกระจายตัวของแรงเป็นรูป พาราโบลาเท่ากับ 1000 นิวตัน ปลายคานด้านซ้ายมีมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (Hinge support) ที่ ระยะกึ่งกลางของความลึก ($D/2$) โดยที่ขอบด้านบนและด้านล่างมีสภาพเป็นที่รองรับแบบเคลื่อนที่ได้

ในแนวตั้ง (Roller support) ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวของค้มีค่าเท่ากับ 3×10^7 และ 0.3 ตามลำดับ

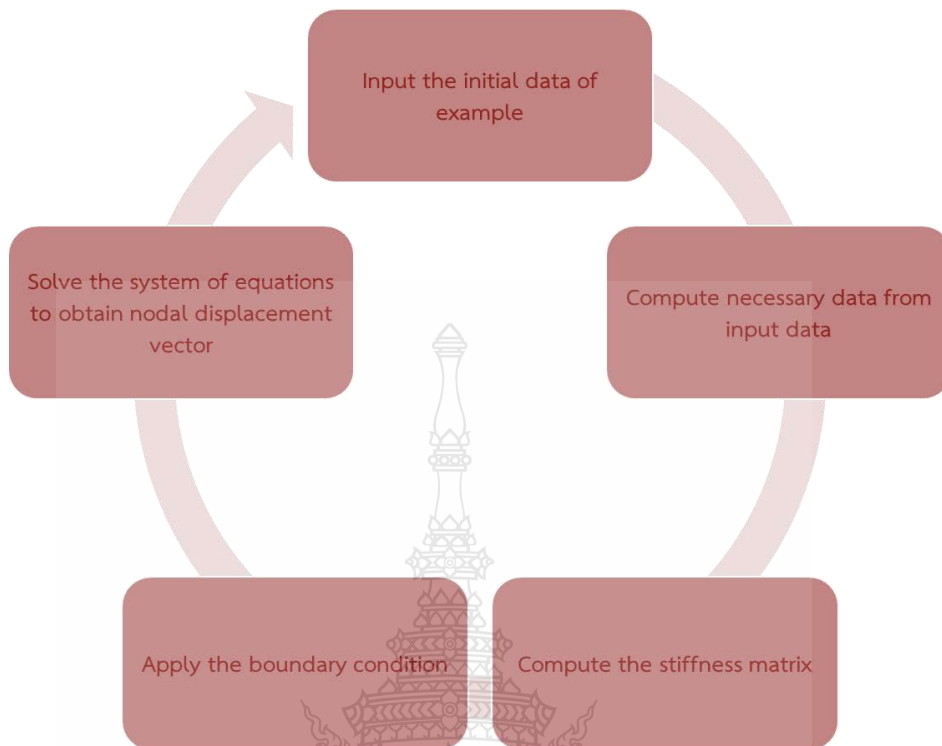


รูปที่ 3.5 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนที่ปลายคาน

โปรแกรมการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาใน 2 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB [9] ถูกนำมาปรับปรุงในส่วนของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 โดเมนย่อย ซึ่งด้านแต่ละด้านมีความยาวเป็นสัดส่วน α ของความยาวด้านเดิม ผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นได้มาจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี [21]

3.5 วิธีการวิเคราะห์และแก้ปัญหาของงานวิจัย

ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้ใช้โปรแกรมวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหา โดยเลือกใช้โปรแกรม MATLAB โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังนี้



รูปที่ 3.6 ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหา

3.5.1 โดเมนสม่ำเสมอแบบ 3 ส่วนย่อย (Three Arbitrary Smoothing Domains)

- 1) การสร้างรูปแบบจำลองโดยเลือกใช้คานยื่นปลาย (Cantilever) เป็นแบบตัวอย่าง
- 2) แบ่งโดเมนของแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ และทำการแบ่งสมุทโดเมนอีกออกเป็น 3 ส่วนต่อ 1 เอลิเมนต์หลัก จะได้เป็นรูปสี่เหลี่ยมต่างๆที่มีความยาวแต่ละด้านไม่เท่ากัน โดยที่การแบ่งขนาดของ element นั้น รูปทรงไม่ควรมีขนาดแหลมเกินไป จึงได้กำหนดระยะเพื่อในการตัดแบ่งขนาดในแต่ละด้าน
- 3) กำหนด shape function ของเอลิเมนต์ เนื่องจากใช้วิธีวิเคราะห์แบบ Smoothed Finite Element จึงคิด shape function เป็น bar element มาต่อกันเป็นรูปทรง
- 4) กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) และคุณสมบัติต่างๆของวัสดุ เช่น ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุมีค่าเท่ากับ 3×10^6 กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร และอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ 0.3
- 5) กำหนดโหลดที่นำมาใช้วิเคราะห์ปัญหา โดยในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้โหลดเป็น Point Load ที่จุดปลายของคานยื่น ณ ตำแหน่งเดียว โดยมีแรงเท่ากับ 1,000 กิโลนิวตัน

3.5.2 ขั้นตอนการหาคำตอบ (Processing)

1) โปรแกรมจะทำการคำนวณหาค่า stiffness matrix [Ke] ของแต่ละเอลิเมนต์ แล้วนำมา รวมกันเป็น global stiffness matrix [K]

2) นำค่า global stiffness matrix [K] ที่ได้มาคำนวณหา displacement (u) โดยใช้ สมการที่ (3.1)

$$Ku = f \quad (3.1)$$

3.5.3 การวิเคราะห์ผลลัพธ์ (Post-Processing)

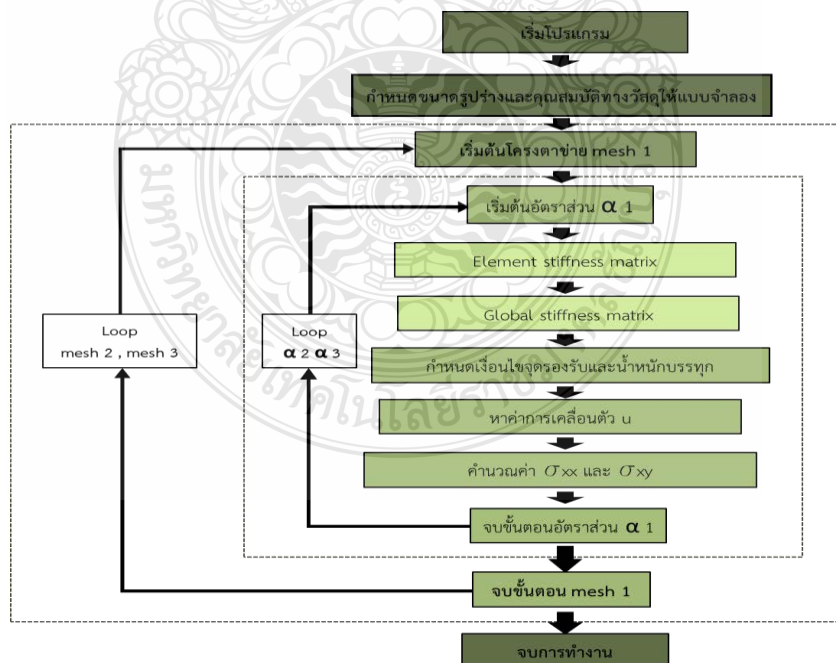
1) คำนวณหาค่า Error norm ของ displacement และ strain energy

2) นำค่า displacement ที่ได้จากขั้นตอน Processing มาคำนวณหาค่า stress (σ) และ strain (ϵ) ที่เกิดขึ้น

3) นำผลลัพธ์ที่ได้มาแสดงผลให้อยู่ในรูปของข้อมูลรูปภาพ (Graphic)

4) เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์กับค่าผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) เพื่อทราบถึงความแม่นยำของวิธีที่ได้ทำการวิจัย

3.5.4 การทำงานของโปรแกรม MATLAB



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม MATLAB ในงานวิจัยชิ้นนี้

การวิเคราะห์ศึกษาปัญหาตัวอย่างในงานวิจัยนี้ ได้ใช้โปรแกรม MATLAB สร้างอัลกอริทึม จากหลักทฤษฎี CS-FEM เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่าง ในการศึกษากำหนดให้แบ่งโครงข่ายเอลิเมนต์เพื่อทำการทดสอบจำนวน 5 ชุดโครงข่าย คือ 16×4 , 24×6 , 32×8 , 40×10 และ 48×12 ตามลำดับ ในแต่ละโครงข่ายจะทำการวิเคราะห์โดยสร้างโดเมน สม่่าเสมอย่อย (smoothing domain) 3 อัตราส่วน α ได้แก่ 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ มีขั้นตอนการวิเคราะห์ ดังนี้

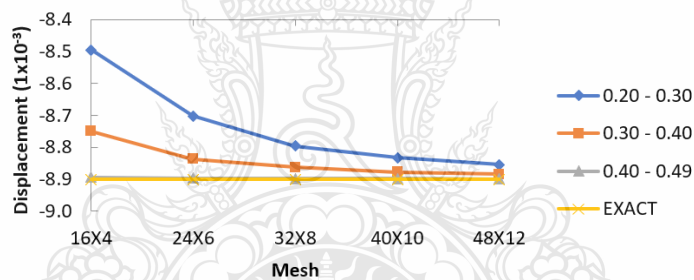
- 1) สร้างแบบจำลองโดยกำหนดขนาดและรูปทรงของตัวอย่างและคุณสมบัติทางวัสดุต่างๆ
- 2) กำหนดจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์และขนาดของโครงตาข่าย
- 3) สร้างโดเมนสม่่าเสมอย่อยตามอัตราส่วน α ที่กำหนดไว้
- 4) คำนวณหาค่า shape function และสร้าง element stiffness matrix
- 5) รวมค่า element stiffness matrix เป็น global stiffness matrix
- 6) กำหนดเงื่อนไขจุดรองรับและน้ำหนักบรรทุกทุกกระทำที่ปลายคาน
- 7) คำนวณหาค่าการเคลื่อนตัว u จากสมการ $Ku=f$
- 8) คำนวณหาค่า normal stress และ shear stress
- 9) เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้กับผลการคำนวณทางทฤษฎี

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

จากการทดสอบคานตัวอย่างด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งพัฒนาโดย [9] แล้วนำมาปรับปรุงในส่วนของการสร้างโดเมนสมำเสมอ 3 โดเมน แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์ โดยการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) กำหนดให้โครงตาข่ายที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์คือ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ ค่า α ที่ใช้แบ่งออกเป็น 3 ช่วงคือ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ และในส่วนของความเค้นตั้งฉากนั้นจะทำการวิเคราะห์ผลที่ระยะ $L/2$ และที่ระยะ $L/4$ โดยที่ L คือความยาวของคานยื่นปลายที่กำหนดไว้

4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน

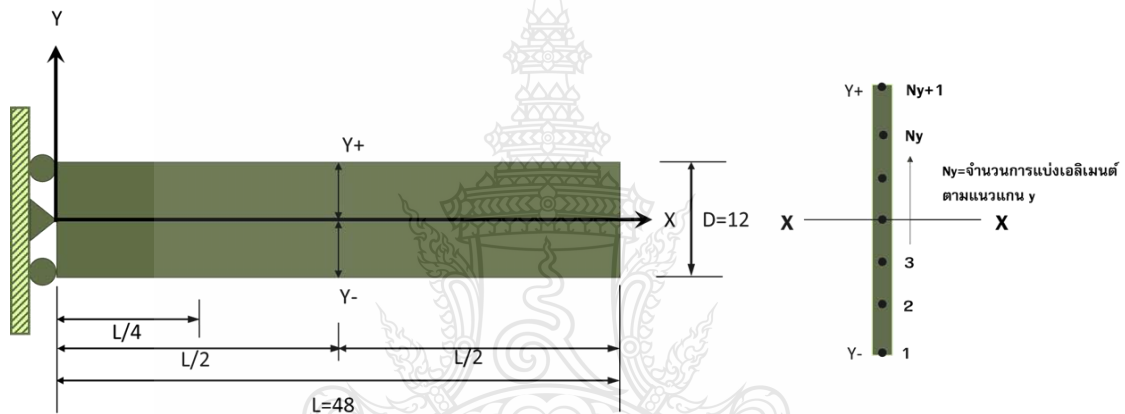


รูปที่ 4.1 ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน (Tip Displacements)

ผลการทดสอบเห็นได้อย่างชัดเจนว่า จำนวนของการแบ่งโครงตาข่ายและค่า α ที่ใช้กำหนดระยะการแบ่งโดเมนสมำเสมอนั้น มีผลต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ โดยที่ใช้ผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นตัววัดค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ ซึ่งผลเฉลยแม่นยำตรงค่าของการโก่งตัวที่ปลายคานเท่ากับ -8.90×10^{-3} จากรูปที่ 4.1 จะเห็นว่า จำนวนการแบ่ง Mesh ที่มากขึ้นส่งผลให้ค่าความแม่นยำเพิ่มมากขึ้นด้วยตามลำดับ อย่างไรก็ตามในกรณีที่จำนวน Mesh เท่ากับ 16x4 ได้ผลจากการวิเคราะห์คือ -8.4955×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงเท่ากับ 4.045×10^{-2} หรือคิดเป็นร้อยละ 4.55 แต่ที่จำนวน Mesh เท่ากับ 48x12 ค่าที่ได้คือ -8.8537×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงเพียง 4.63×10^{-1} หรือร้อยละ 0.52 เท่านั้น และในกรณีของค่า α ก็แสดงผลไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือค่า α ยิ่งมีค่าเข้าใกล้ 0.5 ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะยิ่งมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้น

4.2 ความเค้นตึงฉาก

ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นตึงฉากในแนวราบ σ_{xx} นั้น จะทำการวิเคราะห์โดยใช้ขนาดของโครงตาข่ายและค่า α เป็นตัวควบคุมเหมือนกับการวิเคราะห์ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน คือ จะแบ่งโครงตาข่ายออกเป็น 5 กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มจะแบ่ง α ออกเป็น 3 ช่วง และนำค่าที่ได้ไปเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงต่อไป โดยที่ค่าความเค้นตึงฉากที่นำมาวิเคราะห์จะคิดที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน 2 ตำแหน่ง คือที่ระยะกึ่งกลางของคาน ($L/2$) กับที่ระยะความยาว 1 ใน 4 ของคานตัวอย่าง ($L/4$) สำหรับความเค้นตึงฉากในแนวตั้งนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ จึงไม่ถูกนำมารวมกับการวิเคราะห์ในครั้งนี้



รูปที่ 4.2 ตำแหน่งที่ทำการวิเคราะห์ค่าความเค้นตึงฉาก ระยะ $L/2$ และ $L/4$

ตารางที่ 4.1 ความเค้นตึงฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่าง ๆ ที่ระยะ $L/2$

| Mesh | Alpha | node 1 | node 2 | node 3 | node 4 | node 5 | node 6 | node 7 | node 8 | node 9 | node 10 | node 11 | node 12 | node 13 |
|-------|-------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 16x4 | 0.20 - 0.30 | -874.83 | -472.79 | 3.23 | 477.07 | 875.56 | | | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -890.39 | -496.60 | -0.23 | 497.64 | 876.07 | | | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -887.19 | -499.09 | 0.22 | 496.51 | 887.26 | | | | | | | | |
| | Exact | -1000.00 | -500.00 | 0.00 | 500.00 | 1000.00 | | | | | | | | |
| 24x6 | 0.20 - 0.30 | -920.09 | -653.91 | -328.83 | 1.88 | 324.43 | 654.23 | 925.29 | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -932.82 | -660.99 | -330.14 | -4.47 | 327.23 | 663.29 | 928.34 | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -925.45 | -668.94 | -332.70 | -0.85 | 330.84 | 666.06 | 923.24 | | | | | | |
| | Exact | -1000.00 | -666.67 | -333.33 | 0.00 | 333.33 | 666.67 | 1000.00 | | | | | | |
| 32x8 | 0.20 - 0.30 | -943.76 | -745.81 | -495.13 | -244.90 | -2.20 | 247.53 | 500.94 | 740.80 | 937.97 | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -940.80 | -747.95 | -501.10 | -252.01 | 0.70 | 253.67 | 502.38 | 744.04 | 945.35 | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -943.80 | -746.51 | -496.99 | -250.71 | -4.36 | 247.82 | 501.10 | 749.77 | 945.14 | | | | |
| | Exact | -1000.00 | -750.00 | -500.00 | -250.00 | 0.00 | 250.00 | 500.00 | 750.00 | 1000.00 | | | | |
| 40x10 | 0.20 - 0.30 | -959.28 | -789.18 | -597.61 | -395.64 | -197.61 | 1.80 | 196.09 | 397.57 | 592.08 | 791.52 | 968.94 | | |
| | 0.30 - 0.40 | -950.38 | -796.58 | -598.57 | -396.96 | -195.79 | 2.92 | 201.83 | 399.13 | 598.36 | 800.00 | 954.12 | | |
| | 0.40 - 0.49 | -957.89 | -797.69 | -601.99 | -400.56 | -198.94 | 0.50 | 198.37 | 398.17 | 598.14 | 799.06 | 956.32 | | |
| | Exact | -1000.00 | -800.00 | -600.00 | -400.00 | -200.00 | 0.00 | 200.00 | 400.00 | 600.00 | 800.00 | 1000.00 | | |
| 48x12 | 0.20 - 0.30 | -970.10 | -820.89 | -669.83 | -493.36 | -332.99 | -163.41 | 0.25 | 163.66 | 328.34 | 497.70 | 663.46 | 829.16 | 961.25 |
| | 0.30 - 0.40 | -965.70 | -833.43 | -662.44 | -496.25 | -331.93 | -162.15 | 2.30 | 168.21 | 331.58 | 497.48 | 663.48 | 835.56 | 957.73 |
| | 0.40 - 0.49 | -964.38 | -836.20 | -665.12 | -500.95 | -333.29 | -165.45 | -0.42 | 166.88 | 334.32 | 500.75 | 667.63 | 831.56 | 961.53 |
| | Exact | -1000.00 | -833.33 | -666.67 | -500.00 | -333.33 | -166.67 | 0.00 | 166.67 | 333.33 | 500.00 | 666.67 | 833.33 | 1000.00 |

จากตารางที่ 4.1 พบว่า จำนวนจุดต่อของหน้าตัดคาน ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวคาน ($L/2$) มีจำนวนไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับจำนวนของการแบ่งโครงตาข่าย เพื่อความสะดวก ผู้เขียนจะใช้จุดต่อ 2 จุดซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างเข้ามาตามลำดับสำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16×4) จุดต่อ 2, 6 (โครงตาข่าย 24×6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32×8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40×10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48×12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ เหล่านี้ในกรณีที่มี α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 8.75, 3.88, 2.23, 1.62 และ 1.41 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 6.13, 3.01, 1.93, 1.45 และ 1.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 5.86, 2.75, 1.70, 1.16 และ 0.82 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ตามลำดับ

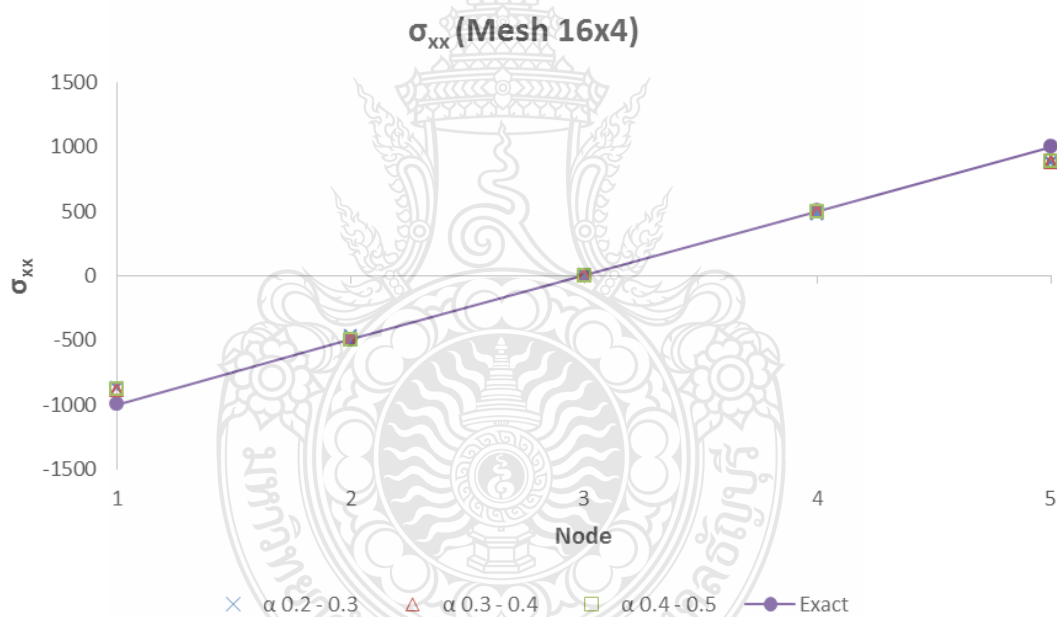
ตารางที่ 4.2 ความเค้นตั้งฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่าง ๆ ที่ระยะ $L/4$

| Mesh | Alpha | node 1 | node 2 | node 3 | node 4 | node 5 | node 6 | node 7 | node 8 | node 9 | node 10 | node 11 | node 12 | node 13 |
|-------|-------------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 16x4 | 0.20 - 0.30 | -1302.76 | -717.03 | -7.33 | 712.39 | 1298.04 | | | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -1322.98 | -740.04 | 1.53 | 732.42 | 1312.99 | | | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -1328.07 | -758.92 | -4.76 | 758.83 | 1333.67 | | | | | | | | |
| | Exact | -1500.00 | -750.00 | 0.00 | 750.00 | 1500.00 | | | | | | | | |
| 24x6 | 0.20 - 0.30 | -1394.81 | -976.00 | -493.83 | -5.89 | 477.16 | 976.68 | 1370.29 | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -1382.77 | -992.42 | -506.24 | -1.02 | 496.09 | 992.35 | 1385.23 | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -1388.07 | -1000.85 | -507.67 | 0.91 | 505.53 | 1002.76 | 1385.66 | | | | | | |
| | Exact | -1500.00 | -1000.00 | -500.00 | 0.00 | 500.00 | 1000.00 | 1500.00 | | | | | | |
| 32x8 | 0.20 - 0.30 | -1425.05 | -1109.08 | -741.53 | -371.47 | -4.15 | 366.61 | 741.71 | 1114.27 | 1430.02 | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -1405.20 | -1122.08 | -744.92 | -374.10 | 1.22 | 373.87 | 746.35 | 1116.95 | 1416.70 | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -1423.19 | -1130.14 | -745.50 | -370.08 | -1.10 | 372.49 | 753.57 | 1127.63 | 1413.34 | | | | |
| | Exact | -1500.00 | -1125.00 | -750.00 | -375.00 | 0.00 | 375.00 | 750.00 | 1125.00 | 1500.00 | | | | |
| 40x10 | 0.20 - 0.30 | -1444.96 | -1180.05 | -889.30 | -597.85 | -295.83 | -0.61 | 296.56 | 591.31 | 895.93 | 1188.14 | 1438.74 | | |
| | 0.30 - 0.40 | -1442.41 | -1193.47 | -893.41 | -600.64 | -299.62 | 2.40 | 301.36 | 596.85 | 894.87 | 1191.63 | 1439.80 | | |
| | 0.40 - 0.49 | -1431.10 | -1197.93 | -898.66 | -595.53 | -298.24 | -5.20 | 298.14 | 604.10 | 900.15 | 1203.38 | 1432.55 | | |
| | Exact | -1500.00 | -1200.00 | -900.00 | -600.00 | -300.00 | 0.00 | 300.00 | 600.00 | 900.00 | 1200.00 | 1500.00 | | |
| 48x12 | 0.20 - 0.30 | -1448.54 | -1241.00 | -997.86 | -745.18 | -498.13 | -249.01 | -0.32 | 251.80 | 500.32 | 748.52 | 992.62 | 1246.92 | 1437.17 |
| | 0.30 - 0.40 | -1451.04 | -1242.92 | -997.90 | -749.32 | -494.76 | -248.06 | 2.98 | 250.88 | 497.32 | 750.34 | 992.84 | 1256.62 | 1447.48 |
| | 0.40 - 0.49 | -1446.18 | -1249.04 | -1001.52 | -752.26 | -498.47 | -249.91 | 3.42 | 253.73 | 504.50 | 753.35 | 999.48 | 1247.66 | 1442.23 |
| | Exact | -1500.00 | -1250.00 | -1000.00 | -750.00 | -500.00 | -250.00 | 0.00 | 250.00 | 500.00 | 750.00 | 1000.00 | 1250.00 | 1500.00 |

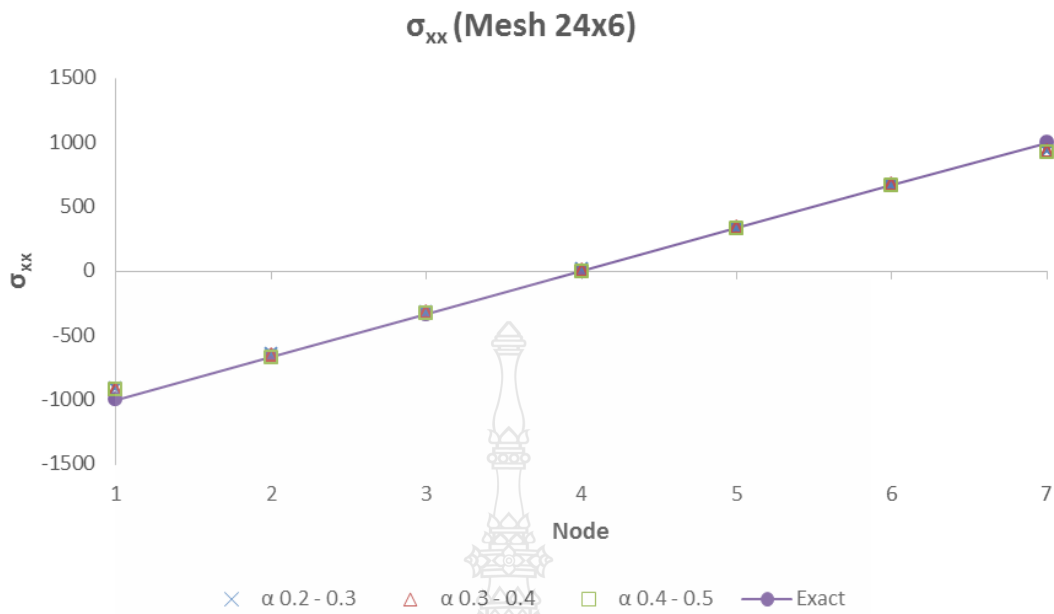
และจากตารางที่ 4.2 เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง 1 ใน 4 ของความยาวคาน ($L/4$) ผู้เขียนจะใช้จุดต่อ 2 จุดซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างของคานเข้ามาตามลำดับ เช่นเดียวกับที่ใช้วิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ($L/2$) สำหรับเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16×4) จุดต่อ 2, 6 (โครงตาข่าย 24×6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32×8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40×10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48×12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จาก

ทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ เหล่านั้นในกรณีที่มี α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 9.01, 4.37, 2.18, 1.64 และ 0.99 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 6.99, 3.17, 1.82, 1.16 และ 0.97 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 6.23, 3.01, 1.83, 1.23 และ 0.95 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ

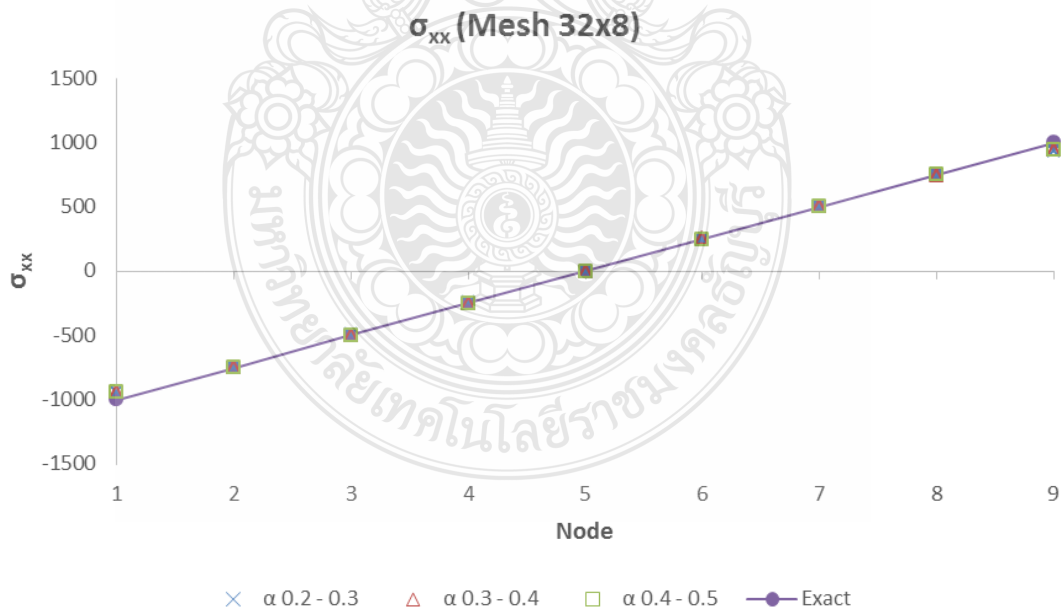
ค่าต่าง ๆ ในตารางที่ 4.1 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นตึงฉาก ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดังรูปที่ 4.3 ถึงรูปที่ 4.7 และเช่นเดียวกันสำหรับค่าในตารางที่ 4.2 สามารถนำไปวาดกราฟแสดงผลได้ดังรูปที่ 4.8 ถึง รูปที่ 4.12



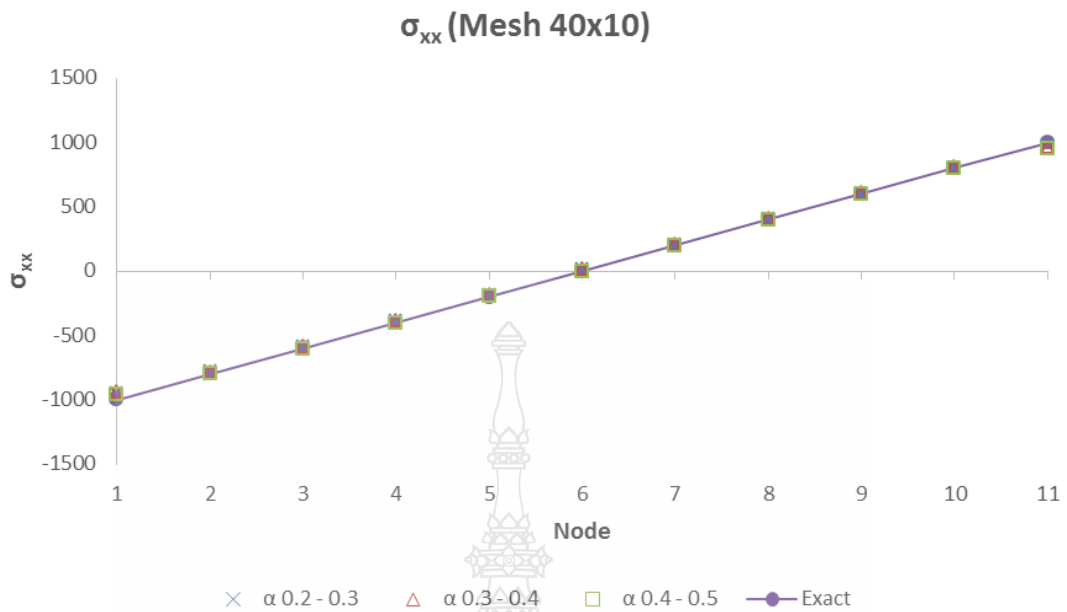
รูปที่ 4.3 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 16x4 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน $L/2$



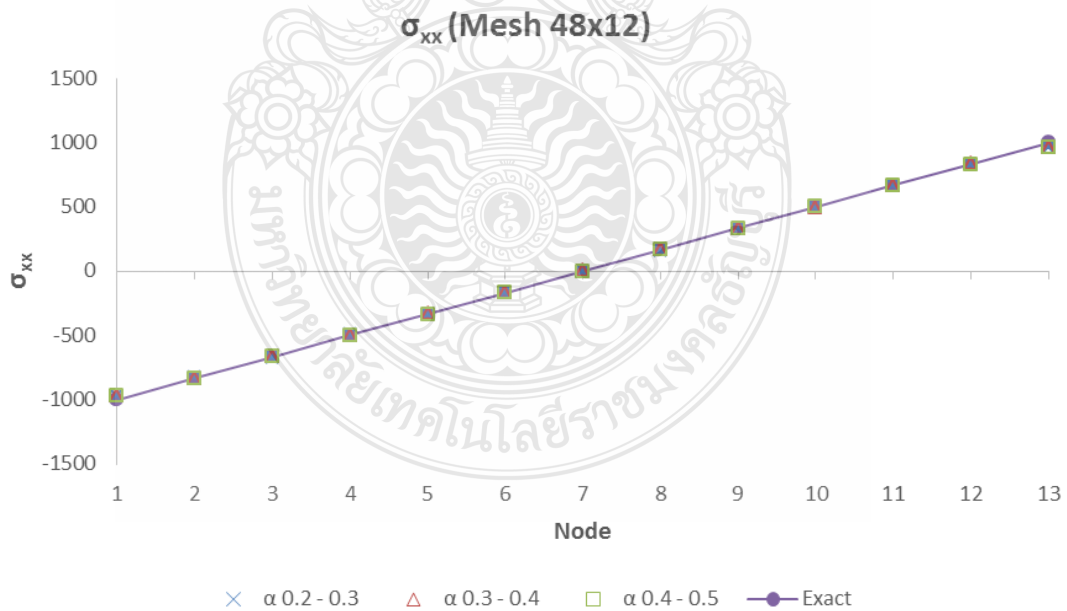
รูปที่ 4.4 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 24x6 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/2



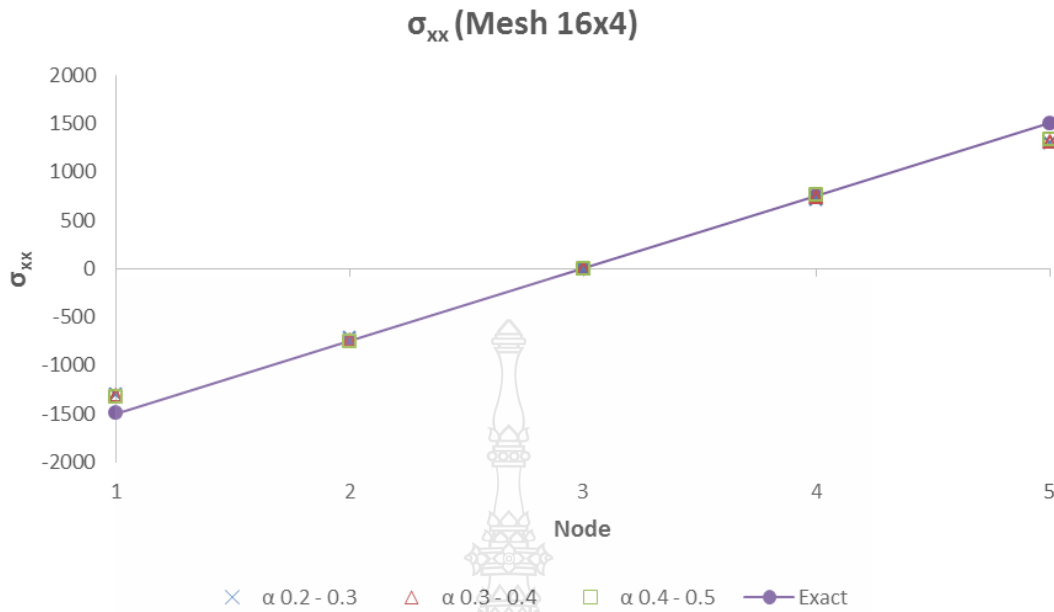
รูปที่ 4.5 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 32x8 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/2



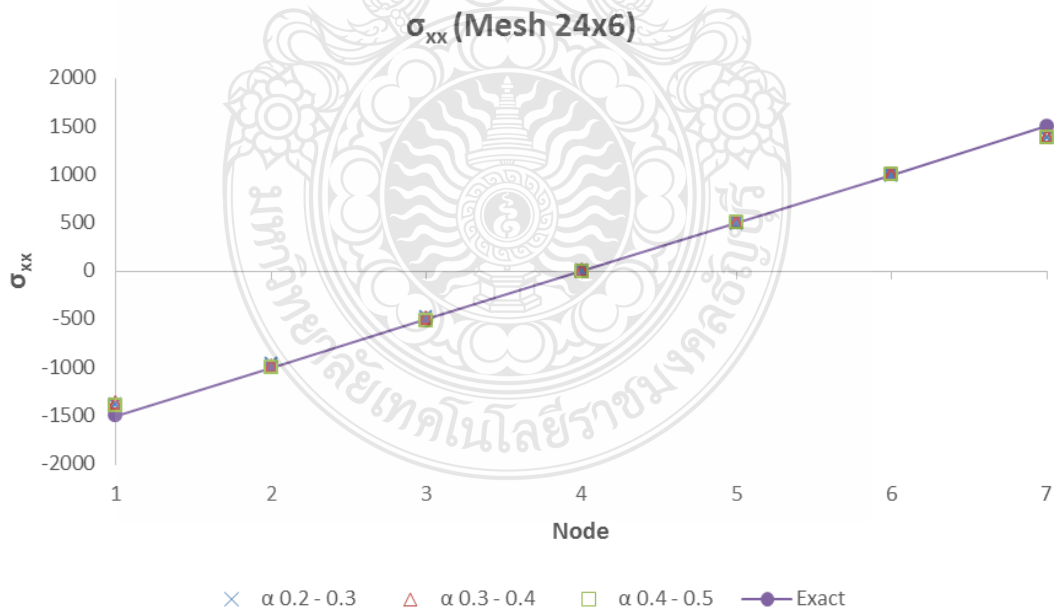
รูปที่ 4.6 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 40x10 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/2



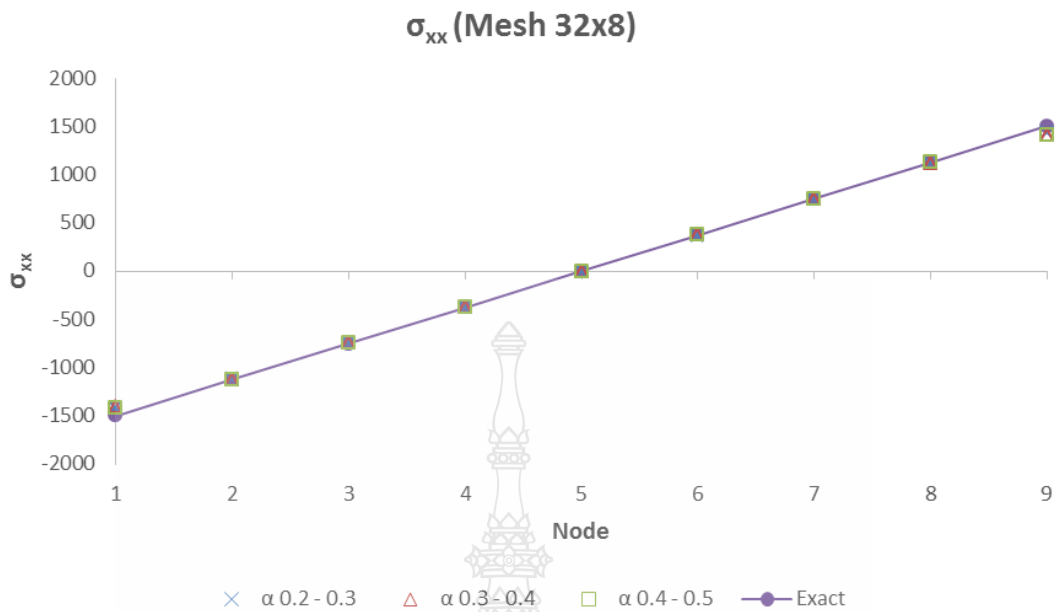
รูปที่ 4.7 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 48x12 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/2



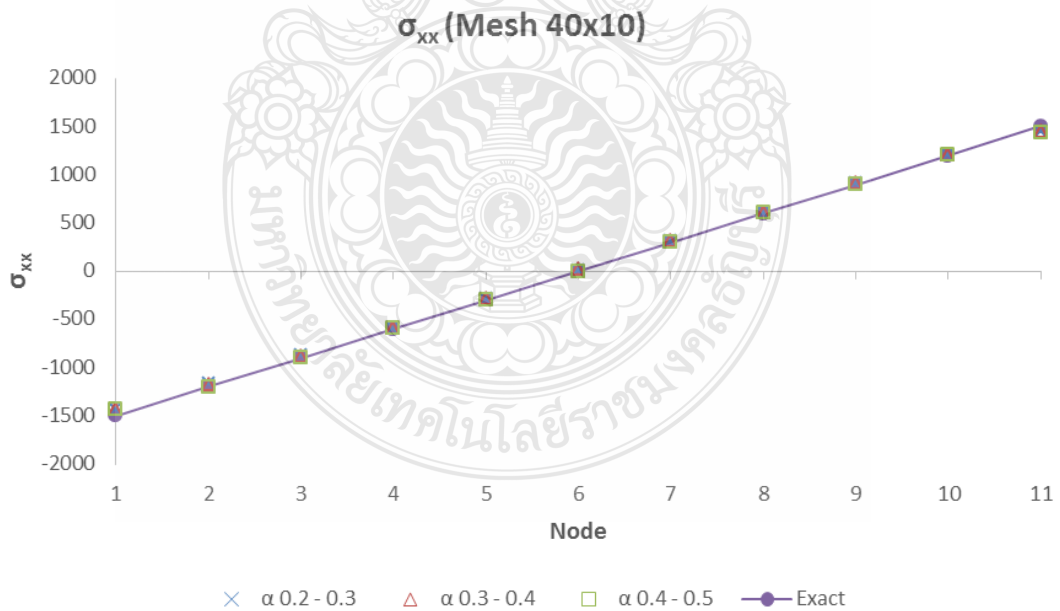
รูปที่ 4.8 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 16x4 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4



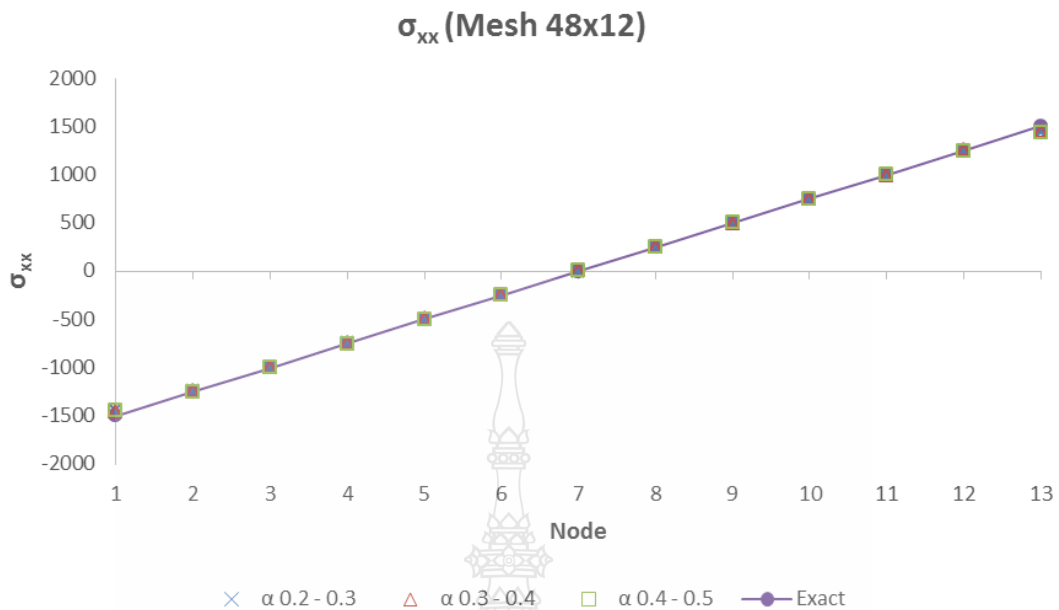
รูปที่ 4.9 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 24x6 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4



รูปที่ 4.10 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 32x8 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4

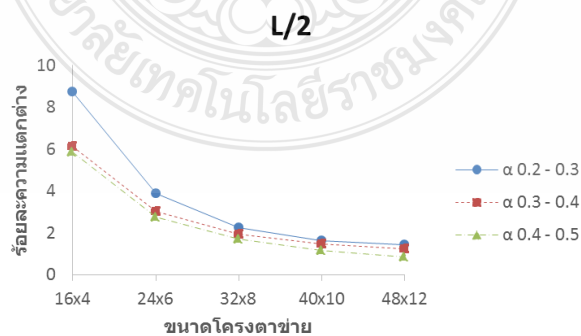


รูปที่ 4.11 ค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 40x10 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4



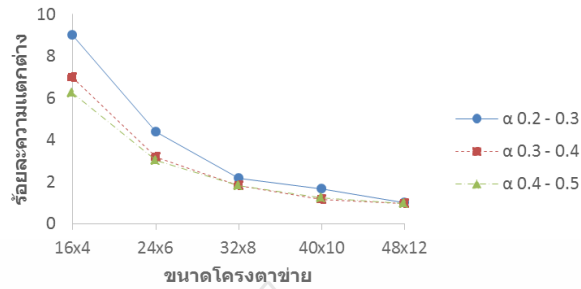
รูปที่ 4.12 ค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 48x12 ที่ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/4

รูปที่ 4.13 และ 4.14 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าความเค้นตึงฉากดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่าย ณ ตำแหน่งหน้าตัดคาน L/2 และ L/4 ตามลำดับ ซึ่งพบว่าทั้งสองตำแหน่งที่ทำการวิเคราะห์นั้น เมื่อพิจารณาแล้ว สังเกตเห็นว่าค่าของ α ในช่วงของโครงตาข่ายที่มีขนาดหยابกว่านั้น ส่งผลต่อร้อยละของความแตกต่างอย่างชัดเจน และค่อย ๆ น้อยลงไปจนกระทั่งไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญเมื่อขนาดของโครงตาข่ายเพิ่มขึ้น



รูปที่ 4.13 ความแตกต่างของค่าความเค้นตึงฉาก (σ_{xx}) กับค่าทางทฤษฎี ที่ตำแหน่งหน้าตัด L/2

L/4



รูปที่ 4.14 ความแตกต่างของค่าความเค้นตั้งฉาก (σ_{xx}) กับค่าทางทฤษฎี ที่ตำแหน่งหน้าตัด L/4

4.3 ความเค้นเฉือน

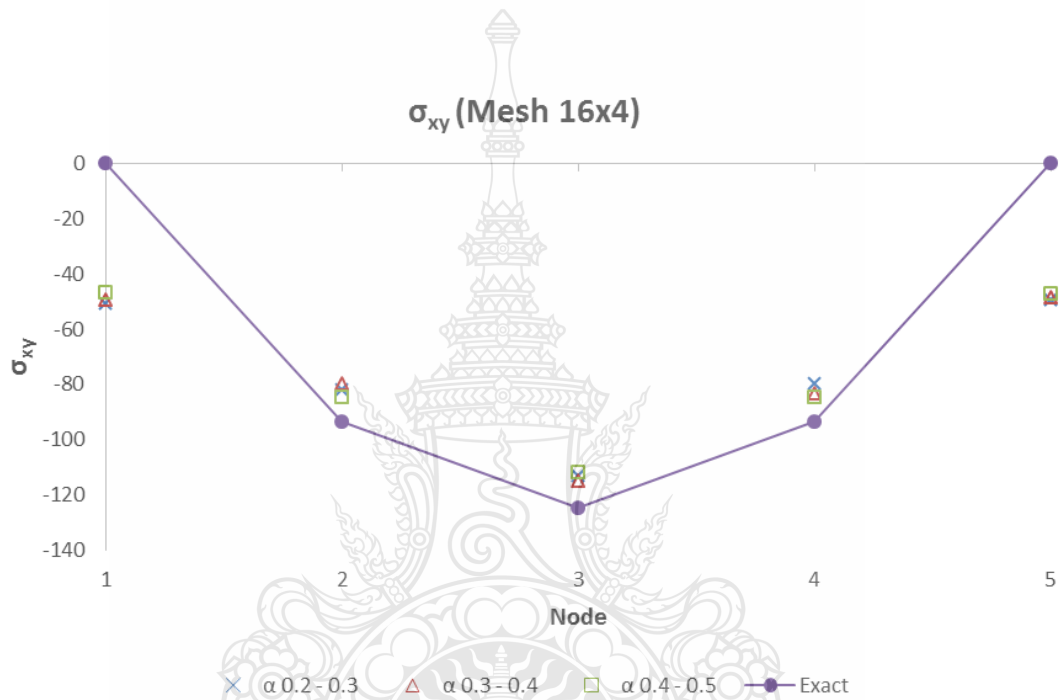
ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นเฉือน σ_{xy} นั้น จะใช้การวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกันกับการวิเคราะห์ความเค้นตั้งฉากที่ผ่านมา แต่จะทำการวิเคราะห์เพียงแค่ตำแหน่งที่กึ่งกลางคาน (L/2) เนื่องจากลักษณะการกระจายตัวของทั้งความยาวคานนั้นมีลักษณะที่เหมือนกัน ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.15 ถึงรูปที่ 4.19 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.3 ค่าความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่โครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ

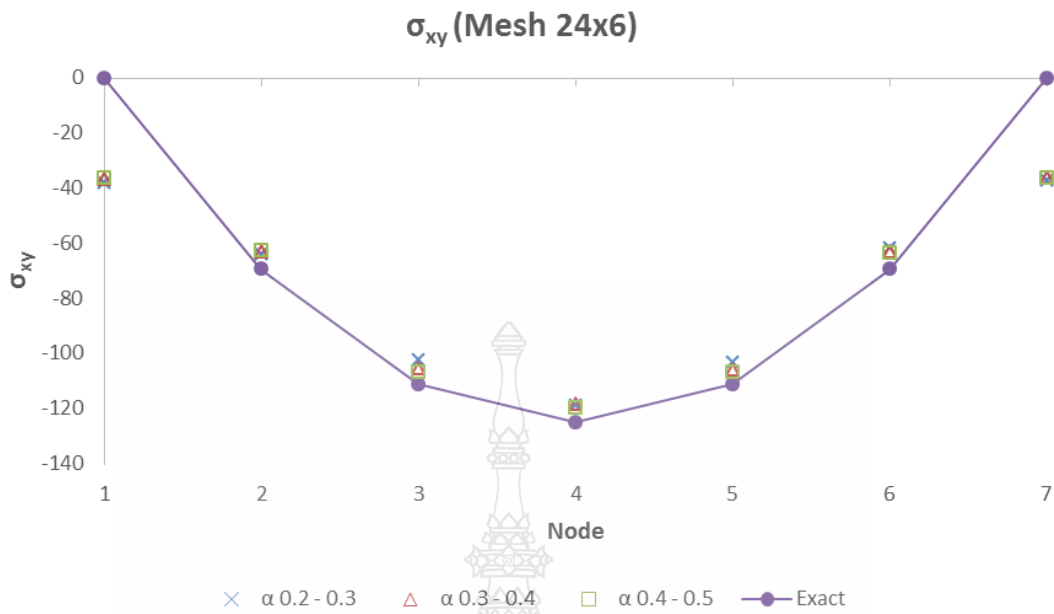
| Mesh | Alpha | node 1 | node 2 | node 3 | node 4 | node 5 | node 6 | node 7 | node 8 | node 9 | node 10 | node 11 | node 12 | node 13 |
|-------|-------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 16x4 | 0.20 - 0.30 | -51.08 | -82.16 | -113.40 | -80.05 | -49.73 | | | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -49.65 | -79.81 | -115.23 | -83.71 | -48.94 | | | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -46.95 | -84.79 | -112.01 | -84.90 | -47.59 | | | | | | | | |
| | Exact | 0.00 | -93.75 | -125.00 | -93.75 | 0.00 | | | | | | | | |
| 24x6 | 0.20 - 0.30 | -38.27 | -64.17 | -102.72 | -119.26 | -103.67 | -62.11 | -37.45 | | | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -37.02 | -63.62 | -105.68 | -118.91 | -106.43 | -63.26 | -36.82 | | | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -36.10 | -62.75 | -106.89 | -119.68 | -106.85 | -63.24 | -36.23 | | | | | | |
| | Exact | 0.00 | -69.44 | -111.11 | -125.00 | -111.11 | -69.44 | 0.00 | | | | | | |
| 32x8 | 0.20 - 0.30 | -29.36 | -52.82 | -91.01 | -113.36 | -120.73 | -114.87 | -88.66 | -52.75 | -29.87 | | | | |
| | 0.30 - 0.40 | -27.56 | -51.30 | -90.47 | -115.48 | -121.48 | -114.78 | -89.54 | -53.08 | -27.94 | | | | |
| | 0.40 - 0.49 | -27.19 | -53.46 | -92.27 | -114.55 | -121.90 | -114.59 | -90.64 | -51.65 | -26.40 | | | | |
| | Exact | 0.00 | -54.69 | -93.75 | -117.19 | -125.00 | -117.19 | -93.75 | -54.69 | 0.00 | | | | |
| 40x10 | 0.20 - 0.30 | -20.19 | -43.25 | -79.82 | -103.52 | -116.68 | -123.79 | -118.22 | -104.40 | -77.86 | -42.81 | -23.78 | | |
| | 0.30 - 0.40 | -21.36 | -43.31 | -79.34 | -103.08 | -117.39 | -122.35 | -118.90 | -102.13 | -76.50 | -44.02 | -24.99 | | |
| | 0.40 - 0.49 | -22.30 | -43.87 | -77.52 | -102.64 | -118.80 | -122.85 | -119.02 | -103.38 | -78.50 | -42.57 | -23.04 | | |
| | Exact | 0.00 | -45.00 | -80.00 | -105.00 | -120.00 | -125.00 | -120.00 | -105.00 | -80.00 | -45.00 | 0.00 | | |
| 48x12 | 0.20 - 0.30 | -20.95 | -39.89 | -67.44 | -91.50 | -109.47 | -119.82 | -123.68 | -119.52 | -108.45 | -92.37 | -66.85 | -37.54 | -22.11 |
| | 0.30 - 0.40 | -18.74 | -36.72 | -67.99 | -93.08 | -110.35 | -119.99 | -123.15 | -120.06 | -109.96 | -92.69 | -67.79 | -36.35 | -20.28 |
| | 0.40 - 0.49 | -18.10 | -37.02 | -68.18 | -91.61 | -110.59 | -120.72 | -124.37 | -119.16 | -109.64 | -92.49 | -67.88 | -36.99 | -19.64 |
| | Exact | 0.00 | -38.19 | -69.44 | -93.75 | -111.11 | -121.53 | -125.00 | -121.53 | -111.11 | -93.75 | -69.44 | -38.19 | 0.00 |

จากตารางที่ 4.3 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันกับความเค้นตั้งฉาก

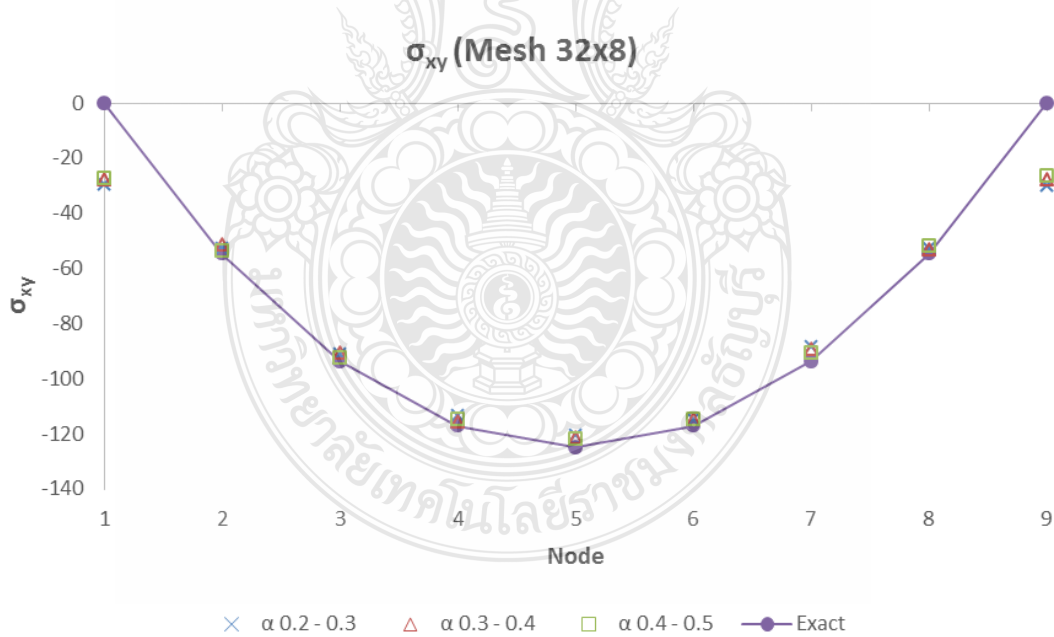
ในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 12.08, 7.40, 3.43, 2.09 และ 2.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 11.13, 6.25, 3.35, 2.32 และ 1.88 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 9.80, 6.09, 2.80, 2.25 และ 1.71 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ



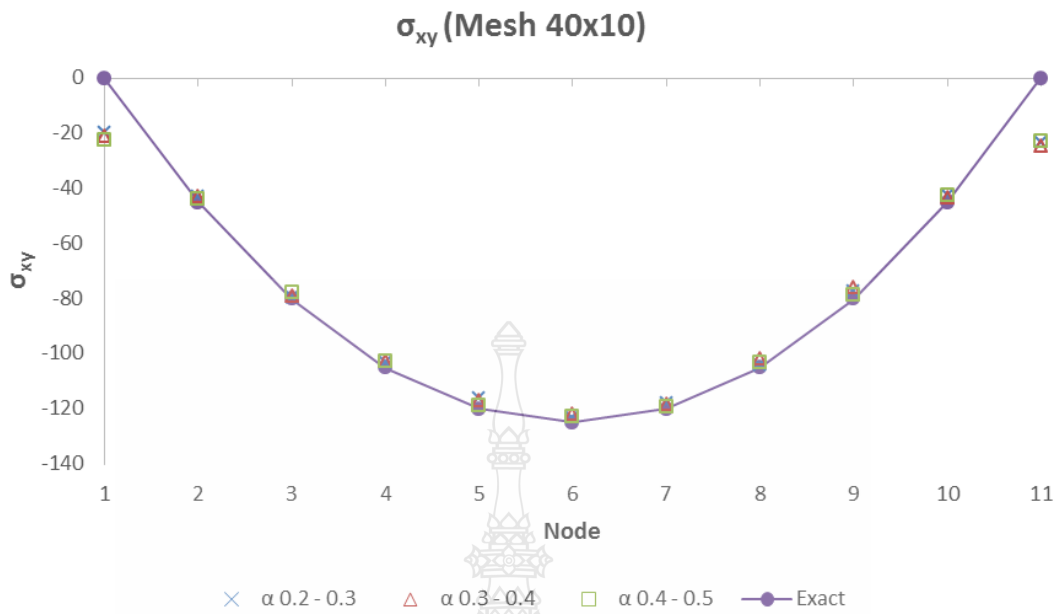
รูปที่ 4.15 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 16x4



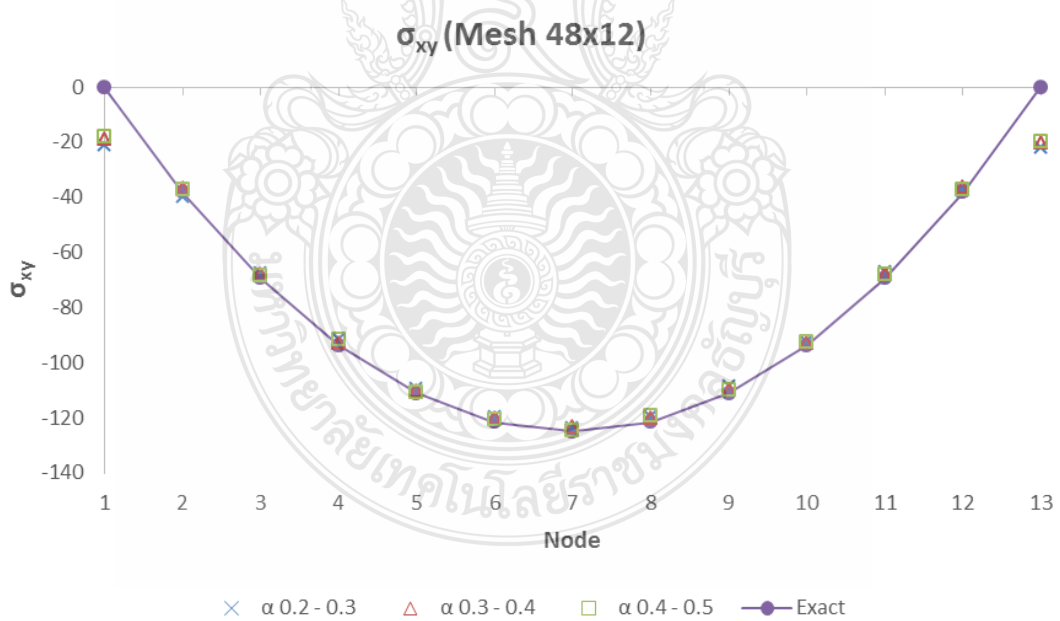
รูปที่ 4.16 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 24x6



รูปที่ 4.17 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 32x8



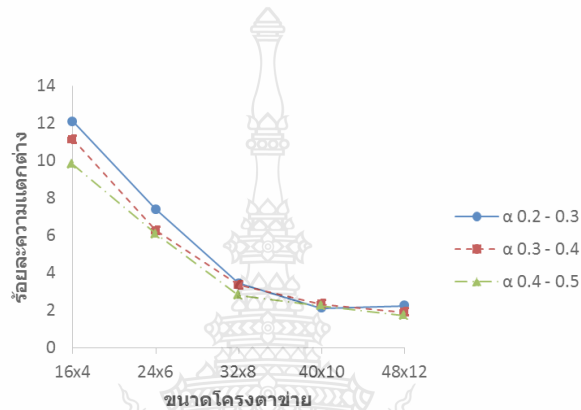
รูปที่ 4.18 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 40x10



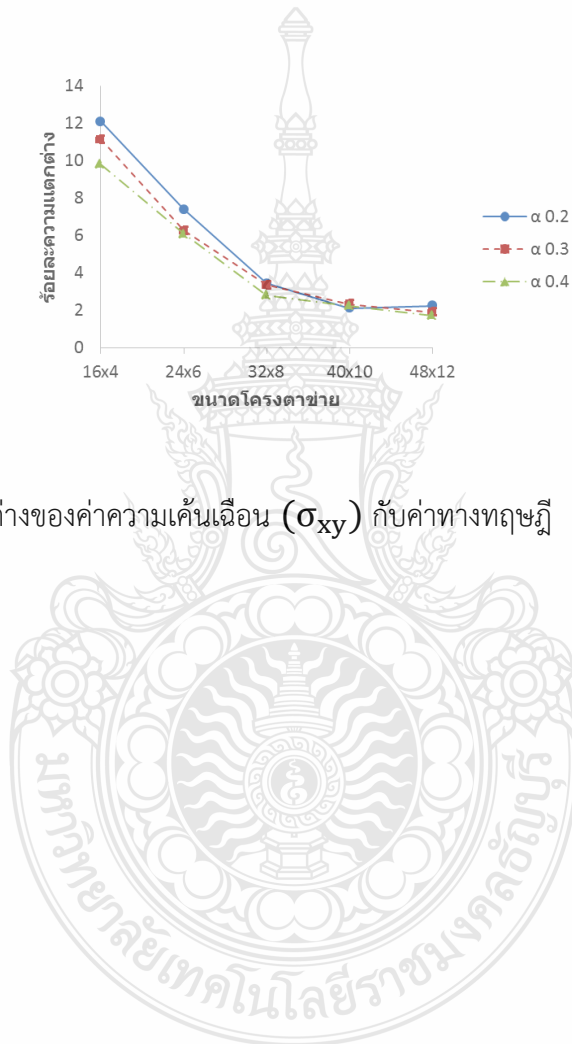
รูปที่ 4.19 ค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ของขนาดโครงตาข่าย 48x12

ค่าต่าง ๆ ในตารางที่ 4.3 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดังรูปที่ 4.15 ถึงรูปที่ 4.19 เช่นเดียวกับในกรณีของความเค้นตั้งฉาก

รูปที่ 4.20 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าความเค้นเฉือนดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่ายซึ่งพบว่า การเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้มีความละเอียดมากขึ้นส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณมากกว่าการเพิ่มค่าของ α



รูปที่ 4.20 ความแตกต่างของค่าความเค้นเฉือน (σ_{xy}) กับค่าทางทฤษฎี



บทที่ 5

สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลที่ได้จากการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสมำเสมอย่อยทรงเหลี่ยมสี่หน้าแบบ 3 ส่วนภายในเอลิเมนต์หลัก ซึ่งอาศัยหลักความกึ่งสมมาตรของ Unit cell เข้ามาช่วยเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของโดเมนสมำเสมอที่สร้างขึ้นตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติของคานซึ่งรับแรงเฉือนในรูปฟังก์ชันพาราโบลาที่ปลายอิสระนี้ มีลักษณะการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงหรือค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีในสองรูปแบบด้วยกันโดยมีความแตกต่างเพียงร้อยละ 1-2 สำหรับความเค้นทั้งสองแบบ

กล่าวคือแบบที่หนึ่ง สำหรับขนาดของโครงตาข่าย เมื่อมีการเพิ่มจำนวนของโครงตาข่ายให้มากขึ้น ซึ่งเป็นที่คาดการณ์ได้ สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขที่ว่า ยิ่งความละเอียดของโครงตาข่ายมากขึ้น ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ก็สูงตามไปด้วย หากแต่ต้องแลกมาด้วยการประมวลผลทางคอมพิวเตอร์ที่นานขึ้นและใช้ทรัพยากรของเครื่องที่มากขึ้น สำหรับรูปแบบที่สองซึ่งเป็นค่าของ α นั้น ก็เป็นไปในทิศทางเดียวกันกับการเพิ่มจำนวนของโครงตาข่าย ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้แปรผันโดยตรงกับค่า α ที่เข้าใกล้ 0.5 หรือที่ตำแหน่งกึ่งกลางของเอลิเมนต์หลัก

ผลการวิเคราะห์ที่ได้สำหรับงานวิจัยนี้มี 3 รูปแบบ ได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement), ค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) และค่าความเค้นเฉือน (Shear Stress) สำหรับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งเมื่อพิจารณาจากการควบคุมขนาดของโครงตาข่ายจะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีแนวโน้มที่จะลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงตามจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้น อย่างในกรณีที่แบ่งเอลิเมนต์โครงตาข่ายเป็น 16×4 มีค่าความคลาดเคลื่อนเป็นร้อยละ 4.55 แต่ที่การแบ่งเอลิเมนต์โครงตาข่ายเป็น 48×12 มีค่าความคลาดเคลื่อนเพียง 0.52 เท่านั้น และสำหรับค่าความเค้นตั้งฉากกับค่าความเค้นเฉือน เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งค่า α อยู่ในช่วง 0.2-0.3 สำหรับโครงตาข่ายทั้ง 5 ช่วง ตั้งแต่ที่การแบ่งเป็น 16×4 ไปจนถึง 48×12 แล้วนั้น ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นร้อยละ 8.75, 3.88, 2.23, 1.62 และ 1.41 สำหรับค่าความเค้นตั้งฉาก และมีค่าเป็นร้อยละ 12.08, 7.40, 3.43, 2.09 และ 2.24 สำหรับค่าความเค้นเฉือน และที่ตำแหน่งค่า α ในช่วง 0.3-0.4 ที่จำนวนการแบ่งโครงตาข่ายลักษณะเดียวกันกับแบบแรก ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อนเป็นร้อยละ 6.13, 3.01, 1.93, 1.45 และ 1.24 สำหรับค่าความเค้นตั้งฉาก และมีค่าเป็นร้อยละ 11.13, 6.25, 3.35, 2.32 และ 1.88 สำหรับค่าความเค้นเฉือน และเช่นเดียวกันที่ตำแหน่งค่า α อยู่ในช่วง 0.4-0.5 เมื่อพิจารณา

ที่จำนวนการแบ่งโครงตาข่าย 16×4 ถึง 48×12 ค่าที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ 5.86, 2.75, 1.70, 1.16 และ 0.82 สำหรับค่าความเค้นตั้งฉาก และมีค่าเป็นร้อยละ 9.80, 6.09, 2.80, 2.25 และ 1.71 สำหรับค่าความเค้นเฉือน

จากผลการวิเคราะห์ทั้งหมดที่ได้ สังเกตได้ว่าการควบคุมขนาดของโครงตาข่ายและการควบคุมตำแหน่ง α นั้นส่งผลให้ผลลัพธ์ลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงจริงตามที่ได้คาดการณ์ไว้ แต่มีข้อสังเกตจากการวิเคราะห์ในครั้งนี้ว่าการควบคุมตำแหน่งของค่า α ส่งผลต่อการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงที่กำหนดไว้น้อยกว่าการควบคุมขนาดของโครงตาข่ายอย่างเห็นได้ชัด

เนื่องจากงานวิจัยในครั้งนี้ มีการประยุกต์ใช้หลักความสมมาตรของ Unit cell เพื่อกระจายรูปแบบความต่อเนื่องของโดเมนสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งขอบเขตของปัญหาที่กำลังพิจารณาร่วมด้วย อาศัยการทำงานร่วมกันของทั้งสามปัจจัยดังกล่าวนี้ ผู้เขียนมั่นใจว่าวิธีนี้จะเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่เป็นประโยชน์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นเช่น ความไม่ต่อเนื่องของขอบเขตของปัญหา (Discontinuity) หรือปัญหากลศาสตร์การแตกหัก (Fracture Mechanics) ซึ่งมักจะพบการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูง (Stress Concentration) ณ บริเวณปลายรอยแตก (Crack tips) โดยการศึกษาใช้ทั้งค่า α และขนาดโครงตาข่ายที่มากขึ้นร่วมกับการจัดรูปแบบสมมาตรในบริเวณดังกล่าว เพื่อให้เกิดความแม่นยำในการคำนวณสูง ในขณะที่บริเวณที่ไกลออกไปซึ่งได้รับอิทธิพลจากการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูงดังกล่าวก็น้อยนั้น อาจพิจารณาใช้ค่า α และขนาดโครงตาข่ายที่น้อยลงมา แต่ยังคงให้ค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับที่ยอมรับได้ อันจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณให้ดีขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากผลการศึกษาของงานวิจัยครั้งนี้เป็นพื้นฐานนำไปสู่องค์ความรู้ที่สามารถนำไปใช้ในการต่อยอดและเป็นข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญ สำหรับการพัฒนาการเลือกโดเมนสำหรับสร้างเอลิเมนต์ที่สามารถให้ผลการคำนวณที่มีความแม่นยำสูงในขณะเดียวกันก็ใช้เวลาในการคำนวณสั้นลง เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น การต่อยอดงานวิจัยนี้อาจทำในลักษณะที่นำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับสมมุติเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างเอลิเมนต์ย่อยในแบบอื่น ๆ เช่น Node-based หรือ Edge-based เพื่อแก้ปัญหาเฉพาะแบบต่อไป

บรรณานุกรม

- [1] Lee NS, Bathe KJ. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for numerical Methods in engineering*. 1993;36(20):3553-76.
- [2] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*. 1994;37(2):229-56.
- [3] Babuška I, Banerjee U, Osborn JE. Generalized finite element methods—main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*. 2004;1(01):67-103.
- [4] Beirão da Veiga L, Brezzi F, Cangiani A, Manzini G, Marini LD, Russo A. Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013;23(01):199-214.
- [5] Francis A, Ortiz-Bernardin A, Bordas SP, Natarajan S. Linear smoothed polygonal and polyhedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017;109(9):1263-88.
- [6] Sukumar N, Tabarraei A. Conforming polygonal finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;61(12):2045-66.
- [7] Talischi C, Paulino GH, Pereira A, Menezes IF. PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2012;45(3):309-28.
- [8] Liu G, Dai K, Nguyen TT. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*. 2007;39(6):859-77.
- [9] Liu G-R, Trung N. *Smoothed finite element methods*: CRC press; 2016.
- [10] Liu G, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010;84(10):1222-56.
- [11] Lee C-K. *Gradient smoothing in finite elasticity: near-incompressibility*: Cardiff University; 2016.

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [12] Dai K, Liu G. Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM). *Journal of Sound and Vibration*. 2007;301(3-5):803-20.
- [13] Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2009;25(8):882-906.
- [14] Bordas SP, Rabczuk T, Hung N-X, Nguyen VP, Natarajan S, Bog T, et al. Strain smoothing in FEM and XFEM. *Computers & structures*. 2010;88(23-24):1419-43.
- [15] Dai K, Liu G, Nguyen T. An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics. *Finite elements in analysis and design*. 2007;43(11-12):847-60.
- [16] MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2019b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.; 2018.
- [17] Felippa CA. *Introduction to finite element methods*. University of Colorado. 2004.
- [18] Hildebrand FB. *Methods of applied mathematics*: Courier Corporation; 2012.
- [19] Liu G. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods. *International Journal of Computational Methods*. 2008;5(02):199-236.
- [20] Liu G-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*: Taylor & Francis; 2009.
- [21] Timoshenko SP and Goodier JN. *Theory of Elasticity*, 3rd edition. McGraw-Hill, New York. 1970.
- [22] Hughes T.J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. 2012.
- [23] Nguyen-Xuan, H., S. Bordas, and H. Nguyen-Dang, Smooth finite element methods: convergence, accuracy and properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008.

ภาคผนวก





ภาคผนวก ก

ตัวอย่างคำสั่งการทำงานของโปรแกรม

```

%-----
-----%
% Main file of 2D problems using triangular or quadrilateral elements %
%-----
-----%

clear
format long
global ndof sdof edof nel nnel nnode emodule poisson fload
global gcoord ele_nods matmtx method lengthx lengthy nx ny a m path
%-----
-----%

%           1. PREPROCESSOR PHASE                               %
%-----
-----%

clc
delete './RESULTS/*.fig'
example = 'cantilever';
% option2=3;
method = 'CSFEM_Q4'; % Cell-based smoothed FEM using Q4 elements
nnel = 4; % Number of nodes per element
nSD = 3;
%air=input('Irregular factor of mesh (0.0,...,0.5) = ');
air=0.0; % irregular factor of mesh
% type=1; % type=1 - plane stress analysis
lengthx=48; % length of x-axis side of problem
lengthy=12; % length of y-axis side of problem
fload=1000; % the total load
emodule=3e7; % Elastic modulus
poisson=0.3; % Poisson's ratio
%-----
-----%

```

```

% 1.4 Compute necessary data from input data
%
%-----%
-----%
ndof=2;          % number of degrees of freedom (dofs) per node
edof=nnel*ndof; % Dofs per element
matmtx=get_matmtx(1); % matrix of material constants
ddisp=zeros(sdof,1); % system displacement vector
Nodal_Displacement = cell(5,3);
Centerline_Displacement = cell(5,3);
Tip_Displacement = cell(5,3);
Sigma_xx = cell(5,3);
Sigma_xy = cell(5,3);

path = './RESULTS';
% resultFolder = './RESULTS';
% addpath(sourceFolder);
disp('Starting Program.....')
%=====
=====-%
for m = 1 : 5 %5 meshes
    nx = 8*(m+1);
    ny = 2*(m+1);
    nel = nx*ny; % Total number of element
    nnode=(nx+1)*(ny+1); % total number of nodes
    sdof=nnode*ndof; % total dofs
    disp([' Starting mesh#', num2str(m), ' ==> Mesh: ', num2str(nx), 'x', num2str(ny)])
    for a = 1 : 3 % 3 ranges of alpha
        if a == 1
            alpha = [0.2 0.3];
            disp([' Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha = ',...
                num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
        elseif a == 2

```

```

alpha = [0.3 0.4];
disp([' Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha = ',...
      num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
else
alpha = [0.4 0.5];
disp([' Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha = ',...
      num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
end

% initial data of geometry, boundary condition and force vector
[gcoord,ele_nods,bcdof,bcval,ff] = get_initdata_V03;

%Plotting main meshes and holding for adding SD's meshes on
hold on;
figure(1);
PLOT_MESH(gcoord,ele_nods,'Q4','ko-');

%-----
%
% 2. SOLUTION PHASE %
%-----
%
%-----
%
% 2.1 Compute the stiffness matrix %
%-----
%-----

switch method
case 'FEM_T3'
[K]=cal_K_FEM_T3;
case 'FEM_Q4'
[K]=cal_K_FEM_Q4(nglx,ngly);
case 'CSFEM_Q4'

```

```

[K,SD_coord,SD_shape] = cal_K_CSFEM_Q4(nSD,alpha);
end
text(15,10,['Mesh ',num2str(m),' alpha ',num2str(a)],'Color',...
      'blue','FontSize',20,'FontWeight','bold')
saveas(gcf,fullfile(path,['Mesh_',num2str(m),'_alpha_',num2str(a)]),'fig')
delete(gcf)

%-----%
% 2.2 Apply the boundary condition %
%-----%
%-----%
disp(' Element Level calculations....')
K1=K; % Save K1=K (before applying bcdof) to compute strain energy E
[K,ff] = apply_bcdof(K,ff,bcdof,bcval);
disp(' Apply BCs and Loads Conditions....')

%-----%
% 2.3 nodal displacement vector %
%-----%
%-----%
disp(' Solving Nodal Displacement....')
ddisp=K\ff;

%=====
%=====

%Visualization purpose
ux = 1:2:2*nnode-1; uy = 2:2:2*nnode;
XX = ddisp(ux); YY = ddisp(uy);
Nodal_Dis[m,a] = [XX, YY];
dispNorm = max(sqrt(XX.^2+YY.^2));
dispNorm2 = norm(sqrt(XX.^2+YY.^2));
scaleFact=1000;

```

```

%-----%
%-----%
%           3. POSTPROCESSOR PHASE
%
%-----%
%-----%
%-----%
%-----%
%-----%
% 3.1 compute strain energy of system                                     %
%-----%
%-----%
energy = 0.5*ddisp*K1*ddisp;
%-----%
%-----%
% 3.2 error norms: displacement, energy, and recovery energy          %
%-----%
%-----%
norm_E=0;
%-----%
%-----%
% 3.3 Output error norms and plot the results of displacement and stress %
%-----%
%-----%
disp(' Stresses Calculation Processing.....')
switch method
case 'FEM_T3'
    [stress_nod, stress_ele]=cal_stress_FEM_T3(ddisp);
    nGauss=7;      % Gauss-Legendre quadrature

[norm_disp, norm_E, norm_Ereco]=cal_norms_FEM_T3(nGauss, ddisp, stress_nod, stress_ele);
case 'FEM_Q4'

```



```

[stress_nod]=cal_stress_nod_FEM_Q4(nglx,ngly,ddisp);
nglx=3; ngly=3;    %3x3 Gauss-Legendre quadrature
[norm_disp,norm_E,norm_Ereco]=cal_norms_FEM_Q4(nglx,ngly,ddisp,stress_nod);
case 'CSFEM_Q4'
[stress_nod] = cal_stress_nod_CSFEM_Q4(nSD,ddisp,SD_coord,SD_shape);
nglx=3; ngly=3;    %3x3 Gauss-Legendre quadrature
[norm_disp,norm_Ereco]=cal_norms_CSFEM_Q4(nglx,ngly,ddisp,stress_nod);
end

%=====
=====-%

%Plotting Part
PLOT_DEFORMED(gcoord,ele_nods,scaleFact,XX,YY);

%    [Tip_dd(a,m), Tip_Exact(a,m), dd_sim, dd_exact] = PLOT_TIP(ddisp);
[Centerline_Displ{m,a},Tip_Displ{m,a}] = PLOT_TIP(ddisp);

[Sigma_xx{m,a},Sigma_xy{m,a}] = PLOT_STRESSES(stress_nod);

%=====
=====-%

disp([' End of alpha#', num2str(a)])
end    %End for alpha's loop
delete(gcf)
delete(gcf)
delete(gcf)
delete(gcf)
disp([' End of Mesh#', num2str(m)])
end    %End for meshing's loop
disp('End of Program.....')

```

ภาคผนวก ข
ผลงานตีพิมพ์



สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสมำเสมอ 3 ส่วน
จากเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ
Smoothed Finite Element using three smoothing domains created
by arbitrary quadrilateral elements for Two-Dimensional Plane Stress Problem

กิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา กำธรเกียรติ มุสิกเกต* บุญชัย ผึ้งไผ่งาม และ สุธี ปิยะพิพัฒน์

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

E-mail: kittipoom_r@mail.rmutt.ac.th, kamtornkiat@rmutt.ac.th*,

boonchai.p@en.rmutt.ac.th, suthee.p@en.rmutt.ac.th

▶ บทคัดย่อ ◀

ทางเลือกของการสร้างโดเมนสมำเอื่อย่อยภายในเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ ได้ถูกนำเสนอสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ โดเมนสมำเอื่อย่อย 3 โดเมน ถูกสร้างขึ้นมาด้วยการประยุกต์แนวคิดของความสมมาตรเพื่อให้เกิดการกระจายตัวของโดเมนย่อยดังกล่าวทั่วทั้งขอบเขตของปัญหา เทคนิคการเปลี่ยนแปลงความชันของความเครียดเป็นกุญแจสำคัญสำหรับการกระจายสนามความเครียดตลอดโดเมนสมำเอื่อย่อย ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ซึ่งใช้สำหรับงานวิจัยคือคานยื่นปลายที่รับแรงเฉือนกระทำที่ปลายคานในรูปฟังก์ชันพาราโบลา พารามิเตอร์ควบคุมที่ใช้มี 2 ตัว อย่างแรกคือขนาดของโครงตาข่ายจากหยาบสุด ซึ่งมีขนาด 16×4 ไปจนถึงขนาดละเอียด 48×12 ในอัตราส่วน 4:1 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับความยาวในแนวนอนต่อความลึกของคาน พารามิเตอร์ตัวที่สองคือ α ($\alpha_x = \alpha_y$) ซึ่งคิดเป็นเศษส่วนเทียบกับความยาวด้านของเอลิเมนต์โดยค่าที่ใช้คือ 0.2-0.3 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ ค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดคานที่ระยะความยาวกึ่งกลางคานและค่าการเคลื่อนที่ของปลายคานซึ่งได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎี ซึ่งคำนวณได้จากตำแหน่งเดียวกันเห็นได้อย่างชัดเจนว่าความแม่นยำของการเคลื่อนที่ปลายคานที่ได้ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ตัวที่สอง ความเค้นตั้งฉาก σ_{xx} เมื่อ α เท่ากับ 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 นั้น พบว่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีและไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ในขณะที่ความถูกต้องของความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่คำนวณได้นั้น กลับพบว่าขึ้นอยู่กับจำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายมากกว่าค่าของ α

▶ คำสำคัญ : ◀

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์; โดเมนสมำเอื่อย่อย; การเปลี่ยนแปลงความชัน; ปัญหาความเค้นใน 2 มิติ; คานยื่น

Abstract

The alternative way to create sub-smoothing domains within an element for smoothed finite element analysis was proposed in this research. Three sub-cell smoothing domains were established continuously with the utilization of symmetrical pattern over the entire problem domain. Strain gradient technique is the most important key to distribute strain field smoothly within smoothing domain. Two-dimensional plane stress problem employed for this research was a cantilever beam subjected to parabola shear force with a maximum magnitude of 1000 unit at free end. Two control parameters were used. The first one is meshing ranging from coarse mesh 16x4 to finer mesh 48x12 as the same 4:1 ratio of horizontal to vertical dimension of beam. The latter is α ($\alpha_x = \alpha_y$) measured as fracture of an element side. The values of α were 0.2-0.3, 0.3-0.4 and 0.4-0.5 respectively. Numerically evaluated normal and shear stresses over the cross-section area at the middle span and displacement at free end were compared to the exact solutions accordingly. Obviously, the free end displacement accuracy strongly influenced by the second control parameter. The normal stresses σ_{xx} at α equal to 0.3-0.4 and 0.4-0.5 compared to the exact solutions were found to be at the same accuracy while shear stresses σ_{xy} were found to be dependent on mesh size than the value of α .

Keywords:

Smoothed finite element; Sub-cell smoothing domains; Strain gradient; Two-dimensional plane stress; Cantilever beam

1. บทนำ

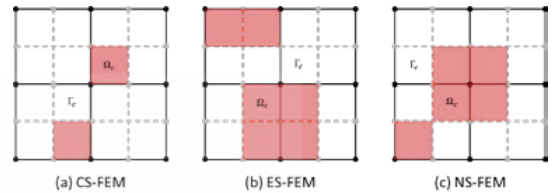
วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์จัดว่าเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมมากที่สุดในปัจจุบันเนื่องจากความสามารถในการจัดการกับความซับซ้อนทั้งในส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์ รูปทรงของปัญหาโจทย์และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งมีผลการคำนวณที่มีความแม่นยำ วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ใช้หลักในการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็กๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) ซึ่งเชื่อมโยงกันด้วยโครงตาข่าย (Mesh) ฟังก์ชันของความเครียดถูกสร้างมาจากการใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลเพื่อประมาณค่าของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งภายในเอลิเมนต์ สติฟเนส

ของแต่ละเอลิเมนต์จะถูกนำมารวมกันเป็นสติฟเนสของทั้งโดเมนเพื่อแก้ระบบสมการหาค่าของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง ความเค้นและความเครียดของปัญหาต่อไป ความแม่นยำของคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบการเสีรูปของเอลิเมนต์ [1] ถึงแม้ว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมพื้นฐาน (Constant Strain Triangular Element) จะมีความยืดหยุ่นมากกว่าในการสร้างโครงตาข่ายของปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปทรงก็ตาม ความแม่นยำของค่าที่ได้ก็ยังน้อยกว่าเอลิเมนต์แบบทรงสี่เหลี่ยมพื้นฐาน (Bilinear Quadrilateral element) นอกจากนี้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ยังมีพฤติกรรมที่ให้ค่าความแข็งแรงแรงของการวิเคราะห์สูงกว่าความจริง รวมไปถึงปัญหาเรื่องความเที่ยงตรงของผลลัพธ์อีกด้วย

นักวิจัยหลายกลุ่มได้พยายามคิดค้นวิธีใหม่ๆ ขึ้นมาเพื่อขจัดปัญหาเหล่านั้นออกไป ได้แก่ วิธีไม่ใช้โครงตาข่าย (Meshless Methods) [2] วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่ง (Partition of Unity) [3] และวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (Polygonal Finite Element Methods) [4-6] วิธีไม่ใช้โครงตาข่ายสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งมาก (Large deformation) วิธีการแบ่งออกเป็นหนึ่งยอมให้ใช้รูปทรงเรขาคณิตของโดเมนปัญหาเป็นอิสระไม่ขึ้นตรงกับโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นจากไฟไนท์เอลิเมนต์ ส่วนวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านนั้นสามารถสร้างโครงตาข่ายเป็นรูปหลายเหลี่ยมใดๆ ก็ได้ [7] Liu et al. [8,9] ได้คิดค้นวิธีที่เรียกว่าสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element Method, SFEM) โดยอาศัยหลักการของ gradient smoothing technique หลักพื้นฐานที่สำคัญของวิธีนี้คือการสร้างสนามความเครียด (strain field) ด้วยการใส่ Smoothed Galerkin weak form ซึ่งจะทำให้โมเดลที่ได้ด้วยวิธีนี้มีความแข็งแกร่งน้อยกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรงมากขึ้นรวมทั้งมีความถูกต้องแม่นยำมากกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์เดิม [10]

เทคนิคการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domains) นั้นสามารถทำได้หลายแบบคือ [9] cell-based SFEM (CSFEM) node-based SFEM (NSFEM) และ edge-based SFEM (ESFEM) เป็นต้น ดังแสดงในภาพที่ 1 ขึ้นอยู่กับการใช้ชิ้นส่วนใดในการสร้างโดเมนสม่ำเสมอขึ้นเอง ทำให้มีทางเลือกหลายทางสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการ นอกจากนี้แล้ววิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ยังสามารถ

นำไปปรับปรุงใช้กับปัญหา geometry nonlinearity ใน 3 มิติที่มีวัสดุเป็นแบบใกล้บีบอัดไม่ได้ (nearly-incompressible material) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ [11]



ภาพที่ 1 รูปแบบการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ

ในวิธี cell-based SFEM ซึ่งถือว่าเป็นวิธี SFEM ที่เป็นพื้นฐานนั้นได้ถูกศึกษาอย่างแพร่หลาย เช่น นำไปใช้กับปัญหาทางด้านพลศาสตร์ (Dynamics) [12] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นและแผ่นเปลือกบาง (Plate and Shell) [13] ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของการแตกหักโดยใช้ร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) สำหรับปัญหาใน 2 มิติ [14]

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 3 โดเมนภายในเอลิเมนต์หลักที่สร้างขึ้นมาจากโครงตาข่ายทรงเหลี่ยมจตุรัสด้วยโปรแกรม MATLAB [16] ความยาวแต่ละด้านของโดเมนย่อยนี้ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของด้านของเอลิเมนต์หลัก อัตราส่วนของโครงตาข่ายในแนวตั้งต่อแนวนอน ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1:4 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับขนาดของคานยื่นปลายที่ใช้ในการศึกษาหลักในการสมมาตรของ Unit cell ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับโดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องภายในโดเมนทั้งหมดของปัญหา

2. วิธีการวิจัย

2.1 สมการครอบคลุมปัญหาอีลาสติคใน 2 มิติ (Governing Equations for 2D Elasticity Problem)

ตัวแปรภายในซึ่งไม่ทราบค่าทั้งสามตัวของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ภายใต้ทฤษฎีอีลาสติคเชิงเส้นได้แก่ การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ความเครียด (strain) และความเค้น (stress) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังสมการที่ 1 ถึง 3 คือ

$$u = [u_x \quad u_y]^T \quad (1)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (2)$$

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (3)$$

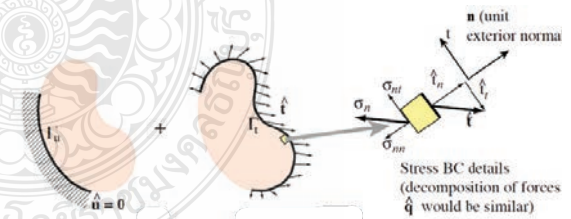
สมการดังกล่าวจะถูกเชื่อมโยงเข้าด้วยกันด้วยสมการ kinematic, constitutive และ internal-equilibrium ถ้าสมมติให้ค่าความเค้นและเครียด ณ สถานะเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ ความเชื่อมโยงของสมการดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็นสมการในรูปสัญลักษณ์ของเทนเซอร์ (Tensor Notations) คือ

$$\varepsilon = Du, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad D^T \cdot \sigma + b = 0 \quad (4)$$

เมื่อเวกเตอร์ b คือแรงภายในเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ และ E คืออีลาสติคโมดูลัสเมทริกซ์ และ D เป็นดิฟเฟอเรนเชียลเมทริกซ์โอเปอเรเตอร์

เงื่อนไขขอบที่ถูกระบุไว้บนโดเมนของปัญหาทางกลศาสตร์ Γ นั้น แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement boundary conditions) และเงื่อนไขขอบของแรง (Force boundary conditions) การที่จะระบุเงื่อนไขขอบเหล่านั้น นิยมแบ่งโดเมนของปัญหาดังกล่าวออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน คือ Γ_u และ Γ_t เพื่อแยกความแตกต่างของเงื่อนไขขอบทั้ง 2 ประเภท ดังแสดงในภาพที่ 2 เมื่อเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยน

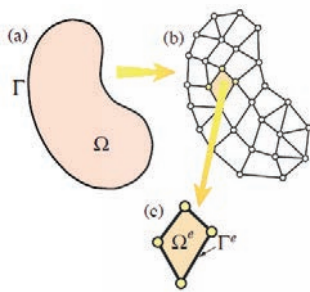
ตำแหน่งถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_u โดย \hat{u} หมายถึงการเคลื่อนที่บนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ซึ่งมักจะมีค่าเท่ากับศูนย์ $\hat{u} = 0$ ณ ตำแหน่งของฐานรองรับ ส่วนเงื่อนไขขอบของแรงนั้นถูกกำหนดให้อยู่บนโดเมน Γ_t ในรูปของสมการ $\sigma_n = \hat{t}$ โดย \hat{t} หมายถึงแรงบนเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ในรูปของแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่และ σ_n คือเวกเตอร์ของความเค้นนั่นเอง สมการที่ 4 รวมกับเงื่อนไขขอบทั้งสองแบบที่ได้กล่าวมาแล้วนี้เป็นสมการที่เรียกว่า Strong Form ของปัญหาความเค้นในระนาบซึ่งไม่สะดวกสำหรับการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง นอกจากนี้ในกรณีที่ปัญหามีความสลับซับซ้อนหรือลำดับอนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีลำดับสูงขึ้น การหาผลเฉลยดังกล่าวในรูปของ Closed Form อาจไม่สามารถทำได้ วิธีที่สะดวกกว่าและสามารถหาค่าได้คือการเปลี่ยนจากรูป Strong Form ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ Weak Form ด้วยการแทนที่สมการอนุพันธ์ของ Strong Form ด้วยการอินทิเกรตหรือเป็นการเฉลี่ยค่าทั้งหมดที่อยู่ในช่วงโดเมนนั้นๆ



ภาพที่ 2 เงื่อนไขขอบของโดเมนของปัญหา [17]

วิธีการเปลี่ยนรูปของ Strong Form ไปเป็น Weak Form นั้นสามารถทำได้ 2 แบบด้วยกันคือ การใช้หลักการของพลังงาน (Energy Methods) หรือหลักการของการถ่วงเศษน้ำหนักตกค้าง (Weighted Residual Methods) ในที่นี้จะขอกกล่าวถึงการเปลี่ยนรูปสมการด้วยวิธีแรก เริ่มจากการพิจารณาแบ่งโดเมนของปัญหออกเป็นส่วนเล็กๆ ด้วย

โครงตาข่าย (Mesh) เรียกว่าเอลิเมนต์ดังแสดง
ในภาพที่ 3 ใช้สัญลักษณ์ด้วยตัวยกเป็น e เอลิเมนต์
ดังกล่าวใน 2 มิติ อาจเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
หรือสี่เหลี่ยมก็ได้ สมการพลังงานศักย์รวมทั้งหมดที่
เป็นฟังก์ชันนอล (ฟังก์ชันของฟังก์ชัน) ของเอลิเมนต์
สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 5



ภาพที่ 3 การแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย [17]

$$\Pi^e = U^e - W^e \quad (5)$$

เรียกสมการนี้ว่า Total Potential Energy
Functional (TPE) เมื่อพลังงานภายในที่เกิดขึ้นมาจาก
พลังงานความเครียดภายในของวัตถุซึ่งมีสมการคือ

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma^T \varepsilon \, d\Omega^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon^T E \varepsilon \, d\Omega^e \quad (6)$$

และพลังงานภายนอกที่เกิดขึ้นเป็นผลรวมของ
แรงภายในที่ทราบค่าแล้วกับแรงภายนอกซึ่งกระทำ
บริเวณขอบของโดเมน Γ_e นั่นเองโดยมีสมการคือ

$$W^e = \int_{\Omega^e} u^T b \, d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} u^T \hat{t} \, d\Gamma^e \quad (7)$$

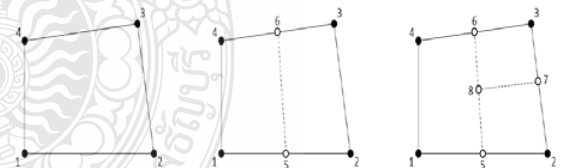
หลังจากการแทนค่าด้วย $u = \sum Nu^e$,
 $\varepsilon = Bu^e$, $\sigma = E\varepsilon$ กลับลงไปในสมการ TPE
ของแต่ละเอลิเมนต์ร่วมกับหลักการของการแปรผัน
(Variational Principle) ซึ่งกล่าวว่า $\delta\Pi = 0$ เมื่อ
เทียบกับการเปลี่ยนแปลง δu ที่เกิดขึ้นเพียงเล็กน้อย
[18] จะได้สมการไฟไนท์เอลิเมนต์สุดท้ายในรูป

$$Ku = F \quad (8)$$

เมื่อ K, u, F คือสตีเฟนสมเมทริกซ์ เวกเตอร์
การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อและเวกเตอร์ของแรงภายใน
ที่จุดต่อในระบบโคออร์ดิเนตหลักตามลำดับ

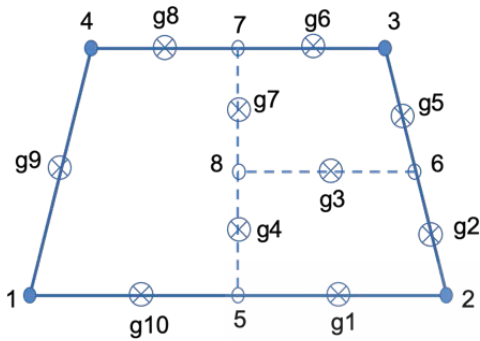
2.2 โดเมนสม่ำเสมอทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Smoothing Domains)

งานวิจัยในครั้งนี ใช้การแบ่งโดเมนของ
ทั้งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยโดยใช้เอลิเมนต์
ทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral element) ดังแสดง
ในภาพที่ 4 เอลิเมนต์หลักดังกล่าวจะถูกนำมาแบ่งออก
เป็นส่วนย่อยที่เรียกว่าโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing
domain, SD) ด้วยการใช้อิเล็กเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมจำนวน
3 เอลิเมนต์ จำนวนน้อยที่สุดของโดเมนสม่ำเสมอ
สำหรับปัญหาของของแข็งใน 2 มิติซึ่งเสนอโดย [19]
มีค่าเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมด
ของปัญหา การแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอนี้ สามารถ
ทำได้โดยทำการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างกึ่งกลาง
ด้านทั้งสองที่อยู่ตรงข้ามกันดังแสดงในภาพที่ 4



ภาพที่ 4 การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 3 โดเมนสม่ำเสมอ

เนื่องจากการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของ
ด้านที่อยู่บนโดเมนสม่ำเสมอนี้ใช้การประมาณเป็น
แบบเชิงเส้น เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่ง
แบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก ที่สามารถ
คำนวณได้ด้วยการใช้ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape
function) ของเกาส์ ณ จุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียว
โดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของมัน ในทางปฏิบัตินั้น
นิยมใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับการหาค่าของฟังก์ชัน
รูปร่างดังกล่าว



ภาพที่ 5 ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss Points)

ภาพที่ 5 วงกลมทึบ 1-2-3-4 แสดงตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยมหลัก วงกลม 5-6-7-8 แสดงตำแหน่งของจุดต่อของโดเมนย่อย สม่่าเสมอ 3 โดเมนที่ถูกสร้างขึ้นมา วงกลมกากบาท g1-g10 แสดงตำแหน่งจุดของเกาส์ทั้งหมด ค่าของฟังก์ชันรูปร่างสามารถหาได้โดยค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปร่างของจุดต่อทั้งสองบนด้านที่กำลังพิจารณา เช่น

$$N_1(5) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(1) + N_1(2))/2 = (1 + 0)/2 = 0.5$$

$$\text{ในลักษณะเดียวกัน } N_2(5) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_2(1) + N_2(2))/2 = (0 + 1/2) = 0.5$$

$$N_1(8) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(1) + N_1(2) + N_1(3) + N_1(4))/4 = 1/4$$

$$\text{ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง } N_1(g_1) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_1(5) + N_1(2))/2 = (0.5 + 0)/2 = 1/4$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน ค่าฟังก์ชันรูปร่าง } N_2(g_1) \text{ มีค่าเท่ากับ } (N_2(2) + N_2(5))/2 = (1 + 0.5)/2 = 3/4 \text{ เป็นต้น}$$

2.3 สมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (Smoothed Finite Element Equation)

จากหลักการของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งหมดที่กล่าวมาเบื้องต้น สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{K}^{SFEM} \bar{u} = \bar{F} \quad (9)$$

สัญลักษณ์บาร์ด้านบนใช้เพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกับสมการไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง ดังนั้น สติฟเนสเมทริกซ์สม่าเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสติฟเนส สม่่าเสมอย่อยได้เป็น

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum K^{SFEMe} = \sum_{k=1}^{n_f} \bar{B}^T D \bar{B} A_k^s \quad (10)$$

เมื่อ \bar{B} คือ strain-displacement matrix ภายหลังการแก้ระบบสมการที่ 9 ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ก็สามารถหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายจุดต่อที่ต้องการได้และนำไปสู่การวิเคราะห์เพื่อหาค่าความเค้น ความเครียดภายในชิ้นส่วนได้ต่อไป

2.4 การสร้างสนามความเครียดสม่าเสมอ (Smoothed Strain Field Construction)

ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์อยู่ที่ขั้นตอนของการสร้างสนามความเครียดแบบสม่าเสมอ โดยอาศัยเทคนิคของ strain smoothing บนโดเมนสม่าเสมอที่อยู่ภายในทุกเอลิเมนต์นั่นเอง ซึ่งไม่มีขั้นตอนนี้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติ ขั้นตอนอื่นๆ นอกเหนือจากขั้นตอนนี้นั้นเหมือนกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทุกประการ ทำให้สามารถใช้ประโยชน์จากโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ ซึ่งมีใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งส่วนที่เป็น open source และ commercial software โดยไม่จำเป็นต้องสร้างขึ้นใหม่ทั้งหมด สนามหรือตัวแปรความเครียดสม่าเสมอนี้ สามารถสร้างขึ้นได้ด้วยการปรับปรุงตัวแปรสนามความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติโดยใช้ smoothing operation ขบวนการดังกล่าวเริ่มจากการสร้างโครงตาข่าย (Element mesh) แบบสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้วยวิธีปกติเหมือนกับในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ แล้วหาค่าของตัวแปรความเครียดในรูปของ

$$\bar{\epsilon} = D \left(\sum_{I=1}^N N_I(x) \bar{d}_I \right) = \sum_{I=1}^N \bar{B}_I \bar{d}_I = \bar{B} \bar{d} \quad (11)$$

การคำนวณหาค่าของตัวแปรความเครียดสม้าเสมอ $\bar{\epsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_k จะใช้เทคนิคการประมาณของค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน [20] กล่าวคือ

$$\bar{\epsilon}(x_k) = \int_{\Omega_k^s} L \bar{u}(x) W(x_k - x) d\Omega \quad (12)$$

เมื่อ Ω_k^s คือโดเมนสม้าเสมอสำหรับตำแหน่ง x_k และ $W(x_k - x)$ คือฟังก์ชันน้ำหนักที่สัมพันธ์กับค่า ณ ตำแหน่งดังกล่าว ตัวแปรความเครียดที่อยู่ภายในโดเมนสม้าเสมอนี้จะถูกคำนวณจากการกระจายตัวแปรความเครียดในสมการที่ 11 ตลอดทั่วทั้งโดเมน Ω_k^s และถูกสมมติให้มีค่าคงที่ ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ นั้น มีความสำคัญกับการทำให้ตัวแปรความเครียดที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เกิดการกระจายตัวอย่างสม้าเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมน ซึ่งจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [9] (1) ค่าของมันจะต้องไม่เป็นศูนย์และต้องมีค่าเป็นบวกภายในโดเมนสม้าเสมอที่พิจารณา (2) ต้องมีศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x_k (3) ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของคุณสมบัติการมีค่าเป็น 1 (Unity property) เพื่อความง่ายของการคำนวณโดยที่ยังคงสอดคล้องตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น งานวิจัยนี้จะกำหนดให้ใช้ Heaviside step function ซึ่งเป็นฟังก์ชันน้ำหนักอย่างง่ายและแสดงได้ดังสมการที่ 13

$$W(x_k - x) = \begin{cases} \frac{1}{A_k^s}, & x \in \Omega_k^s \\ 0, & x \notin \Omega_k^s \end{cases} \quad (13)$$

เมื่อ A_k^s คือพื้นที่ของโดเมนสม้าเสมอที่กำลังพิจารณาอยู่

ในกรณีทั่วไป การเปลี่ยนจากตัวแปรความเครียดซึ่งอาจไม่สามารถหาได้ง่าย มาเป็นตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งหาได้ง่ายกว่านั้น เป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ นอกเหนือไปจากนั้น การที่ตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งถูกสมมติให้มีความต่อเนื่องตลอดบนขอบเขตของโดเมนสม้าเสมอ ทำให้สามารถเปลี่ยนรูปของสมการที่ 12 โดยใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by part) กลายเป็น

$$\bar{\epsilon}(x_k) = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \quad (14)$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสองทิศทางที่พุ่งออกจากด้านหรือขอบเขตของโดเมนสม้าเสมอนั้นเอง

$$L_n(x) = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (15)$$

สถิติเนสมเมทริกซ์สม้าเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลักในสมการที่ 10 นั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ strain-displacement matrix \bar{B} หากทำการแทนค่า $\bar{u}(x) = \sum N_i \bar{u}_i$ ลงในสมการที่ 14 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(x) &= \bar{B}(x) \bar{u}(x) \Rightarrow \bar{B}(x) \\ &= \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} L_n(x) N(x) d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma} n_i(x) N(x) d\Gamma, \quad i = x, y \quad (17)$$

สมการที่ 17 เป็นเพียงการอินทิเกรตตลอดความยาวของด้านที่อยู่บนโดเมนสม้าเสมอ ซึ่งถูกสมมติว่าตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งเป็น

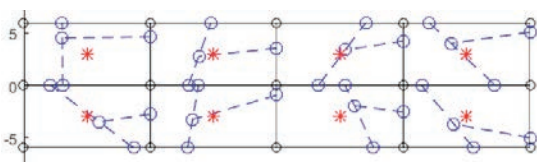
เส้นตรง เมื่อใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ จำนวนของจุดที่ต้องการคือ 1 จุด ซึ่งโดยทั่วไปมักจะใช้จุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของด้านนั้นๆ เมื่อเป็นเช่นนี้สามารถเปลี่ยนจากเครื่องหมายอินทิเกรตเป็นเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_k^s} \sum_{j=1}^{n_f} n_i^j N(x_j^G) L_j, \quad i = x, y \quad (18)$$

3. การโมเดลและวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Modeling and Simulation)

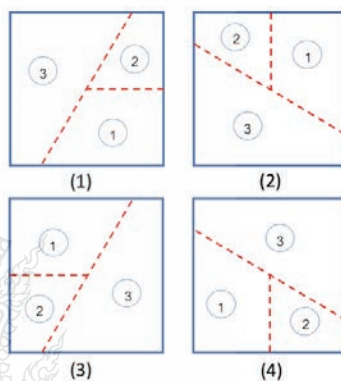
3.1 โดเมนสามเหลี่ยมแบบ 3 ส่วนย่อย (Three Arbitrary Smoothing Domains)

การแบ่งโดเมนสามเหลี่ยมแบบย่อยสำหรับงานวิจัยนี้ เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนใหญ่ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักโดยใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม (Quadrilateral element) จากนั้นจึงทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักดังกล่าวออกเป็นโดเมนสามเหลี่ยมจำนวน 3 ส่วนย่อย โดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสามสอดคล้องกับค่า α ที่กำหนดไว้ ภาพที่ 6 เป็นการสร้าง smoothing domain ในลักษณะแบบอิสระจะพบว่า ลักษณะรูปร่างของโดเมนสามเหลี่ยมที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดและรูปร่างแตกต่างกันออกไปไม่มีทิศทางและสังเกตได้อย่างชัดเจนว่าการกระจายตัวของโดเมนเป็นไปอย่างไร้การควบคุม ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณหาค่าผลลัพธ์ของการวิจัยมีความไม่แน่นอนแตกต่างกันไปทุกครั้งที่มีการสุ่มเลือกค่าของ α ใหม่ การสร้างโดเมนย่อยสามเหลี่ยมแบบนี้จึงไม่สามารถนำไปใช้ได้

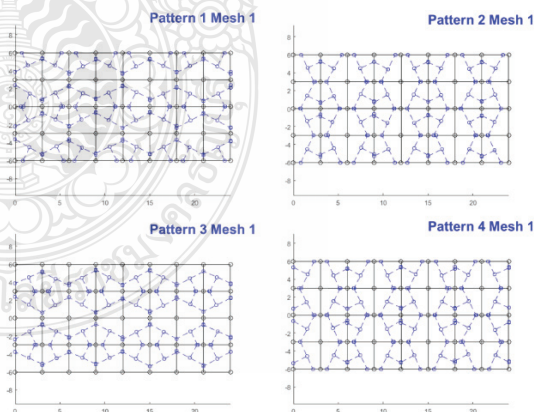


ภาพที่ 6 การสร้างโดเมนย่อยสามเหลี่ยมแบบอิสระ

ถึงแม้ว่ารูปแบบของการสร้างโดเมนสามเหลี่ยมแบบย่อย 3 โดเมน สามารถมีได้ 4 รูปแบบด้วยกัน ดังแสดงในภาพที่ 7 แต่ก็ยังเป็นเพียงลักษณะของการหมุนเอลิเมนต์ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาเท่านั้น โดเมนสามเหลี่ยมแบบย่อย 3 โดเมนดังกล่าวนี้ เมื่อมีการนำไปประยุกต์ใช้โดยอาศัยคุณสมบัติของการกระจายตัวและความสมมาตรแล้ว จึงมีรูปร่างเหมือนกันทุกประการดังแสดงในภาพที่ 8

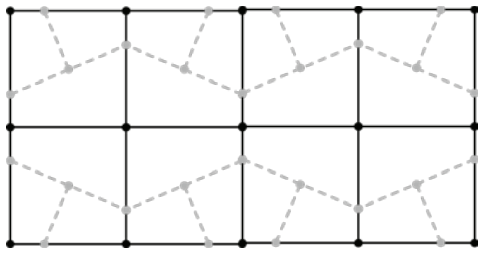


ภาพที่ 7 โดเมนย่อยสามเหลี่ยม



ภาพที่ 8 โดเมนสามเหลี่ยมแบบย่อย 3 ส่วนที่เป็นไปได้

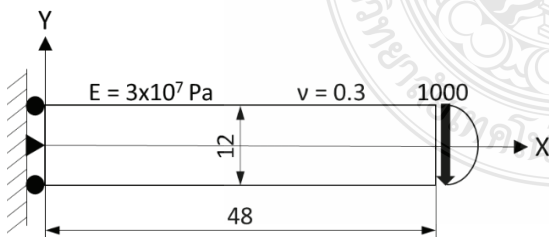
สำหรับงานวิจัยนี้ จะใช้รูปแบบของการสร้างโดเมนสามเหลี่ยมแบบย่อย 3 โดเมนย่อย ตามแบบที่ (4) ของภาพที่ 7 สำหรับการวิเคราะห์ผลเชิงตัวเลขต่อไป เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยโดเมนสามเหลี่ยม 3 โดเมนย่อยสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ แสดงได้ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนสามส่วนแบบ 3 ส่วน

3.2 คานยื่น (Cantilever Beam)

ตัวอย่างคานปลายยื่นที่มีความยาว 48 หน่วย ความสูง 12 หน่วย และมีความหนา 1 หน่วย เพื่อกำหนดให้เป็นปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ สำหรับทดสอบขบวนการและผลของการวิเคราะห์ ดังแสดงในภาพที่ 9 ปลายคานด้านขวามือ มีแรงกระทำในแนวตั้งโดยมีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลา เท่ากับ 1000 หน่วย ปลายคานด้านซ้ายมือมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (Hinge support) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึก ($D/2$) โดยที่ขอบด้านบนและด้านล่าง มีสภาพเป็นที่รองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้ง (Roller support) ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ $3 \times 10^7 \text{ Pa}$ และ 0.3 ตามลำดับ



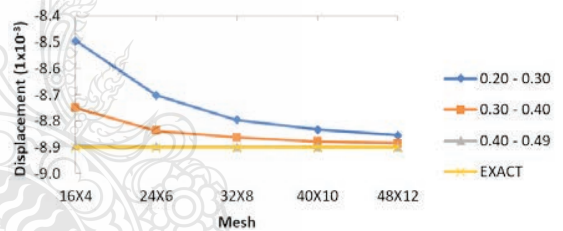
ภาพที่ 10 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนที่ปลายคาน

โปรแกรมการวิเคราะห์สมมุติไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาใน 2 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB [9] ถูกนำมาปรับปรุงในส่วนของโครงสร้างโดเมนสามส่วนแบบ 3 โดเมนย่อย ซึ่งด้านแต่ละด้านมีความยาวเป็นสัดส่วน α ของความยาวด้านเดิม ผลเฉลยแม่นยำนั้นได้มาจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี [21]

4. ผลการวิเคราะห์

จากการทดสอบคานตัวอย่างด้วยวิธีสมมุติไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งพัฒนาโดย [9] แล้วนำมาปรับปรุงในส่วนของโครงสร้างโดเมนสามส่วนย่อย 3 โดเมน แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์ โดยการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) กำหนดให้โครงตาข่ายที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์คือ 16×4 24×6 32×8 40×10 และ 48×12 ตามลำดับ ค่า α ที่ใช้แบ่งออกเป็น 3 ช่วงคือ 0.2-0.3 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (Displacement)



ภาพที่ 11 ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน (Tip Displacements)

ผลการทดสอบเห็นได้อย่างชัดเจนว่า จำนวนของการแบ่งโครงตาข่ายและค่า α ที่ใช้กำหนดระยะการแบ่งโดเมนสามส่วนย่อยนั้น มีผลต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ โดยที่ใช้ผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นตัววัดค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ ซึ่งผลเฉลยแม่นยำตรงค่าของการโก่งตัวที่ปลายคานเท่ากับ -8.9×10^{-3} จากภาพที่ 11 จะเห็นว่า จำนวนการแบ่ง Mesh ที่มากขึ้นส่งผลให้ค่าความแม่นยำเพิ่มมากขึ้นด้วยตามลำดับ อย่างไรก็ตามที่จำนวน Mesh เท่ากับ 16×4 ได้ผลจากการวิเคราะห์คือ -8.4955×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงเท่ากับ 4.045×10^{-2} หรือคิดเป็นร้อยละ 4.55 แต่ที่

จำนวน Mesh เท่ากับ 48×12 ค่าที่ได้คือ -8.8537×10^{-3} ซึ่งมีค่าต่างจากผลเฉลยแม่นยำตรงเพียง 4.63×10^{-1} หรือร้อยละ 0.52 เท่านั้น และในกรณีของค่า α ก็แสดงผลไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือค่า α ยังมีค่าเข้าใกล้ 0.5 ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น

4.2 ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress)

ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นตั้งฉากในแนวราบ σ_{xx} นั้น จะทำการวิเคราะห์โดยใช้ขนาดของโครงตาข่ายและค่า α เป็นตัวควบคุม เหมือนกับการวิเคราะห์ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน คือจะแบ่งโครงตาข่ายออกเป็น 5 กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มจะแบ่ง α ออกเป็น 3 ช่วง และนำค่าที่ได้ไปเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงต่อไป สำหรับความเค้นตั้งฉากในแนวตั้งนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์

จากตารางที่ 1 พบว่า จำนวนจุดต่อของหน้าตัดคาน ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาว ($L/2$) มีจำนวนไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับจำนวนของการแบ่งโครงตาข่าย เพื่อความสะดวก ผู้เขียนจะใช้จุดต่อ 2 จุด (หมายเลขอ้างอิงของจุดต่อ มาจากตารางที่ 1) ซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างเข้ามาตามลำดับ สำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16×4) จุดต่อ 2, 6 (โครงตาข่าย 24×6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32×8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40×10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48×12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่างๆ เหล่านั้น ในกรณีที่มีค่า α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 8.75, 3.88, 2.23, 1.62

และ 1.41 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 6.13, 3.01, 1.93, 1.45 และ 1.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 5.86, 2.75, 1.70, 1.16 และ 0.82 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16×4 ถึง 48×12 ตามลำดับ

ค่าต่างๆ ในตารางที่ 1 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งจุดต่อต่างๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดังภาพที่ 12 ส่วนภาพที่ 13 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่ายซึ่งพบว่า ค่าของ α ในช่วงของโครงตาข่ายหยาบ ส่งผลต่อร้อยละความแตกต่างอย่างชัดเจน จนกระทั่งไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญเมื่อเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้ละเอียดขึ้น

4.3 ความเค้นเฉือน (Shear Stress)

ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าของความเค้นเฉือน σ_{xy} นั้น จะใช้การวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกันกับการวิเคราะห์ความเค้นตั้งฉากที่ผ่านมา ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2 ภาพที่ 14 และ ภาพที่ 15 ตามลำดับ

จากตารางที่ 2 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่างๆ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันกับความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง

0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 12.08, 7.40, 3.43, 2.09 และ 2.24 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 11.13, 6.25, 3.35, 2.32 และ 1.88 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 และในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 9.80, 6.09, 2.80, 2.25 และ 1.71 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ ค่าต่างๆ ในตารางที่ 2 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งจุดต่อต่างๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎี แสดงได้ดังภาพที่ 14 เช่นเดียวกับในกรณีของความเค้นดึงจาก ภาพที่ 15 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่าย ซึ่งพบว่าการเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้มีความละเอียดมากขึ้นส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณมากกว่าการเพิ่มค่าของ α

5. อภิปรายผลและสรุป (Discussion and Conclusion)

ผลที่ได้จากการวิเคราะห์สมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างโดเมนสามส่วนย่อยทรงสี่เหลี่ยมแบบ 3 ส่วนภายในเอลิเมนต์หลักซึ่งอาศัยหลักความสมมาตรของ Unit cell เข้ามาช่วยเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของโดเมนสามส่วนที่สร้างขึ้นตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติของคานซึ่งรับแรงเฉือนในรูปแบบฟังก์ชันพาราโบลาที่ปลายอิสระนี้ มีลักษณะการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรง

หรือค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีในสองรูปแบบด้วยกัน โดยมีความแตกต่างเพียงร้อยละ 1-2 สำหรับความเค้นทั้งสองแบบ กล่าวคือ แบบที่หนึ่งคือขนาดของโครงตาข่าย เมื่อมีการเพิ่มจำนวนของโครงตาข่ายให้มากขึ้น ซึ่งเป็นที่คาดการณ์ได้ สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขที่ว่า ยิ่งความละเอียดของโครงตาข่ายมากขึ้น ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ก็สูงตามไปด้วย หากแต่ต้องแลกมาด้วยการประมวลผลทางคอมพิวเตอร์ที่นานขึ้นและใช้ทรัพยากรของเครื่องที่มากขึ้น สำหรับรูปแบบที่สองซึ่งเป็นค่าของ α นั้น ก็เป็นไปในทิศทางเดียวกัน ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้แปรผันโดยตรงกับค่า α ที่เข้าใกล้ 0.5 เนื่องจากงานวิจัยในครั้งนี้ มีการประยุกต์ใช้หลักความสมมาตรของ Unit cell เพื่อกระจายรูปแบบความต่อเนื่องของโดเมนสามส่วนตลอดทั่วทั้งขอบเขตของปัญหาที่กำลังพิจารณาร่วมด้วยความไม่ต่อเนื่องของขอบเขตของปัญหา (Discontinuity) หรือปัญหากลศาสตร์การแตกหัก (Fracture Mechanics) ซึ่งมักจะพบการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูง (Stress Concentration) ณ บริเวณปลายรอยแตก (Crack tips) ดังนั้น โดยการพิจารณาใช้ทั้งค่า α และจำนวนของโครงตาข่ายที่เหมาะสมร่วมกับการจัดรูปแบบสมมาตรในบริเวณดังกล่าวเพื่อให้เกิดความแม่นยำในการคำนวณสูง ในขณะที่บริเวณที่ไกลออกไปซึ่งได้รับอิทธิพลจากการเปลี่ยนแปลงความเค้นสูงดังกล่าวก็น้อยนั้น อาจพิจารณาใช้ค่า α และขนาดโครงตาข่ายที่น้อยลงมา แต่ยังคงให้ค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับที่ยอมรับได้ อันจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณให้ดีขึ้น

ตารางที่ 1 ความเค้นตึงฉาก σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายต่างๆ

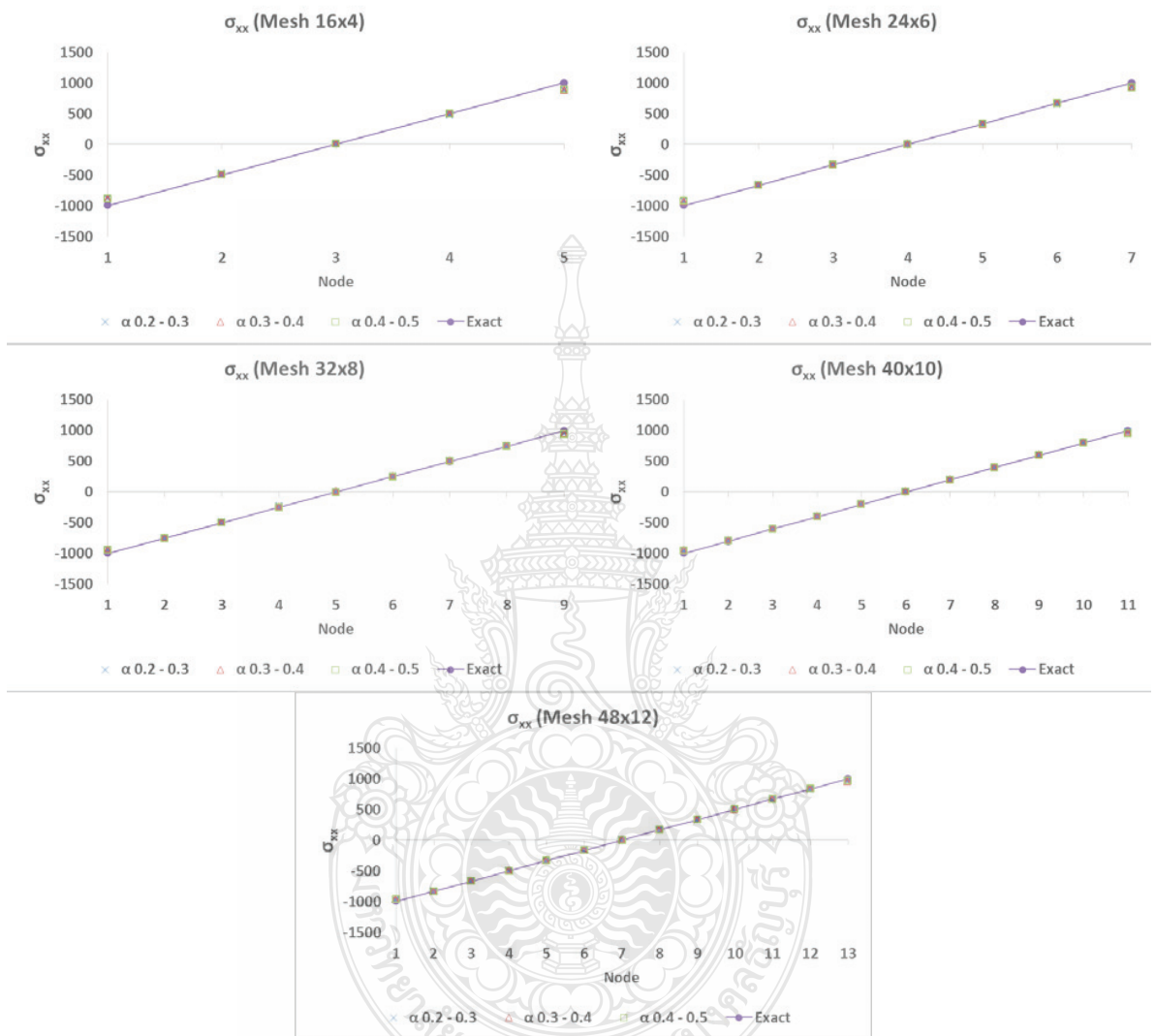
| Mesh 16x4 | | | | | Mesh 24x6 | | | | | | | Mesh 32x8 | | | | | | | | | | | |
|-----------|----------|---------|-------|--------|-----------|---------|----------|---------|---------|-------|--------|-----------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|-------|--------|--------|--------|---------|
| α | node | | | | α | node | | | | | | α | node | | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 0.2-0.3 | -874.83 | -472.79 | 3.23 | 477.07 | 875.56 | 0.2-0.3 | -920.09 | -653.91 | -328.83 | 1.88 | 324.43 | 654.23 | 925.29 | 0.2-0.3 | -943.76 | -745.81 | -495.13 | -244.90 | -2.20 | 247.53 | 500.94 | 740.80 | 937.97 |
| 0.3-0.4 | -890.39 | -496.60 | -0.23 | 497.64 | 876.07 | 0.3-0.4 | -932.82 | -660.99 | -330.14 | -4.47 | 327.23 | 663.29 | 926.34 | 0.3-0.4 | -940.80 | -747.95 | -501.10 | -252.01 | 0.70 | 253.67 | 502.38 | 744.04 | 945.35 |
| 0.4-0.5 | -887.19 | -499.09 | 0.22 | 496.51 | 887.26 | 0.4-0.5 | -925.45 | -668.94 | -332.70 | -0.85 | 330.84 | 666.06 | 923.24 | 0.4-0.5 | -943.80 | -746.51 | -496.99 | -250.71 | -4.36 | 247.82 | 501.10 | 749.77 | 945.14 |
| Exact | -1000.00 | -500.00 | 0.00 | 500.00 | 1000.00 | Exact | -1000.00 | -666.67 | -333.33 | 0.00 | 333.33 | 666.67 | 1000.00 | Exact | -1000.00 | -750.00 | -500.00 | -250.00 | 0.00 | 250.00 | 500.00 | 750.00 | 1000.00 |

| Mesh 40x10 | | | | | | | | | | | Mesh 48x12 | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|----------|---------|---------|---------|---------|------|--------|--------|--------|--------|------------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| α | node | | | | | | | | | | α | node | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0.2-0.3 | -959.28 | -789.18 | -597.61 | -395.64 | -197.61 | 1.80 | 196.09 | 397.57 | 592.08 | 791.52 | 968.94 | 0.2-0.3 | -970.10 | -820.89 | -669.83 | -493.36 | -332.99 | -163.41 | 0.25 | 163.66 | 328.34 | 497.70 | 663.46 | 829.16 | 961.25 |
| 0.3-0.4 | -950.38 | -796.58 | -598.57 | -396.96 | -195.79 | 2.92 | 201.83 | 399.13 | 598.36 | 800.00 | 954.12 | 0.3-0.4 | -965.70 | -833.43 | -682.44 | -496.25 | -331.93 | -162.15 | 2.30 | 168.21 | 331.58 | 497.48 | 663.48 | 835.56 | 957.73 |
| 0.4-0.5 | -957.89 | -797.69 | -601.99 | -400.56 | -198.94 | 0.50 | 198.37 | 398.17 | 598.14 | 799.06 | 956.32 | 0.4-0.5 | -964.38 | -836.20 | -685.12 | -500.95 | -333.29 | -165.45 | -0.42 | 166.88 | 334.32 | 500.75 | 667.63 | 831.56 | 961.53 |
| Exact | -1000.00 | -800.00 | -600.00 | -400.00 | -200.00 | 0.00 | 200.00 | 400.00 | 600.00 | 800.00 | 1000.00 | Exact | -1000.00 | -833.33 | -666.67 | -500.00 | -333.33 | -166.67 | 0.00 | 166.67 | 333.33 | 500.00 | 666.67 | 833.33 | 1000.00 |

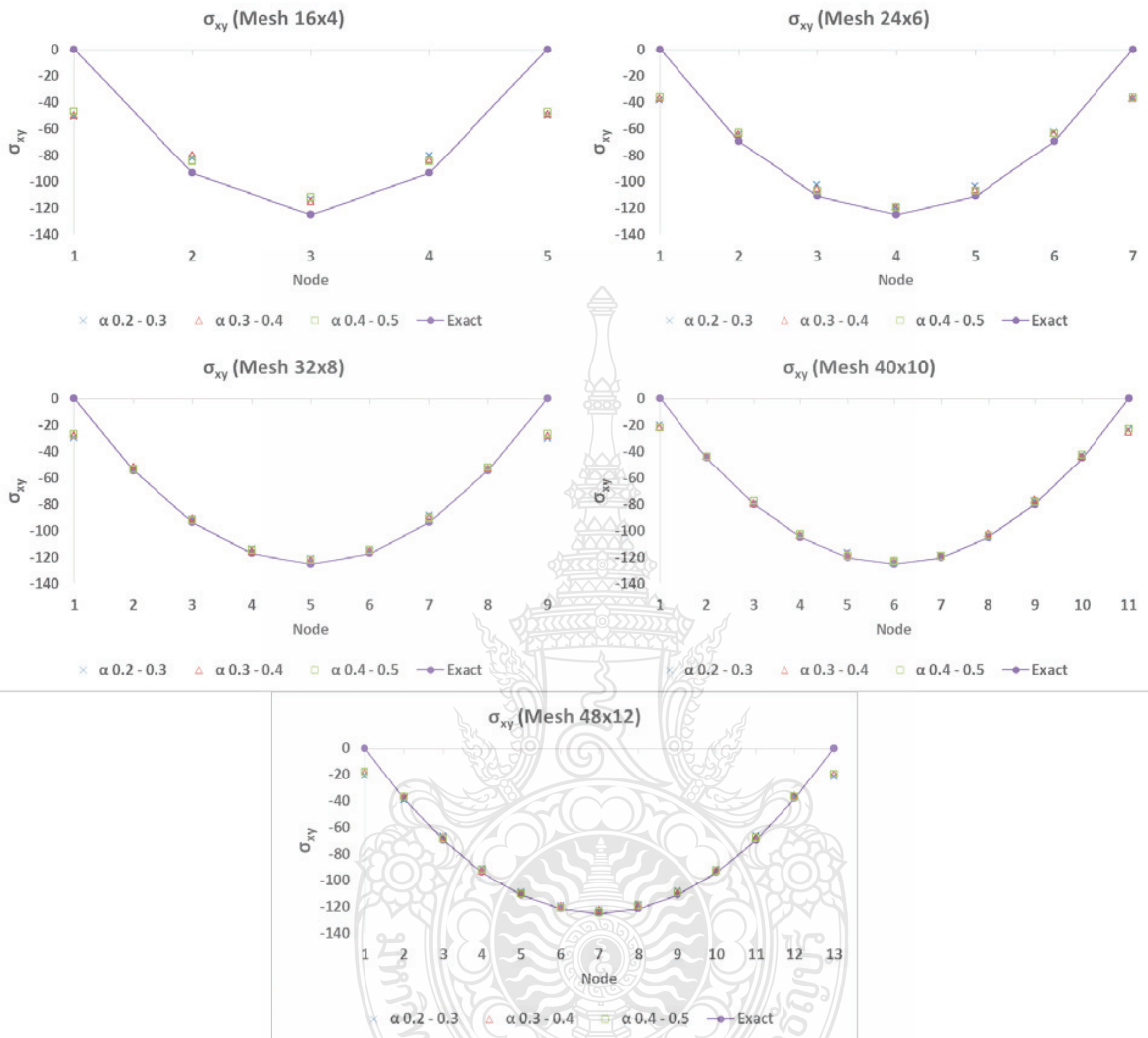
ตารางที่ 2 ค่าความเค้นเฉือน σ_{xy} ที่โครงตาข่ายขนาดต่างๆ

| Mesh 16x4 | | | | | Mesh 24x6 | | | | | | | Mesh 32x8 | | | | | | | | | | | |
|-----------|--------|--------|---------|--------|-----------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|-----------|--------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| α | node | | | | α | node | | | | | | α | node | | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 0.2-0.3 | -51.08 | -82.16 | -113.40 | -80.05 | -49.73 | 0.2-0.3 | -38.27 | -64.17 | -102.72 | -119.26 | -103.67 | -62.11 | -37.45 | 0.2-0.3 | -29.36 | -52.82 | -91.01 | -113.36 | -120.73 | -114.87 | -88.66 | -52.75 | -29.87 |
| 0.3-0.4 | -49.65 | -79.81 | -115.23 | -83.71 | -48.94 | 0.3-0.4 | -37.02 | -63.62 | -105.68 | -118.91 | -106.43 | -63.26 | -36.82 | 0.3-0.4 | -27.56 | -51.30 | -90.47 | -115.48 | -121.48 | -114.78 | -89.54 | -53.08 | -27.94 |
| 0.4-0.5 | -46.95 | -84.79 | -112.01 | -84.90 | -47.59 | 0.4-0.5 | -36.10 | -62.75 | -106.89 | -119.68 | -106.85 | -63.24 | -36.23 | 0.4-0.5 | -27.19 | -53.46 | -92.27 | -114.55 | -121.90 | -114.59 | -90.64 | -51.65 | -26.40 |
| Exact | 0.00 | -93.75 | -125.00 | -93.75 | 0.00 | Exact | 0.00 | -69.44 | -111.11 | -125.00 | -111.11 | -69.44 | 0.00 | Exact | 0.00 | -54.69 | -93.75 | -117.19 | -125.00 | -117.19 | -93.75 | -54.69 | 0.00 |

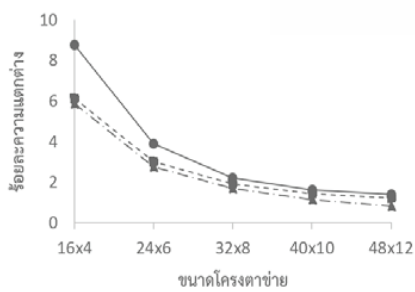
| Mesh 40x10 | | | | | | | | | | | Mesh 48x12 | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|------------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| α | node | | | | | | | | | | α | node | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | 11 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0.2-0.3 | -20.19 | -43.25 | -79.82 | -103.52 | -116.68 | -123.79 | -118.22 | -104.40 | -77.86 | -42.81 | -23.78 | 0.2-0.3 | -20.95 | -39.89 | -67.44 | -91.50 | -109.47 | -119.82 | -123.68 | -119.52 | -108.45 | -92.37 | -66.85 | -37.54 | -22.11 |
| 0.3-0.4 | -21.36 | -43.31 | -79.34 | -103.08 | -117.39 | -122.35 | -118.90 | -102.13 | -76.50 | -44.02 | -24.99 | 0.3-0.4 | -18.74 | -36.72 | -67.99 | -93.08 | -110.35 | -119.99 | -123.15 | -120.06 | -109.96 | -92.69 | -67.79 | -36.35 | -20.28 |
| 0.4-0.5 | -22.30 | -43.87 | -77.52 | -102.64 | -118.80 | -122.85 | -119.02 | -103.38 | -78.50 | -42.57 | -23.04 | 0.4-0.5 | -18.10 | -37.02 | -68.18 | -91.61 | -110.59 | -120.72 | -124.37 | -119.16 | -109.64 | -92.49 | -67.88 | -36.99 | -19.64 |
| Exact | 0.00 | -45.00 | -80.00 | -105.00 | -120.00 | -125.00 | -120.00 | -105.00 | -80.00 | -45.00 | 0.00 | Exact | 0.00 | -38.19 | -69.44 | -93.75 | -111.11 | -121.53 | -125.00 | -121.53 | -111.11 | -93.75 | -69.44 | -38.19 | 0.00 |



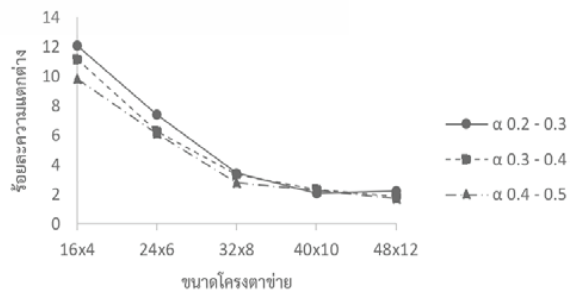
ภาพที่ 12 σ_{xx} vs. Exact solutions



ภาพที่ 13 σ_{xy} vs. Exact solutions



ภาพที่ 14 ความแตกต่างของ σ_{xx} กับค่าทางทฤษฎี



ภาพที่ 15 ความแตกต่างของ σ_{xy} กับค่าทางทฤษฎี

6. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนใคร่ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรีที่สนับสนุนเวลาในการทำวิจัยครั้งนี้

7. เอกสารอ้างอิง

[1] Lee NS and Bathe KJ (1993). Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for numerical Methods in engineering*, 36(20): 3553-76.

[2] Belytschko T, Lu YY and Gu L (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2): 229-56.

[3] Babuška I, Banerjee U and Osborn JE (2004). Generalized finite element methods—main ideas, results and perspective. *International Journal of Computational Methods*, 1(01): 67-103.

[4] Beirão da Veiga L, Brezzi F, Cangiani A, Manzini G, Marini LD and Russo A (2013). Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01): 199-214.

[5] Francis A, Ortiz-Bernardin A, Bordas SP and Natarajan S (2017). Linear smoothed polygonal and polyhedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(9): 1263-88.

[6] Sukumar N and Tabarraei A (2004). Conforming polygonal finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(12): 2045-66.

[7] Talischi C, Paulino GH, Pereira A and Menezes IF (2012). PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45(3): 309-28.

[8] Liu G, Dai K and Nguyen TT (2007). A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*, 39(6): 859-77.

[9] Liu G-R and Trung N (2016). *Smoothed finite element methods*. CRC press.

[10] Liu G, Nguyen-Xuan H and Nguyen-Thoi T (2010). A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(10): 1222-56.

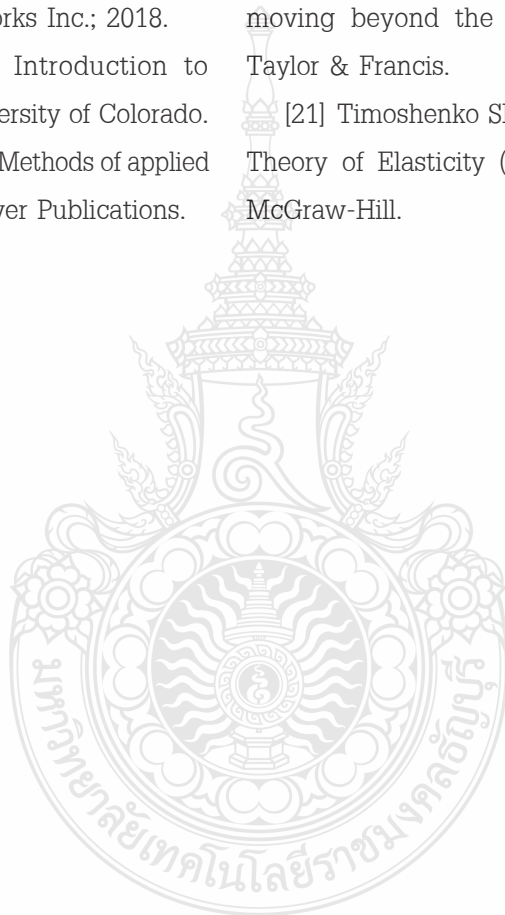
[11] Lee C-K (2016). *Gradient smoothing in finite elasticity: near-incompressibility*. Cardiff University.

[12] Dai K and Liu G (2007). Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM). *Journal of Sound and Vibration*, 301(3-5): 803-20.

[13] Nguyen-Xuan H and Nguyen-Thoi T (2009). A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin-Reissner plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(8): 882-906.

[14] Bordas SP, Rabczuk T, Hung N-X, Nguyen VP, Natarajan S, Bog T et al. (2010). Strain smoothing in FEM and XFEM. *Computers & structures*, 88(23-24): 1419-43.

- [15] Dai K, Liu G and Nguyen T (2007). An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics. Finite elements in analysis and design, 43(11-12): 847-60.
- [16] MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2019b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.; 2018.
- [17] Felippa CA (2004). Introduction to finite element methods. University of Colorado.
- [18] Hildebrand FB (2012). Methods of applied mathematics. New York: Dover Publications.
- [19] Liu G (2008). A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods. International Journal of Computational Methods, 5(02): 199-236.
- [20] Liu G-R (2009). Meshfree methods: moving beyond the finite element method. Taylor & Francis.
- [21] Timoshenko SP and Goodier JN (1970). Theory of Elasticity (3rd edition). New York: McGraw-Hill.



ประวัติผู้เขียน

| | |
|------------------|--|
| ชื่อ-นามสกุล | นาย กิตติภูมิ เรืองทรัพย์คณา |
| วัน เดือน ปีเกิด | 31 พฤษภาคม 2537 |
| ที่อยู่ | 8/65 แขวงรามคำแหง เขตหัวหมาก จ.กรุงเทพฯ 10240 |
| ประวัติการศึกษา | ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี |
| ประวัติการทำงาน | ปัจจุบันทำงาน บริษัท นิคเคน เออีเอส สแควฟโพลดิ้ง (ไทยแลนด์) จำกัด วิศวกรเทคนิคและออกแบบ |
| เบอร์โทรศัพท์ | 097-2265867 |
| อีเมล | kittipoom_r@mail.rmutt.ac.th |

