ผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

EFFECT OF ELASTIC-PLASTIC ROTATIONAL SPRING JOINT ON POSTBUCKLING BEHAVIOUR OF VARIABLE-ARE-LENGTH ELASTICA

ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2562

ผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยึดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรม หลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2562

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยที่เกิดจากการศึกษาค้นคว้าและวิจัย ขณะที่ข้าพเจ้าศึกษาอยู่ในคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ดังนั้นงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือเป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี และข้อความต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอรับรองว่าไม่มีการคัดลอกหรือนำงานวิจัยของผู้อื่นมานำเสนอในชื่อของข้าพเจ้า

This thesis consists of research materials conducted at the Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Thanyaburi and hence the copyright owner. I hereby certify that the thesis does not contain any forms of plagiarism.

(นายณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ Effect of Elastic-Plastic Rotational Spring Joint on Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica
ชื่อ – นามสกุล	นายณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2562

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

KM .... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

ชัยณรงค์ อธิสกุล .... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

จตุพล ตั้งปกาศิต .... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์จตุพล ตั้งปกาศิต, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)
วันที่ 27 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2563

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้
ชื่อ - นามสกุล นายณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา 2562

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุน โดยแบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนมีทั้งหมดสามรูปแบบคือ ยืดหยุ่นเชิงเส้น ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และอิลาสติก-พลาสติก ปลายด้านหนึ่งของ อิลาสติกคายึดติดกับจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระ ปลายอีกด้านวางอยู่บนจุดรองรับแบบสลีฟ สปริงต้านทานการหมุนวางห่างจากจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระตามระยะที่กำหนด แรงอัดกระทำที่ปลายด้านจุดรองรับแบบสลีฟเพื่อดันความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาเข้าไปในระบบจนกระทั่งสามารถสังเกตพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะได้

การศึกษาในครั้งนี้ ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่ตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุนของสปริงแทนด้วยสัญลักษณ์ทั้ง 3 กรณี คือ α =0.25, α =0.50 และ α =0.75 โดยกำหนดสติฟเนสเริ่มต้นของสปริงต้านทานการหมุน $\overline{k_1}$ =10 และ 100 และแปรผันสติฟเนสของสปริงภายหลังการคราก ชุดของสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหาสามารถหาได้จากสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาแบบขอบเขตสองจุดจึงใช้วิธียิงเป้าในการศึกษานี้ โดยอาศัยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุตตากับระบบสมการครอบคลุมปัญหาร่วมกับกระบวนการกระทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน จนกระทั่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต

จากผลการคำนวณพบว่าภายหลังการโก่งเดาะอิลาสติกคาอยู่ในสภาวะไร้เสถียรภาพ และเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากแรงอัดอาจลดลงอย่างทันทีซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนส $r = \overline{k_2} / \overline{k_1}$ และอิลาสติกคาสามารถเปลี่ยนกลับมาอยู่ในสภาวะที่มีเสถียรภาพได้ในช่วงใดช่วงหนึ่งของความยาวส่วนโค้งทั้งหมด นอกจากนั้นในปัญหานี้สปริงต้านทานการหมุนสามารถเกิดการหมุนกลับด้านได้ โดยเมื่อเกิดการหมุนกลับด้านของสปริงเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก จะให้ค่าน้ำหนักบรรทุกที่มากกว่าในกรณีที่สปริงเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ เนื่องจากสติฟเนสของสปริงที่เพิ่มขึ้น

คำสำคัญ : อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ หลังการโก่งเดาะ วิธียิงเป้า ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ อิลาสติก-พลาสติก สปริงต้านทานการหมุน

Thesis Title	Effect of Elastic-Plastic Rotational Spring Joint on Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica
Name - Surname	Mr. Nattaphat Chantarakunmanee
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Assistant Professor Boonchai Phungpaingam, Ph.D.
Academic Year	2019

ABSTRACT

This thesis investigated the postbuckling behavior of the variable-arc-length elastica (VAL elastica) connected with a rotational spring joint. All three models of the spring joints included linear elastic, bilinear elastic, and elastic-plastic. One end of the elastica was attached at the hinged joint; meanwhile, the remote end was placed on the sleeve support. The rotational spring joints were independently located at the determined distances apart from the hinged joint. The compression force exerted at the sleeve support to push the arc-length of the elastica into the system so that the postbuckling behavior could be observed.

In this study, the postbuckling behavior of the VAL elastica was studied symbolically for the three cases of the spring joint positions. They were α =0.25, α =0.50 and α =0.75. At each position of α, the initial value of the stiffness of the spring joints ($\overline{k_1}$ =10 and 100) was assigned; and the stiffness of the spring joints were varied after yielding. The set of governing differential equations could be obtained from equilibrium equations, moment-curvature relations, and geometric relations. Since this problem was a two-point boundary value, the shooting method was employed in this study. The numerical integration of the Runge-Kutta method and the equation system method, which covered this problem, in cooperation with the repetitive process of the Newton-Raphson method, were performed until the boundary conditions were satisfied.

From the computational results, it was found that the elastica became unstable after buckling. After yielding of the spring joints, the compression might rapidly drop depending on the ratio of the stiffness ($r = \overline{k_2} / \overline{k_1}$). The elastica could turn into a stable equilibrium for the interval of total arc-length. In addition to this problem, the rotation of the spring joint could be reversed. When the elastic-plastic spring joint was reversed, its load parameter was greater than that of the bilinear elastic spring joint due to the increase of the stiffness.

Keywords: VAL elastica, postbuckling, shooting method, bilinear elastic, elastic-plastic, rotational spring joint

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ด้วยความกรุณา ความเอาใจใส่ และความอนุเคราะห์ ให้คำปรึกษาและแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นในการทำงานวิจัยเป็นอย่างดียิ่ง ผู้ทำงานวิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม อาจารย์ที่ปรึกษา เป็นอย่างสูงที่ท่านได้เสียสละเวลาให้คำแนะนำติชมเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขในส่วนที่มีข้อพกพร่องต่าง ๆ ตลอดจนติดตามความก้าวหน้าในการจัดทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้อย่างใกล้ชิดด้วยดีตลอดมา โดยนับตั้งแต่เริ่มต้นดำเนินการจนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จเรียบร้อยสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ ผู้ดำเนินการวิจัยขอกราบขอบพระคุณคณะอาจารย์ทุก ๆ ท่าน เพื่อนกลุ่มงานวิจัยเทศบาลตำบลพัฒนานิคม และ ครอบครัวของข้าพเจ้า ที่คอยให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจด้วยดีตลอดมาในการจัดทำวิทยานิพนธ์ ประโยชน์อันใดที่ได้จากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ย่อมถือเป็นผลที่เกิดจากความกรุณาของท่านทั้งหลาย ผู้ดำเนินการวิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจศึกษางานวิจัยทางด้านนี้ และหากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีข้อบกพร่อง หรือไม่มีความสมบูรณ์ประการใด ผู้ดำเนินการวิจัยกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป(ต่อ)

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

A	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบข้อหมุน
B	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดรองรับแบบสลีฟ
C	ตัวกำกับล่างแสดงตำแหน่งจุดต้านทานการหมุนแบบสปริง
E	โมดูลัสความยืดหยุ่น
I	โมเมนต์ของความเฉื่อย
P	แรงอัดตามแนวแกน
L	ความยาวช่วงของอิลาสติกคา
α	ค่าคงที่สัดส่วนความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา ที่แสดงตำแหน่งของจุดต้านทาน
β_1	มุมระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุน และมุมแบบอิลาสติกคา-พลาสติก ก่อนเกิดการโก่งเดาะ
β_2	มุมระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุน และมุมแบบอิลาสติกคา-พลาสติก หลังเกิดการโก่งเดาะ
θ_A	มุมหมุนของอิลาสติกคา
H_A	แรงในแนวราบที่จุด A
V_A	แรงในแนวดิ่งที่จุด A
V_B	แรงในแนวดิ่งที่จุด B
M	โมเมนต์ดัด
N	แรงตามแนวแกน
V	แรงเฉือน ณ ตำแหน่งใด ๆ ของอิลาสติกคา
$\Delta\theta$	ค่าความแตกต่างของมุม ณ ตำแหน่งของสปริงที่จุด C
x	ระยะตามแนวราบของอิลาสติกคา
y	ระยะตามแนวดิ่งของอิลาสติกคา
x^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอิลาสติกคา
y^*	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวดิ่งของอิลาสติกคา
s	ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคา

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

S_t	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา
k_1	ค่าสติฟเนสของสปริงก่อนการโก่งเดาะ
k_2	ค่าสติฟเนสของสปริงหลังการโก่งเดาะ
$\bar{x}$	ระยะตามแนวราบของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{x}=\dfrac{x}{L}\right]$
$\bar{y}$	ระยะตามแนวดิ่งของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{y}=\dfrac{y}{L}\right]$
$\overline{x^*}$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวราบของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\overline{x^*}=\dfrac{x^*}{L}\right]$
$\overline{y^*}$	ระยะจากจุดรองรับ A ถึงจุดที่แรงกระทำตามแนวดิ่งของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\overline{y^*}=\dfrac{y^*}{L}\right]$
$\bar{s}$	ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{s}=\dfrac{s}{L}\right]$
$\bar{S}_t$	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคาแบบไร้หน่วย $\left[\bar{S}_t=\dfrac{S_t}{L}\right]$
$\bar{P}$	แรงกระทำแบบจุด กระทำในแนวดิ่งอยู่เสมอโดยไม่มีการติดตามการเสียรูปแบบไร้หน่วย $\left[\bar{P}=\dfrac{PL^2}{EI}\right]$
$\bar{M}$	โมเมนต์ดัดแบบไร้หน่วย $\left[\bar{M}=\dfrac{ML}{EI}\right]$
$\bar{I}$	โมเมนต์ของความเฉื่อยแบบไร้หน่วย $\left[\bar{I}=\dfrac{I}{L^4}\right]$
$\bar{k}_i$	ค่าสติฟเนสของสปริงแบบไร้หน่วย $\left[\overline{k_i}=\dfrac{k_iL}{EI}\right]$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

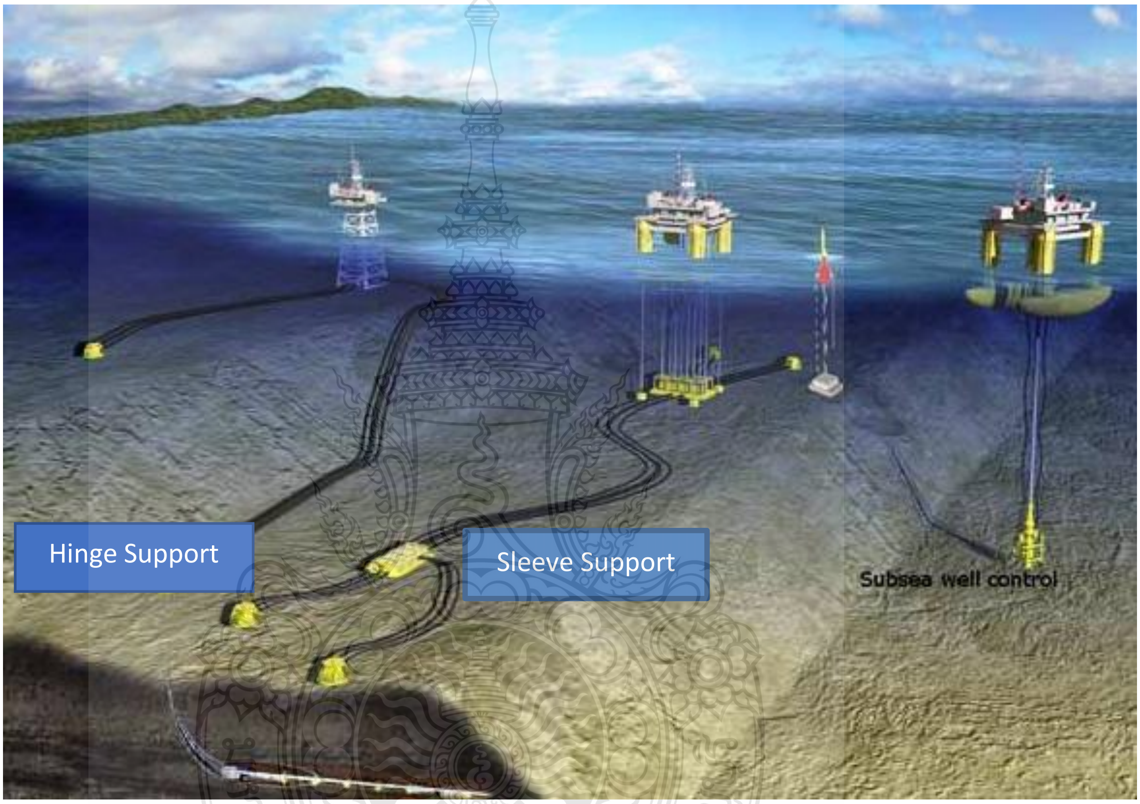
Arc - Length	ความยาวส่วนโค้ง
Boundary Condition	เงื่อนไขขอบเขต
Critical Load	น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ
Differential Equation	สมการอนุพันธ์
Elastica	อิลาสติกคา
Elliptic Function	อีลิปติคฟังก์ชั่น
Elliptic - Integral Method	วิธีอีลิปติคอินทิกรัล
Equilibrium	สมดุล
Euler - Bernoulli	ทฤษฎีของออยเลอร์ - แบร์นูลี่
Finite Element Method	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
Flexural Rigidity	ความแข็งแรงของวัสดุต่อการดัด
Flowchart	แผนผังแสดงขั้นตอนของการทำงาน
Free - Body Diagram	ไดอะแกรมของชิ้นส่วนอิสระ
Geometric Relation	ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต
Governing Equation	สมการครอบคลุมของปัญหา
Homogenous Material	วัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกัน
Instability	ความไร้เสถียรภาพ
Isotropic	คุณสมบัติของวัสดุ (E) ที่เท่ากันทุกทิศทาง
Large Deflection	การโก่งตัวมาก
Newton - Raphson Method	วิธีนิวตัน - ราฟสัน
Polycarbonate Sheet	แผ่นโพลีย์คาร์โบเนต
Runge - Kutta Method	วิธีรุงเง - คุตตา
Shooting Method	วิธียิงเป้า
Stable Equilibrium	สมดุลแบบมีเสถียรภาพ
Static	สถิตศาสตร์
Strain	ความเครียด
Stress	ความเค้น
Stiffness	ความต้านทานของวัสดุ

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

Tolerance	ความคลาดเคลื่อน
Total - Arc - Length	ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด
Unstable Equilibrium	สมดุลแบบไร้เสถียรภาพ
Variable - Arc - Length Elastica	อิลาสติกคาที่มีความส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา



รูปที่ 1.1 รูปตัวอย่างการประยุกต์ใช้กับงานท่อส่งน้ำมันและก๊าซธรรมชาติ (https://nongferndaddy.com)

การศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาเกิดขึ้นอย่างแพร่หลายและต่อเนื่อง โดยอาจแบ่งการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาได้สองรูปแบบคือ อิลาสติกคาที่มีความยาวคงที่ (Constant Length Elastica) และอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length Elastica หรือเรียกโดยย่อว่า VAL Elastica) อิลาสติกคาทั้งสองแบบนี้มีพฤติกรรมที่แตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อถูกกระทำโดยแรงอัดตามแนวแกน (Compression) อิลาสติกคาที่มีความยาวคงที่ภายใต้แรงอัดแสดงพฤติกรรมแบบมี เสถียรภาพ (Stable) หลังการโก่งเดาะ ในขณะที่อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดแบบเดียวกันแสดงพฤติกรรมแบบไร้เสถียรภาพ (Unstable) หลังการ

โก่งเดาะ [3,4] ซึ่งอิลาสติกคาที่ มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้นิยมนำไปใช้ในแบบจำลองของท่อลำเลียงใต้ทะเล (Marine Risers) [5] โดยความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาสามารถเพิ่มขึ้นได้เป็นผลให้สติฟเนสการดัดลดลง ดังนั้นเมื่อความ ยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นทำให้เกิดสภาวะสมดุลที่ไร้เสถียรภาพภายหลังการโก่งเดาะ โดยความยาวส่วนโค้งที่เพิ่มขึ้นทำ ให้มีโอกาสที่เกิดการหักงอของท่อลำ เลียงได้ ซึ่งในงานวิจัยของ Phungpaingam และChucheepsakul [1] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาทีมีสปริงต้านทานการหมุนภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา โดยใช้สปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นเป็นแบบจำลองการหักงอของอิลาสติกคา การศึกษาดังกล่าวเป็นการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาสองชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งการศึกษาอันตกิริยา (Interaction) ของอิลาสติกคาสองชิ้นส่วนซึ่งมีงานวิจัยที่ค่อนข้างจำกัด อีกตัวอย่างหนึ่งของการศึกษาอิลาสติกคาสองชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนคือ Dado et al. [9] ซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่เป็นเสายืน (Cantilever Column) ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งเป็นการศึกษาในส่วนของอิลาสติกคาที่มีความยาวคงที่ แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยทั้งสองชิ้นนี้ [1,9] ยังไม่ได้ศึกษาถึงผลกระทบของลักษณะรูปแบบของสปริงต้านทานการหมุนแบบอื่นๆ จึงเป็นประเด็นที่น่าสนใจสำหรับการศึกษาในงานวิจัยนี้

เนื่องจากสปริงต้านทานการหมุนนี้อาจเกิดขนาดของมุมหมุนที่มีขนาดมากได้ในกรณีที่สปริงมีค่าสติฟเนสที่ค่อนข้างน้อย ซึ่งทำให้มีโอกาสเกิดสภาพของพฤติกรรมของจุดหมุนที่เป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic Behavior) หรือ เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic Behavior) ได้ ซึ่งในอดีตที่ผ่านมามีบทความที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมภายใต้สภาวะที่ชิ้นส่วนของอิลาสติกคาเกิดสภาพที่เป็นอิลาสติก-พลาสติกมาแล้วเช่นในงานวิจัยของ [14] และเมื่อไม่นานมานี้ในปี คศ. 2016 Pandit และ Srinivasan [15] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานโค้งที่พิจารณาผลกระทบของวัสดุที่เป็นแบบอิลาสโต-พลาสติก (Elasto-Plastic) ภายใต้แรงกระทำที่ติดตามการเสียรูปของคาน โดยจะเห็นได้ว่าในงานวิจัยของ [14-15] มุมลาดเอียงของคานเพิ่มขึ้นในทิศทางเดียว พฤติกรรมการหมุนของหน้าตัดจึงเป็นการหมุนไปในทิศทางเดียว แต่ในบทความนี้มุมหมุนของสปริงต้านทานการหมุนอาจมีการเพิ่มขึ้น และลดลง (หมุนกลับด้าน) ในขณะที่ความความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาจะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องซึ้ง เป็นประเด็นที่น่าศึกษาถึงผลกระทบทีมีต่อพฤติกรรมของอิลาสติกคา

ในบทความนี้ใช้กระบวนการเชิงตัวเลขในการคำนวณหาผลเฉลย โดยสร้างระบบสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหาจากสมการสมดุลของของอิลาสติกคา ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของอิลาสติกคา หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเง-คุตต้า (Runge-Kutta) จนกระทั้ง สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนในบทความนี้ได้พิจารณาแบบจำลองทั้งหมดสามแบบคือ 1) ยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) 2) ยืดหยุ่น

เชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic) และ3) อิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic) โดยที่สปริงต้านทานการหมุนแบบแรกได้มีการศึกษาไว้แล้วโดย Phungpaingam และ Chucheepsakul [1] ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้ขยายขอบเขตของพฤติกรรมของสปริงต้านทานการหมุนให้ครอบคลุมได้มากยิ่งขึ้นโดยที่ผลจากการคำนวณได้ถูกเรียบเรียงในรูปของแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และขนาดการเปลี่ยนแปลงของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta|$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ และรูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาในสภาวะต่างๆ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นพฤติกรรมโดยรวมของอิลาสติกคาได้ โดยพบว่าภายหลังจากการคราากน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ลดลง และจะลดลงอย่างชัดเจนเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าเป็นศูนย์ภายหลังการครากและอาจมีการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ได้ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการมีเสถียรภาพของอิลาสติกคาในช่วงสั้นๆ ในขณะที่ความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_t}$ เพิ่มขึ้นขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ อาจมีค่าที่เพิ่มขึ้นและลดลงได้ ซึ่งการเพิ่มขึ้น และลดลงของมุม $|\Delta\theta|$ มีผลต่อความสามารถในการถ่ายโมเมนต์ที่แตกต่างกันของสปริงต้านทานการหมุนทั้งสามรูปแบบ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการแสดงเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้น และมีพฤติกรรมที่น่าสนใจอาทิเช่น ผลของการเปลี่ยนแปลงสติฟเนสของสปริงที่จุดครากต่อพฤติกรรมของอิลาสติกคา การมีเสถียรภาพของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (VAL Elastica) พฤติกรรมของอิลาสติกคาเมื่อสปริงหมุนกลับด้าน เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาพฤติกรรมเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากและมีการเปลี่ยนแปลงค่าสติฟเนส เทียบกับกรณีที่สปริงไม่เกิดการคราก

1.2.2 เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาเมื่อสปริงเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก และเกิดการหมุนกลับด้าน

1.3 สมมติฐานในการวิเคราะห์

สมมติฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยสปริงต้านทานการหมุนเป็นจุดแบบเชิงเส้นคู่ในช่วงความยาวอิลาสติกคา

1.3.1 วัสดุมีความสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันตลอด (Homogenous)

1.3.2 อิลาสติกคาไม่มีการยืดหดตัวตามแนวแกนเมื่อรับแรง

1.3.3 คุณสมบัติของวัสดุเป็นไปตามกฎความสัมพันธ์ของฮุค (Hooke’s law)

1.3.4 การแอ่นตัวของอิลาสติกคามีค่ามากในขณะที่ความเครียดมีค่าน้อย

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี่นำเสนอการวิเคราะห์พฤติกรรมหลังการโกงเดาะของอิลาสติกคาที่มีสปริงหมุนภายในเป็นแบบเชิงเส้นคู่ เป็นจุดต้านทานการหมุนในช่วงความยาวของอิลาสติกคา โดยมีขอบเขตของการศึกษาดังนี้

1.4.1 แบบจำลองของงานวิจัยเป็นอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีจุดครากภายในโดยจำลองให้สปริงเป็นจุดหมุนแบบเชิงเส้นคู่

1.4.2 วัสดุเป็นแบบเชิงเส้นซึ่งมีสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดอยู่ในรูป $\sigma = E\varepsilon$ โดยที่ E คือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น

1.5 ขั้นตอนการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการวิเคราะห์ผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยน การแก้สมการครอบคลุมของปัญหาด้วยวิธียิงเป้าร่วมกับเทคนิคการอินทิกรัลเชิงตัวเลขแบบรุงเง - คุตตา โดยมีขั้นตอนการศึกษา คือ

1.5.1 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.5.2 ศึกษาคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นเชิงเส้น

1.5.3 ศึกษาทฤษฎีการเสียรูปมากของอิลาสติกคา

1.5.4 ศึกษากระบวนการ Newton - Raphson

1.5.5 ศึกษาระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting Method) และการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta Method)

1.5.6 ศึกษาโปรแกรม MATLAB

1.5.7 เขียนสมการครอบคลุมของปัญหา (Governing Equation) และกำหนดขอบเขตเงื่อนไขที่เหมาะสมในการหาคำตอบ (Boundary Condition)

1.5.8 เปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากโปรแกรม MATLAB

1.5.9 สรุปผลการศึกษา

1.6 ข้อจำกัดของการศึกษา

1.6.1 ไม่พิจารณาผลกระทบที่เกิดจากการยืดหดตัวตามแนวแกน (Axial Deformation)

1.6.2 ไม่พิจารณาผลอันเนื่องมาจากการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Deformation)

1.6.3 ไม่พิจารณาผลที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลก

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.7.1 ทราบพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีจุดหมุนสปริงแบบเชิงเส้นคู่

1.7.2 ทราบถึงน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ (ถ้ามี)

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length,VAL) เมื่อถูกแรงอัดตามแนวแกน (Compression) โดยใช้สปิงเป็นตัวต้านทานการหมุน เป็นจุดเชื่อมต่อของแบบจำลองที่เกิดการโก่งเดาะ โดยอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้จะแสดงพฤติกรรมแบบไร้เสถียรภาพ (Unstable) หลังการโก่งเดาะ ด้วยเหตุนี้การโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้จึงจัดปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจ โดยการแก้ปัญหาในงานวิจัยนี้ได้ใช้กระบวนการเชิงตัวเลขในการคำนวณผลเฉลย โดยสร้างระบบสมการอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) จาก สมการสมดุลของอิลาสติกคา ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความยาวส่วนโค้ง ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของอิลาสติกคา และทำการอินทิเกรตด้วยวิธีรุงเง-คุตต้า (Runge-Kutta) จนสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา แต่ในบทนี่จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบต่างๆ โดยทำการแบ่งไปตามลักษณะของวัสดุที่ถูกแรงกระทำและสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อยๆได้ ดังนี่ การศึกษาพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ การศึกษาพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคา ดังนี้

2.2.1 การศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

Boonchai Phungpaingam และ Somchai Chucheepsakun [1] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่มีจุดหมุนแบบสปริงรวมไปถึงผลกระทบที่เกิดจากแรง

ณัฐฏ์ พิชัยยุทธ์ [2] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอีลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length,VAL) โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา

ศรัณย์ ชุ่มกลัด [3] ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length,VAL) ได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง

ธานินทร์ สุดสงวน [4] ได้นำเสนอพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอีลาสติกคาของคานโค้งแบบวงกลมที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดแบบติดตามการเสียรูปกระทำที่ปลายการหาคำตอบของปัญหาใช้สองวิธีที่แตกต่างกันคือวิธีอีลิปติคอินทิกรัลและวิธีที่สองแก้ปัญหาโดยวิธียิงเป้า

สุนทร เกียรติคงศักดิ์ และสมชาย ชูชีพสกุล [5] ได้ทำการศึกษาถึงพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย โดยที่ปลายทั้งสองข้างหมุนได้ตามเงื่อนไขของจุดรองรับซึ่งกำหนดแรงอัดเข้ากระทำที่ปลายของอิลาสติกคา และทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม ABAQUS ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนล์เอลิเมนต์ และนำผลที่ได้ไปตรวจสอบกับผลที่ได้จากวิธีการยิงเป้า

บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [6] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกเอียงที่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน โดยที่ปลายด้านหนึ่งของคานเป็นจุดรองรับแบบหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งของคานยอมให้มีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระบนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน เมื่อเกิดการเสียรูปความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของคานมีค่าที่ไม่คงที่ โดยหาคำตอบด้วยวิธีอิลิปติคอินทิกรัลและวิธีการยิงเป้า ซึ่งทั้งสองวิธีให้ผลที่ใกล้เคียงกันมาก

2.2.2 การศึกษาพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคา

วิชิต กลับใจ [7] ได้ศึกษาผลเฉลยในรูปแบบปิดและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาทรงโค้งแบบวงกลมภายใต้แรงกระทำที่ปลาย โดยที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาทรงโค้งมีฐานรองรับเป็นแบบยึดหมุนและอีกด้านเป็นแบบลูกกลิ้ง

Dado และคณะ [8] ได้ศึกษาอิลาสติคคาสองชิ้นที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่เป็นเสายื่น (Cantilever Column) ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปิงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งเป็นการศึกษาในส่วนของอิลาสติกคาที่มีความยาวคงที่

Kounadis และ Maillis [9] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะคานที่รองรับแบบธรรมดาโดยใช้เทคนิคการประมาณคำตอบเปรียบเทียบผลกับวิธีการเชิงตัวเลขใช้วิเคราะห์ปัญหาอีลาสติคคาที่ทำจากวัสดุไม่เป็นเชิงเส้น

Wang และ Kitipornchai [10] ได้นำเสนอเทคนิคยิงเป้าแบบประสิทธิผล (Shooting Optimization) เพื่อหาค่าการโก่งตัวมากและพฤติกรรมการโก่งเดาะของชิ้นส่วนโครงสร้าง

สหรัฐ โพธิ์นอก [11] ได้ศึกษาการโก่งตัวมากของเสาปลายยื่นที่ทำจากแบบจำลองวัสดุแบบลุดวิกภายใต้แรงยึดรั้งที่เคเบิลและแก้ปัญหาโดยใช้วิธียิงเป้าร่วมด้วยกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุตตา อันดับที่ 7

Athisakul และ Chuchepsakul [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ โดยหาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้า จากการวิเคราะห์ผลพบว่าการยกหรือลดระดับของจุดรองรับมีผลต่อค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ เมื่อยกระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติมีค่าเพิ่มขึ้น และหากลดระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองกระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติมีค่าลดลง

Monasa [13] ได้ศึกษาพฤติกรรมภายใต้สภาวะที่ชิ้นส่วนของอิลาสติกคาเกิดสภาพที่เป็นอิลาติก-พลาสติก

Srinivasan และคณะ [14] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานโค้งที่พิจารณาผลกระทบของวัสดุที่เป็นแบบอิลาสโต-พลาสติก (Elasto-Plastic) ภายใต้แรงกระทำที่ติดตามการเสียรูปของคาน

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีการดัดยืดหยุ่นของคาน (Elastic Bending Theory of Beam) เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนรูปกับโมเมนต์ดัด จากรูปที่ 2.1 แสดงรูปคานที่รับน้ำหนักบรรทุกใดๆ ในระนาบ xy โดยมีระนาบสมมาตร (Plane of Symmetry) อยู่ตำแหน่งแนวแกนสะเทินของหน้าตัด เมื่อคานรับน้ำหนักแล้วจะเกิดการโก่งตัวและแรงภายในประกอบด้วยแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ดังนั้นเมื่อพิจารณราชิ้นส่วนเล็กๆ ความยาว dx อยู่ห่างจากฐานรองรับ A เป็นระยะ x โดยถูกกระทำจากโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียวดังรูปที่ 2.2 จากการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างหน้าตัด a และ b ทำให้เกิดความเครียดที่แนว ab มีค่าเท่ากับ

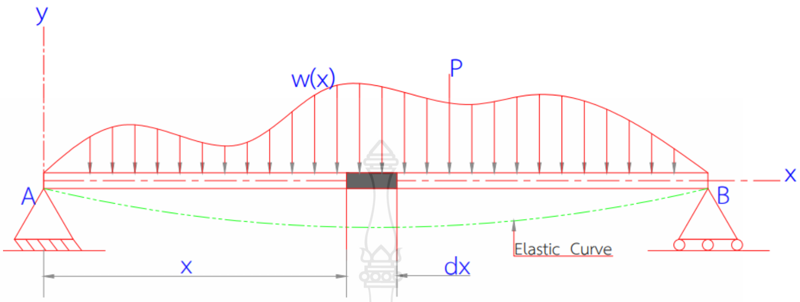
$$\varepsilon = \frac{y}{R} \tag{2.1}$$

จากกฎของฮุค (Hooke’s Low)

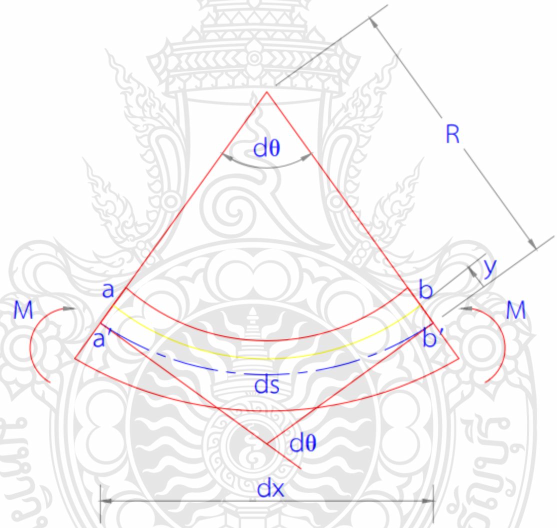
$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.2}$$

นำสมการที่ (2.1) แทนในสมการที่ (2.2)

$$\sigma = E\frac{y}{R} \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.1 อิลาสติกคาที่มีน้ำหนักมากระทำ



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นโค้งยืดหยุ่นและโมเมนต์ดัดของอิลาสติกคา

จากสมการที่ (2.3) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและจุดที่พิจารณาบนโครงสร้างห่างจากแนงแกนสะเทินเท่ากับ y เนื่องจาก E และ R มีค่าคงที่ของวัสดุ ดังนั้นหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจะแปรผันโดยตรงกับระยะทางของจุดที่พิจารณาบนหน้าตัดที่ห่างจากแนวแกนสะเทินเป็นระยะ y โดยมีค่ามากที่สุดที่ผิวบนสุด ดังนั้นหน่วยแรงที่มีค่าสูงสุดมีค่าเท่ากับ

จากรูปที่ 2.2 สามารถหาความสัมพันธ์โมเมนต์ดัดกับความโค้ง (Moment-Curvature Relationship) ได้ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{R}=\frac{M}{EI} \tag{2.1}$$

โดยที่ θ = มุมราดที่จุดใดๆบนเส้นโค้งอิลาสติกคา (Elastic Curve)

M = โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด

$d\theta$ = ค่าการเปลี่ยนแปลงของมุมลาด ของชิ้นส่วนความยาว dx

R = รัศมีความโค้ง (Radius of curvature) ของ ds

EI = ความแข็งแกร่งต่อการดัด (Flexural rigidity) ของหน้าตัด

จากความสัมพันธ์ค่ามุมลาดที่แกนสะเทิน

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta \tag{2.2}$$

จากสูตรตรีโกณมิติ

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{ds}(\tan\theta)=\sec^2\theta\frac{d\theta}{ds} \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{d\theta}{ds} \tag{2.7}$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{ds} \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{d\theta}{ds} \tag{2.9}$$

ความยาวส่วนโค้งอิลาสติกคา

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.10}$$

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{R} \tag{2.11}$$

$$\frac{M_{(X)}}{EI} = \frac{1}{R} \tag{2.12}$$

$$\frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R} \tag{2.13}$$

สมการที่ 2.13 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear second order - differential equation) โดยค่าการโก่งตัว (Deflection) ของอิลาสติกคาจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ 1 ทำให้ค่าพจน์ $(\frac{dy}{dx})^2 \approx 0$ ทำให้สมการ 2.13 เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้น

$$\frac{M_{(X)}}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} \tag{2.14}$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี่เพื่อศึกษาพฤติกรรของอิลาสติกคาที่มีสปริงต้านทานการหมุนภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคา โดยใช้สปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นเป็นแบบจำลองของการโก่งเดาะขออิลาสติกคาและสังเกตพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดกับความโค้งและความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต ในชุดของสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) และใช้วิธียิงเป้า (Shooting Method) ในการคำนวณหาผลเฉลยได้ใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุตต้า (Runge-Kutta Method) ที่มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องการศึกษา

3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

โดยสมการโมเมนต์ดัดกับความโค้งหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และความเครียด(Strain) โดยคุณสมบัติของวัสดุที่เป็นไปตามกฎของฮุค (Hook's Law) ดังสมการที่ (3.1)

$$\sigma = E\varepsilon \tag{3.1}$$

เมื่อ

σ คือ ความเค้น

ε คือ ความเครียด

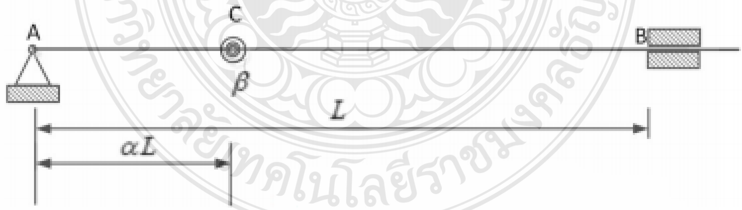
E คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ

3.2 แบบจำลองของปัญหา

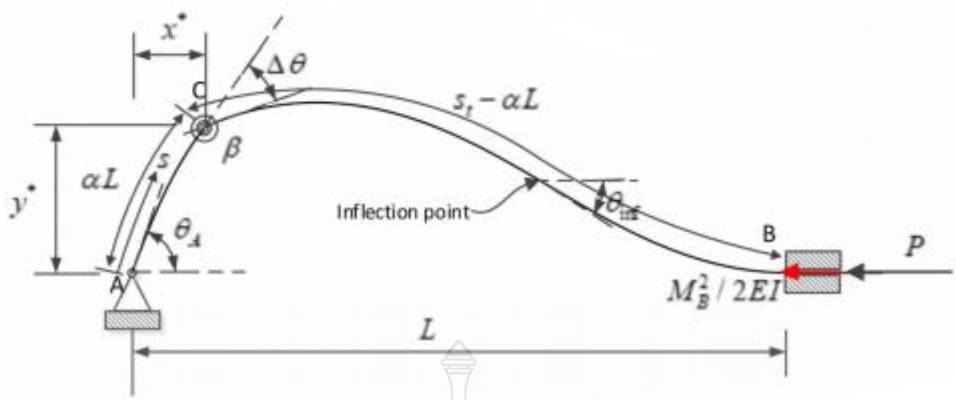
จากรูปที่ 3.1 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคาในสองส่วน ส่วนแรกก่อนอิลาสติกคาเกิดการโก่งเดาะ และส่วนที่สองหลังจากอิลาสติกคาติกคาเกิดการโก่งเดาะแล้ว จากปัญหาของอิลาสติกคาทีมีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีสปริงต้านทานการหมุนเป็นจุดเชื่อมต่อระหว่างอิลาสติกคาทั้งสอง โดยที่ก่อนอิลาสติกคาจะเกิดการโก่งเดาะ อิลาสติกคาวางตัวในแนวเส้นตรง $A\ B$ ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนโดยมีจุด A เป็นจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระและที่ปลายอีกด้านของอิลาติกคาวางอยู่ที่จุดรองรับที่จุด B ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบ สลีฟ ซึ่งอนุญาตให้ชิ้นส่วนของอิลาสติกคาสามารถเลื่อนไหลไปในแนวราบได้อย่างอิสระ และทีจุด C เป็นจุดต่อระหว่างอิลาสติกคาทั้งสองชิ้นส่วนโดยมีสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติกเป็นจุดเชื่อมต่อ เมื่ออิลาสติกคาถูกแรงอัด P ตาม

แนวแกน ที่จุด B ทำให้อิลาสติกคาเกิดการโก่งเดาะที่จุด C โดยมีความสัมพันธ์ของโมเมนต์ที่จุดต้านทานการหมุนของสปริง M_s กับผลต่างของมุมที่สปริงต้านทานการหมุน $\Delta\theta$ ดังแสดงในรูปที 3.3 และในส่วนที่สามเป็นส่วนของการหมุนกลับด้าน (Reverse Rotation) ของสปริงต้านทานการหมุน โดยมีค่าของมุม β_1 และ β_2 เป็นค่ามุมของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุนกับผลต่างของมุม $(\Delta\theta)$ ที่จุด C เมื่ออิลาสติกคาเกิดการโก่งเดาะอันเนื่องมาจากแรงอัด P ที่จุด B จะมีรูปร่างหลังการโก่งเดาะดังแสดงในรูปที่ 3.2 และภายหลังการโก่งเดาะมุมที่จุด A มีค่ามุมเปลี่ยนเป็น θ_A โดยมีระยะตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนจากจุด A ในแนวแกน x อยู่ที่ระยะ x^* และระยะตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนจากจุด A ในแนวแกน y อยู่ที่ระยะ y^* ผลต่างของมุมที่เกิดขึ้นระหว่างสปริงต้านทานการหมุนกับโมเมนต์ที่จุดสปริงต้านทานการหมุนมีค่าเป็น $\Delta\theta$ ซึ้งเกิดจากการส่งถ่ายโมเมนต์ดัดที่มีความแตกต่างกันของอิลาสติกคาที่เชื่อมต่อเป็นเนื้อเดียวกัน จากจุด B ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบสลีฟเมื่อเกิดแรงอัด P ขึ้นตามแนวแกน AB ทำให้ชิ้นส่วนของอิลาสติกคาถูกดันเข้าไปในระบบทำให้อิลาสติกคาเกิดการโก่งตัวขึ้นทำให้ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาทั้งหมดเพิ่มขึ้นและในขณะที่เกิดการเลื่อนไหลอย่างอิสระนั้นมีแรงที่เกิดขึ้นอีกหนึ่งแรงเนื่องจากโมเมนต์ดัด M_B ทีปลาย B ดังสมการที่ (3.2) ซึ่งเรียกว่าแรงแบบคอนฟิกกูเรชันนอล (Configurational Force)

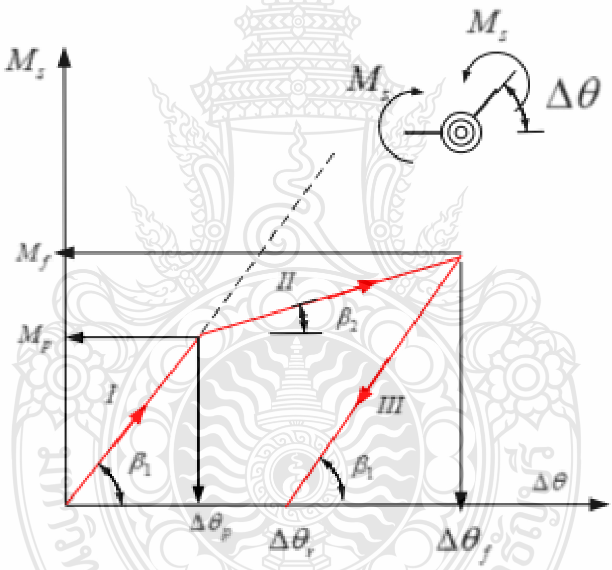
$$\Delta H_A = \frac{M_B^2}{2EI} \tag{3.2}$$



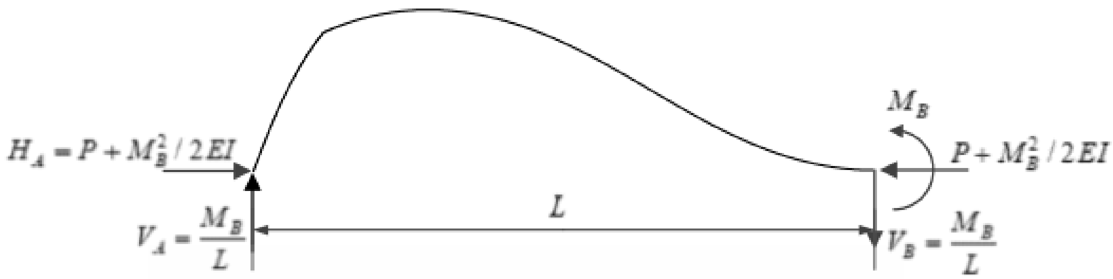
รูปที่ 3.1 อิลาสติกคาก่อนการโก่งเดาะ



รูปที่ 3.2 อิลาสติกคาภายหลังการโก่งเดาะ



รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุน M_s และ $\Delta\theta$ แบบอิลาสติกคา-พลาสติก



รูปที่ 3.4 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของอิลาสติกคา

จากรูปที่ 3.4 ใช้สมการสมดุลคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของอิลาสติกคาที่จุดรองรับ A และที่จุดรองรับ B ได้ ดังนี้

$$H_A = P + \left(\frac{M_B^2}{2EI}\right) \tag{3.3}$$

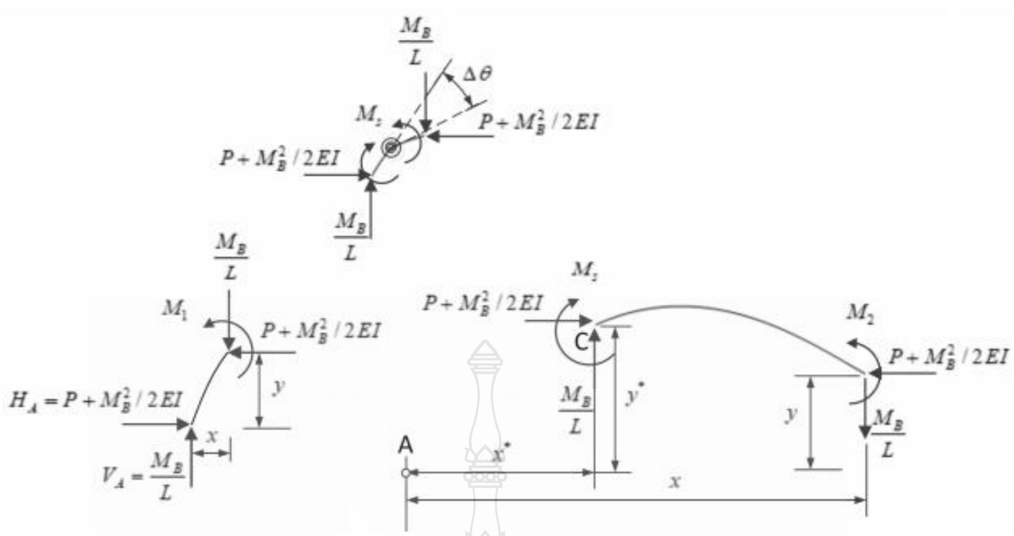
แรงกระทำตามแนวแกน x ที่จุดรองรับ A และ ที่จุดรองรับ B

$$V_A = \frac{M_B}{L} \tag{3.4}$$

แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของอิลาสติกคาที่จุดรองรับ A

$$V_B = \frac{M_B}{L} \tag{3.5}$$

แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของอิลาสติกคาที่จุดรองรับ B



รูปที่ 3.5 ผังชิ้นส่วนอิสละของอิลาสติกคา

จากรูปที่ 3.5 แสดงรูปตัดของชิ้นส่วนอิสระของอิลาสติกคาเพื่อหาแรงกระทำภายในชิ้นส่วน จากจุดรองรับที่จุด A ไปตามแนวราบเป็นระยะ x และไปตามแนวดิ่งเป็นระยะ y จะได้สมการโมเมนต์ต้านทานภายในชิ้นส่วนอิลาสติกคา ดังนี้

กรณีที่ $s \le \alpha L$

$$M_1 = \frac{M_B}{L}x - \left(P + \frac{M_B^2}{2EI}\right)y \tag{3.1}$$

กรณีที่ $\alpha L \le s \le s_t$

$$M_2 = \frac{M_B}{L}\left(x - x^*\right) + \left(P + \frac{M_B^2}{2EI}\right)\left(y^* - y\right) + M_s \tag{3.2}$$

โดยที่ s_t คือความยาวส่วนโค้งทั้งหมด M_s คือความสามารถในการส่งถ่ายโมเมนต์ที่จุดต้านทานการหมุนของสปริง ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าสติฟเนส (Stiffness) ของสปริงต้านทานการหมุน โดยแบ่งช่วงค่าสติฟเนสของสปริงที่จุดต้านทานการหมุนออกเป็นสามช่วงดังแสดงจากรูปที่ 3.3 ดังนี้

ช่วงที่ I $k_1 = \tan\left(\beta_1\right)$

ช่วงที่ II $k_2 = \tan\left(\beta_2\right)$

ช่วงที่ III $k_1 = \tan\left(\beta_1\right)$

โดยในช่วงที่ III ค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนจะหมุนกลับมาเป็นช่วงที่ I อีกครั้งโดยเป็นการหมุนกลับด้าน ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวจะทำให้การส่งถ่ายโมเมนต์ดัดผ่านจุดต้านทานการหมุนของสปริงขึ้นอยู่กับผลต่างของมุมที่จุด C ดังแสดงในสมการ (3.3)

$$M_S = \begin{cases} \Delta\theta k_1 & 0 \le \Delta\theta \le \Delta\theta_p \\ M_p + (\Delta\theta - \Delta\theta_p)k_2 & \Delta\theta_p \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \\ (\Delta\theta - \Delta\theta_r)k_1 & \Delta\theta_r \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \end{cases} \tag{3.3}$$

โดยที่ M_p คือโมเมนต์เมื่อสปริงเกิดการครากและ $\Delta\theta_p$ คือมุมที่สปริงเกิดการคราก และมุม $\Delta\theta_r$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\Delta\theta_r = \Delta\theta_f - \frac{M_f}{k_1} \tag{3.4}$$

โดย $\Delta\theta_f$ คือผลต่างของมุมของสปริงที่เริ่มหมุนกลับด้านและ M_f คือความสามารถในการส่งถ่ายโมเมนต์เมื่อสปริงเริ่มหมุนกลับด้านตามลำดับ จากสมการความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัดภายในช่วงของอิลาสติกคาที่ผ่านมาสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของอิลาสติกคา และความสัมพันธ์ทางด้านเรขาคณิตได้แสดงในสมการที (3.5) ถึง (3.7) ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_i}{EI} \qquad i = 1,2 \tag{3.5}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{3.6}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{3.7}$$

สมการ (3.5) ถึง (3.7) ทั้งหมดประกอบกันเป็นสมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equation) เพื่อความสะดวกในการคำนวณตัวแปรทั้งหมดจะอยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยดังต่อไปนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \bar{M}_i \qquad i = 1, 2 \tag{3.8}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos\theta \tag{3.9}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin\theta \tag{3.10}$$

จากระบบสมการในรูปตัวแปรไร้หน่วย (3.8) ถึง (3.10) เป็นสมการครอบคลุมปัญหาที่ใช้ในกระบวนแก้ไขปัญหาเชิงตัวเลขในงานวิจัยนี้ โดยระบบสมการดังกล่าวได้อธิบายการโก่งตัวของอิลาสติกคาในชิ้นส่วนย่อย $d\bar{s}$ หากต้องการทราบพฤติกรรมโดยรวมทั้งหมดจำเป็นต้องอินทิเกรตระบบสมการ (3.8) ถึง (3.10) จากจุดเริ่มต้นคือ $\bar{s} = 0$ ไปจนถึงจุดปลาย $\bar{s} = \bar{s}_t$ โดยที่การอินทิเกรตต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาต่อไปนี้

ตัวแปร	ความยาวส่วนโค้ง $\bar{s}$	
	$\bar{s} = 0$	$\bar{s} = \bar{s}_t$
$\bar{x}$	0	1
$\bar{y}$	0	0
θ	θ_A	0

จากสมการที่ (3.1) และสมการที่ (3.2) เป็นสมการโมเมนต์ดัดภายในอิลาสติกคาซึ่งสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_B \bar{x} - \left(\bar{P} + \frac{\bar{M}_B^2}{2} \right) \bar{y} \qquad \bar{s} \le \alpha \tag{3.11}$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_B \left(\bar{x} - \bar{x}^* \right) + \left(\bar{P} + \frac{\bar{M}_B^2}{2} \right) \left(\bar{y}^* - \bar{y} \right) + \bar{M}_s \qquad \alpha \le \bar{s} \le \bar{s}_t \tag{3.12}$$

จากสมการที่ (3.3) เป็นสมการโมเมนต์ที่จุดต้านทานการหมุนของสปริงซึ่งสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\bar{M}_s = \begin{cases} \Delta\theta \bar{k}_1 & 0 \le \Delta\theta \le \Delta\theta_p \\ \bar{M}_p + (\Delta\theta - \Delta\theta_p)\bar{k}_2 & \Delta\theta_p \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \\ (\Delta\theta - \Delta\theta_r)\bar{k}_1 & \Delta\theta_r \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \end{cases} \tag{3.13}$$

จากสมการที่ (3.4) เป็นสมการผลต่างของมุมของสปริงที่เริ่มหมุนกลับด้านซึ่งสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\Delta\theta_r = \Delta\theta_f - \frac{\bar{M}_f}{\bar{k}_1} \tag{3.14}$$

โดยที่ตัวแปรต่าง ๆ ในระบบสมการอนุพันธ์ที่ได้จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยเพื่อให้ง่ายต่อการหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีการยิงเป้า ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{\mathrm{x}}^* = \frac{x^*}{L}, \bar{\mathrm{y}}^* = \frac{y^*}{L}, \bar{\mathrm{s}} = \frac{s}{L}, \bar{\mathrm{s}}_t = \frac{s_t}{L}, \bar{\mathrm{P}} = \frac{PL^2}{EI},$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i L}{EI}, \bar{M}_B = \frac{M_B L}{EI}, \bar{M}_p = \frac{M_p L}{EI}, \bar{M}_f = \frac{M_f L}{EI}, \bar{k}_i = \frac{k_i L}{EI} \tag{3.15}$$

จากขอบเขตเงื่อนไขของปัญหาสามารถสร้างสมการไร้หน่วยเพื่อใช้ในกระบวนการแก้ไขปัญหาได้ ดังนี้

$$\bar{x}\left(\bar{s}_t\right) - 1 = 0 \tag{3.16}$$

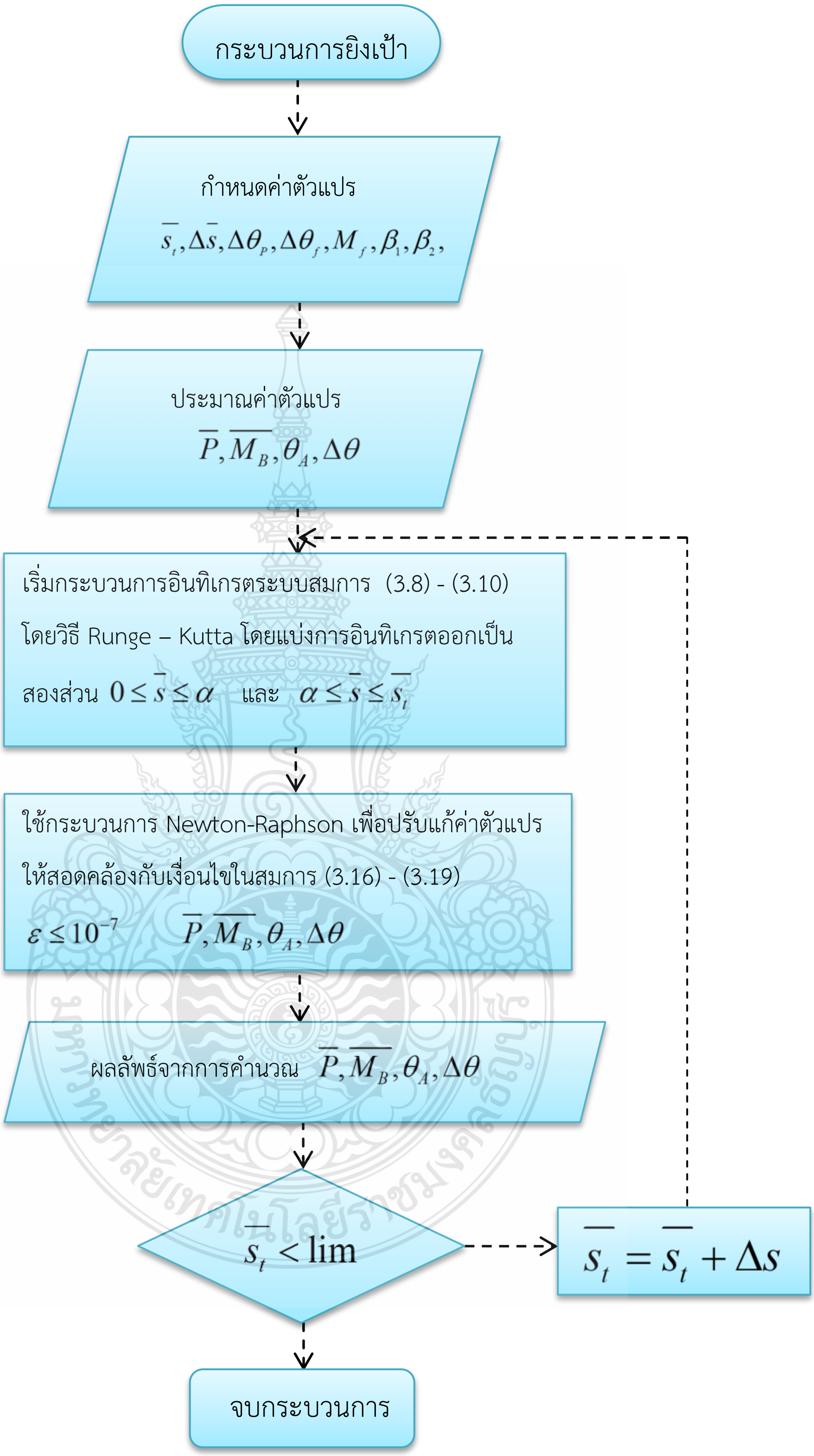
$$\bar{y}\left(\bar{s}_t\right) = 0 \tag{3.17}$$

$$\theta\left(\bar{s}_t\right) = 0 \tag{3.18}$$

จากสมการที่ (3.11) เป็นสมการโมเมนต์ดัดภายในอิลาสติกคาที่จุดต้านทานการหมุนของสปริงที่ $\bar{s}=\alpha$ ซึ่งสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปไร้หน่วยได้ ดังนี้

$$\overline{M}_B \bar{x}^* - \left(\overline{P} + \frac{\overline{M}_B^2}{2}\right)\bar{y}^* - \overline{M}_s = 0 \tag{3.19}$$

จากสมการที่ (3.8) ถึง (3.10) ซึ่งเป็นสมการครอบคลุมปัญหาแบบตัวแปรไร้หน่วย และสมการที่ (3.11) และ (3.12) เป็นสมการโมเมนต์ดัดภายในอิลาสติกคาแบบตัวแปรไร้หน่วย และสมการที่ (3.13) เป็นโมเมนต์ที่จุดต้านทานการหมุนของสปริง จากสมการที่ (3.8) ถึงสมการที่ (3.13) จะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 5 ตัวแปรคือ $\overline{s_t}, \overline{P}, \overline{M_B}, \theta_A$ และ $\Delta\theta$ และในกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขได้กำหนดให้ $\overline{s_t}$ ตัวแปรควบคุม ดังนั้นจึงเหลือตัวแปรไม่ทราบค่าอีก 4 ตัวแปร ซึ่งการหาผลเฉลยของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจะต้องอาศัยสมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาในสมการที่ (3.16) ถึง (3.19) เป็นเงื่อนไขในการหาผลเฉลยของปัญหาต่อไป ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้เนื่องจากเป็นปัญหาที่ระบบสมการอนุพันธ์มีความไร้เชิงเส้นสูง ดังนั้น ได้นำกระบวนการเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ไขปัญหา โดยในงานวิจัยนี้ได้ใช้ระเบียบวิธียิงเป้าแสดงดังรูปที่ 3.6 ซึ่งเป็นกระบวนการเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับการใช้แก้ไขปัญหาที่มีค่าขอบเขตชัดเจนเช่นปัญหาที่พิจารณาในงานวิจัยนี้ ในระหว่างการอินทิเกรตจาก $\bar{s}=0$ ถึง $\bar{s}=\bar{s}_t$ ในกรณีที่มุม $\Delta\theta$ มีขนาดเพิ่มขึ้นโมเมนต์ $\bar{M}_s$ จะมีค่าเป็นไปตามสองลำดับแรกของสมการที่ (3.13) แต่หาก $\Delta\theta$ มีขนาดที่ลดลงโมเมนต์ $\bar{M}_s$ จะมีค่าเป็นไปตามสมการลำดับที่สามของสมการที่ (3.13) และที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน (จุด C) จะไม่มีความต่อเนื่องของมุม ดังนั้นมุมที่จุดต้านทานการหมุนด้านซ้ายและด้านขวามือมีค่าไม่เท่ากันดังสมการ $\theta_C^+ = \theta_C^- + \Delta\theta$ โดยที่ θ_C^- และ θ_C^+ คือมุมด้านซ้ายมือ และขวามือที่จุด C ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 แผนผังกระบวนการยิงเป้า

3.3 กระบวนการแก้ปัญหาการโก่งงอของอิลาสติกคา

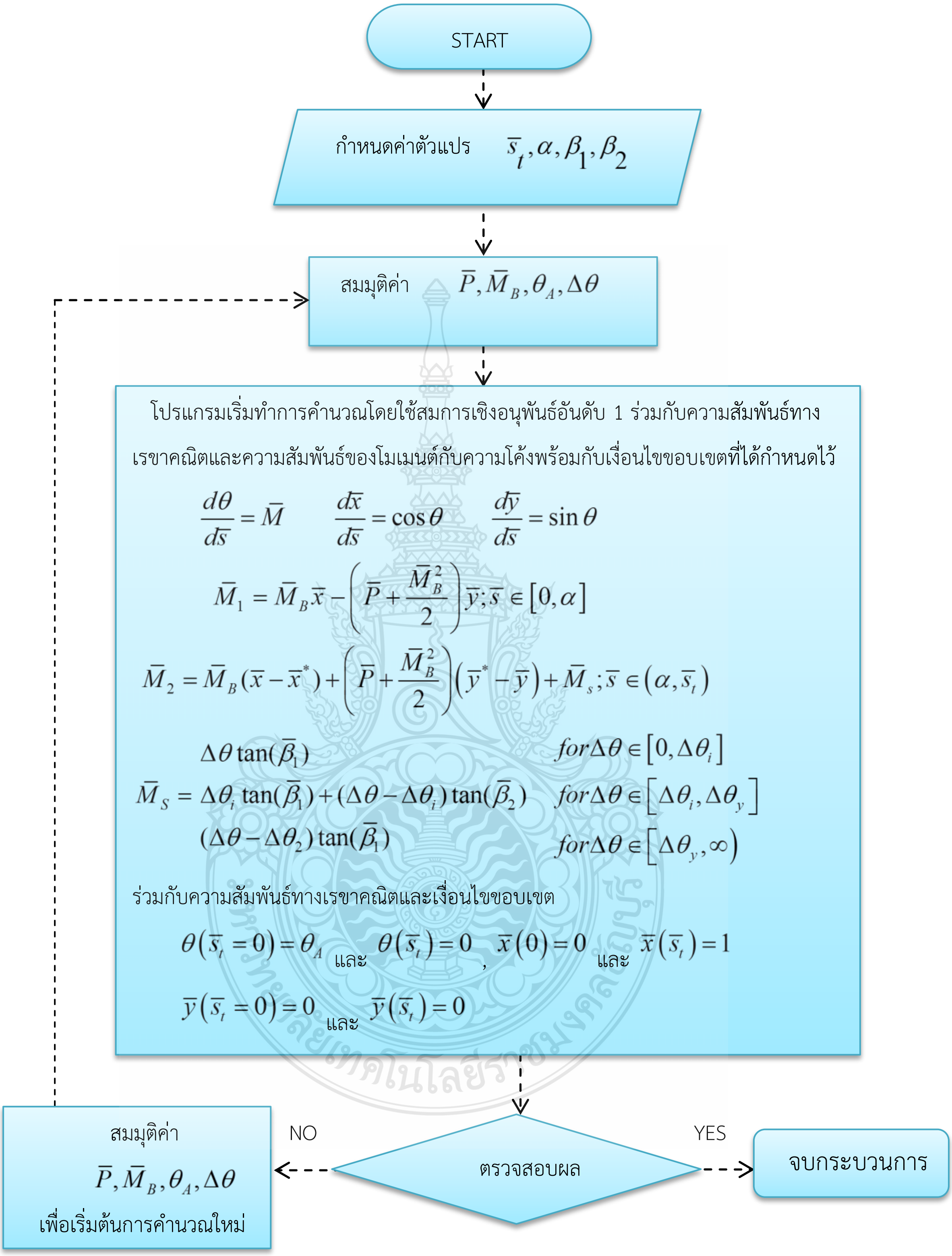
ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม MATLAB

3.3.1 ทำการป้อนค่าตัวแปรที่กำหนดค่า

3.3.2 ทำการประมาณค่าเริ่มต้นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในกระบวนการคำนวณ

3.3.3 หาคำตอบด้วยสมการครอบคลุมปัญหา (3.8) (3.9) (3.10) (3.11) (3.12) และ (3.13) กับขอบเขตของปัญหาในสมการที่ (3.16) (3.17) (3.18) และ (3.19) เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการยิงเป้าโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธี รุงเง-คุตตา

3.3.4 ปรับแก้ค่าที่ได้ทำการประไว้ในขั้นตอนที่ 3.3.3 โดยกระบวนการทำซ้ำ ด้วยระเบียบวิธีนิวตั้น-ราฟสัน จนกระทั้งมีค่าใกล้ศูนย์โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อน Tolerance เป็น 10^{-7} สำหรับการแก้ปัญหา



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม MATLAB

บทที่ 4
ผลการศึกษาและการวิเคราะห์

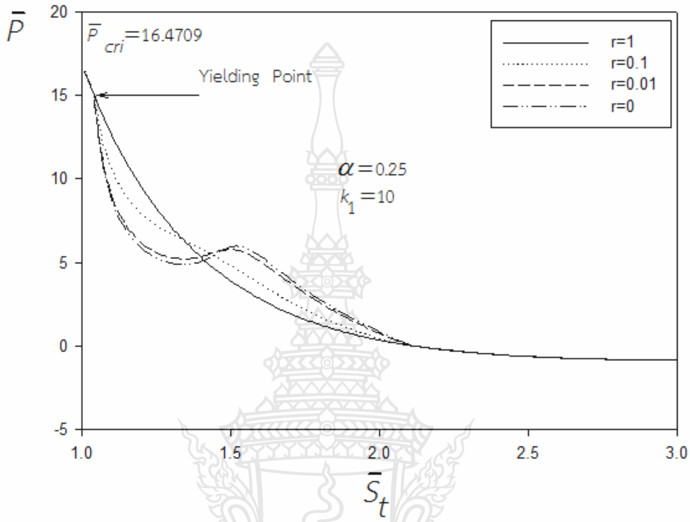
ผลจากการคำนวณได้นำเสนอในรูปแบบกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำที่ปลาย $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ โดยมีการแปรผันตัวแปรที่ต้องการศึกษาผลกระทบคือ ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α กับค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุน $\overline{k_1}, \overline{k_2}$ นอกจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{P}$ และ $\overline{s_t}$ แล้ว กราฟความสัมพันธ์ระหว่างมุม $|\Delta\theta|$ และ $\overline{s_t}$ และรูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่สภาวะต่าง ๆ ได้นำเสนอในการวิเคราะห์ด้วยเช่นกัน

4.1 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคา

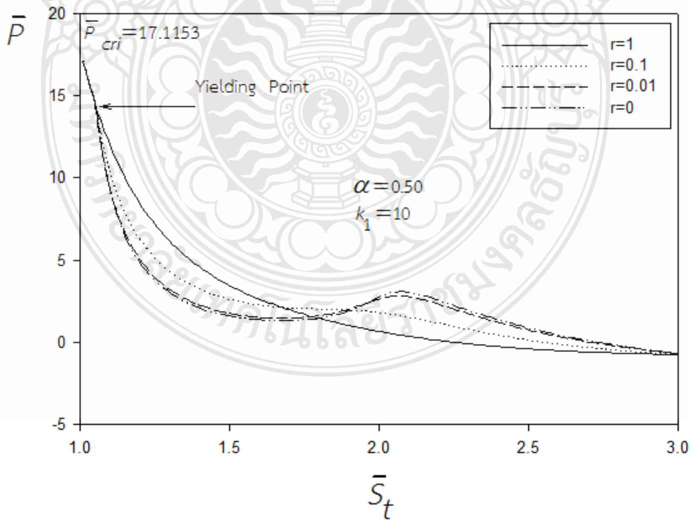
พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีสปริงต้านทานการหมุนภายในช่วงของอิลาสติกคาได้มีการศึกษาโดย Phungpaingam และ Chucheepsakul [1] ซึ่งในงานวิจัยดังกล่าวได้พิจารณาสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) โดยมีผลที่น่าสนใจหลายอย่างด้วยกันโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสติฟเนสของสปริงมีค่าเป็นศูนย์ อาทิเช่น การเกิดรูปร่างสมดุลได้หลายแบบ (Multiple Equilibrium Shapes) การเกิดการโก่งเดาะในลำดับที่สอง (Secondary Buckling) ซึ่งเป็นการโก่งเดาะครั้งที่สองที่เกิดขึ้นหลังจากการโก่งเดาะในครั้งแรก (Primary Buckling) ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนาแบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนในลักษณะที่เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก โดยศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาในสองกรณี ดังนี้ 1) พฤติกรรมเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากและมีการเปลี่ยนแปลงสติฟเนส เทียบกับกรณีที่ไม่เกิดการคราก 2) พฤติกรรมของอิลาสติกคาเมื่อสปริงเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกและเกิดการหมุนกลับด้าน ผลจากการคำนวณอาจแบ่งการพิจารณาเป็นสองกรณี ในกรณีแรกโดยแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุน $r = \overline{k_2} / \overline{k_1}$ ซึ่งได้ทำการแปรผันอัตราส่วน r เท่ากับ 1 , 0.1 , 0.01 และ 0 เมื่อ $\overline{k_1}$ = 10 และ $\overline{k_2}$ = 100 ตามลำดับที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนที่แตกต่างกันโดยแบ่งเป็น α = 0.25 , α = 0.50 และ α = 0.75 ในกรณีที่สองจะเกิดขึ้นเมื่ออิลาสติกคาเกิดการโก่งตัวมากซึ่งการโก่งตัวมากของอิลาสติกคาทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของมุมที่สปริงต้านทานการหมุนและเมื่อมุมเพิ่มมากขึ้นสปริงต้านทานการหมุนอาจมีการหมุนกลับได้

4.2 พฤติกรรมของอิลาสติกคาเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการคราก

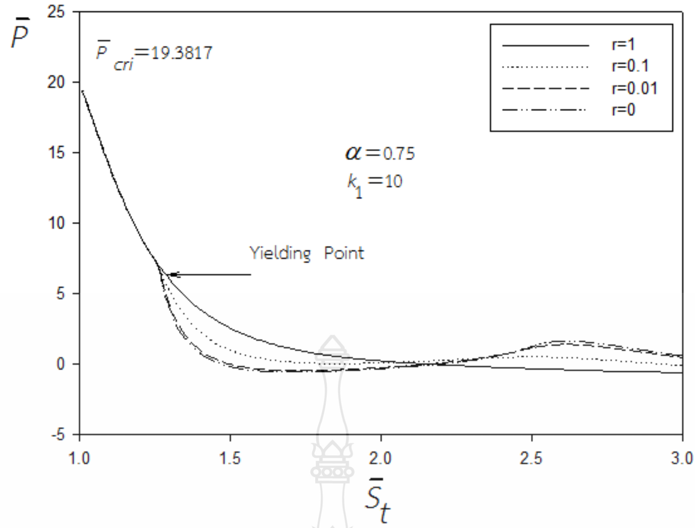
ในการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาในกรณีนี้ ได้แสดงเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ โดยมีการแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนสของจุดต้านทานการหมุนภายหลังและก่อนการคราก $r = \overline{k_2} / \overline{k_1}$ ในแต่ละตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α



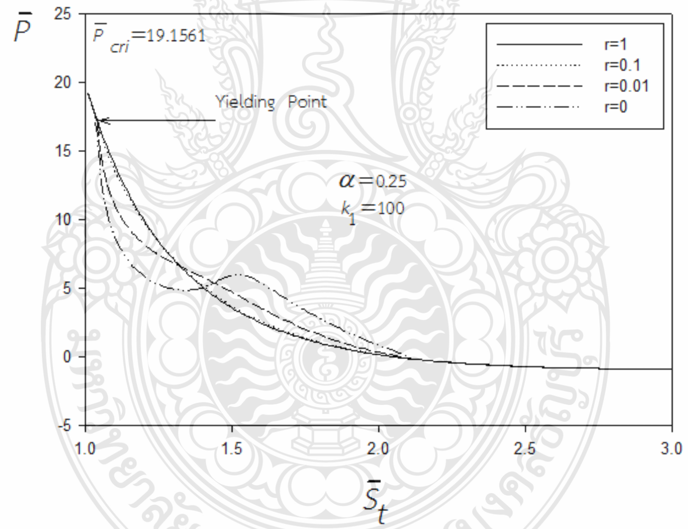
รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.25$ และ $k_1 = 10$



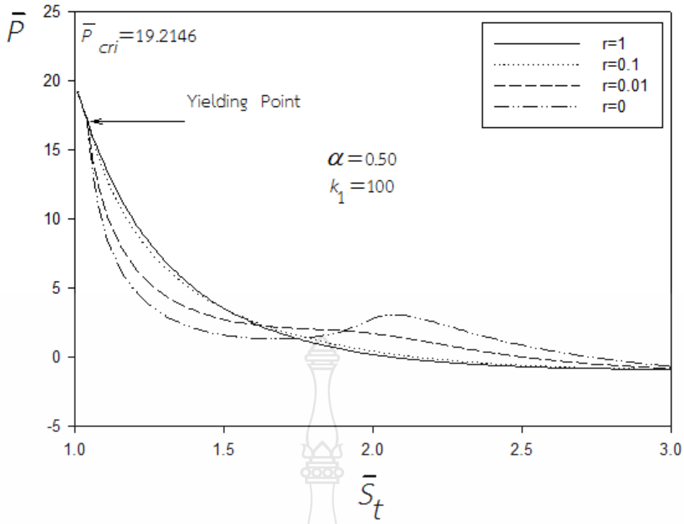
รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.50$ และ $k_1 = 10$



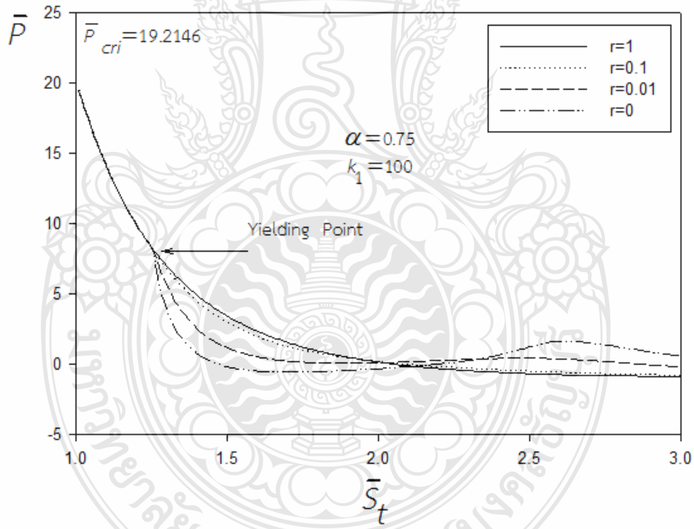
รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.75$ และ $k_1 = 10$



รูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.25$ และ $k_1 = 100$



รูปที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.50$ และ $k_1 = 100$



รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.75$ และ $k_1 = 100$

จากรูปที่ 4.1 ถึง 4.6 แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการรับน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของสติฟเนสของจุดต้านทานการหมุน r โดยได้ทำการแปรผันค่า r ที่ $r = 1$ $r = 0.1$, $r = 0.01$ และ $r = 0$ เมื่อ $r = 1$ หมายถึงพฤติกรรมของสปริงแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นซึ่งได้ทำการศึกษาไว้แล้วจากงานวิจัยของ Phungpaingam และ Chucheepsakul [1] ในงานวิจัยนี้ได้ใช้

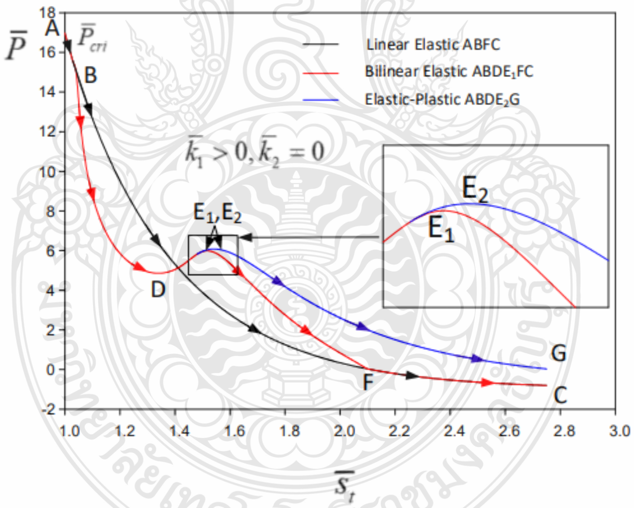
เป็นเส้นเปรียบเทียบกับกรณีที่เกิดการครากและเมื่อ $r = 0$ คือกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) ซึ่งสติฟเนสภายหลังการครากมีค่าเป็นศูนย์ ($\overline{k_2} = 0$) จากเส้นโค้งความสัมพันธ์จะเห็นได้ว่าเริ่มแรกอิลาสติกคาเกิดการโก่งเดาะเมื่อน้ำหนักบรรทุกมีค่าถึงจุดวิกฤต $\overline{P_{cri}}$ ซึ่ง Wang et al. [11] ได้นำเสนอสมการในการคำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\overline{P_{cri}}$ โดยแสดงในสมการที่ (4.1)

$$\overline{k_1}\left[\sqrt{\overline{P_{cri}}}-\tan\left(\sqrt{\overline{P_{cri}}}\,a\right)\right]+\left[\overline{P_{cri}}+\overline{k_1}+\sqrt{\overline{P_{cri}}}\left(\overline{k_1}-1\right)\tan\left(\sqrt{\overline{P_{cri}}}\,a\right)\right]\tan\left[\sqrt{\overline{P_{cri}}}\left(a-1\right)\right]=0 \quad (4.1)$$

เมื่อกำหนดค่าสติฟเนสของสปริงหมุน $\overline{k_1}$ และตำแหน่งของสปริงหมุน a= 1- α สามารถคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตได้โดยกระบวนการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson)

หลังจากการโก่งเดาะของอิลาสติกคาแล้วจะสังเกตเห็นว่าน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ลดลงเมื่อมีการโก่งตัวมากขึ้น (ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เพิ่มขึ้น) ลักษณะของความสัมพันธ์เช่นนี้บ่งบอกถึงความไร้เสถียรภาพ (Unstable) ของอิลาสติกคา น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ จะลดลงอย่างต่อเนื่องและเมื่อถึงจุดทีกำหนดให้สปริงต้านทานการหมุนเกิดการคราก ในที่นี้กำหนดให้สปริงเกิดการครากเมื่อผลต่างของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุนมีขนาดที่มากกว่าค่าที่กำหนดคือ $\left|\Delta\theta_p\right|$ ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 0.15 เมื่อค่าสติฟเนสก่อนการคราก $\overline{k_1}$ =10 และกำหนดให้เท่ากับ 0.015 หรือ 0.01 เมื่อ $\overline{k_1}$ =100 การกำหนดค่าที่ แตกต่างกันเช่นนี้ไม่ทำให้พฤติกรรมโดยรวมเปลี่ยนแปลงไป การกำหนดค่าที่แตกต่างกันเป็นผลมาจากเมื่อค่าสติฟเนส $\overline{k_1}$ =10 สปริงจะมีลักษณะแบบอ่อนความสามารถในการถ่ายโมเมนต์ดัดที่จุดสปริงต้านทานการหมุนไม่มีประสิทธิภาพทำให้เกิดผลต่างของมุมที่จุดดังกล่าวได้มากกว่าในกรณีที่ $\overline{k_1}$ =100 ดังนั้นเพื่อความเหมาะสมจึงได้กำหนดขนาดของมุมที่ทำให้เกิดการครากแตกต่างกัน เมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากจะเห็นได้ว่าน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ มีค่าที่ลดต่ำลงมากกว่าในกรณีที่ไม่เกิดการคราก การลดลงจะเกิดมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนสภายหลังและก่อนการคราก r โดยที่อัตราส่วน r เมื่อลดลงหมายถึงค่าสติฟเนสภายหลังการคราก $\overline{k_2}$ ลดลงตามไปด้วย ดังนั้นน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ จะมีค่าที่ลดลงมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของ r และภายหลังจากการลดลงของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ อาจเป็นการลดลงแบบต่อเนื่องหรืออาจเกิดการเพิ่มขึ้น ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ในช่วงสั้นๆอีกครั้ง ก็เป็นไปได้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนส r และตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุน α เช่นในกรณีที่ α =0.25 เมื่อค่าอัตราส่วน r ลดลงเป็น 0.10 จะสังเกตเห็นว่าหลังจากจุดคราก น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ยังคงลดลงอย่างต่อเนื่อง ในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ มีค่าเพิ่มขึ้นทั้งในกรณีที่ $\overline{k_1}$ =10 และ $\overline{k_1}$ =100 แสดงถึงสภาวะที่

ไร้เสถียรภาพ แต่เมื่อกำหนดให้อัตราส่วน r ลดลงเป็น 0.01 หรือ 0 จะสามารถสังเกตได้ว่าในบางกรณีมีช่วงที่น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ มีค่าที่เพิ่มขึ้นเมื่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ เพิ่มขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่ $r=0$ ซึ่งสปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมเป็นจุดหมุนพลาสติก โดยสามารถสังเกตเห็นพฤติกรรมการเพิ่ม ขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ได้อย่างชัดเจนในทุกกรณีของค่าสติฟเนส $\overline{k_1}$ และทุกตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α อันเป็นสภาวะของอิลาสติกคาที่มีเสถียรภาพ ซึ่งโดยปกติเป็นที่ทราบกันดีว่าอิลาสติกคาที่มีความยาวโค้งแปรเปลี่ยนได้ (VAL Elastica) ภายใต้แรงอัดจะเกิดสภาวะที่ไร้เสถียรภาพหลังจากการโก่งเดาะตลอดช่วงความยาว $\overline{s_t}$ แต่ในกรณีนี้เมื่อเกิดจุดหมุนภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคาหากเป็นจุดหมุนโดยทั่วไป (Hinged Joint) จะเกิดการโก่งเดาะลำดับที่สอง (Secondary Buckling) และถ้าหากเป็นจุดหมุนแบบพลาสติก จะเกิดสภาวะที่มีเสถียรภาพขึ้นมาอีกครั้งหนึ่ง การลดลงและเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ เมื่ออิลาสติกคามีจุดหมุนแบบพลาสติกคล้ายกับพฤติกรรมของอิลาสติกคาซึ่งสติฟเนสโดยรวมของอิลาสติกคาที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของอิลาสติกคานั้นเอง เมื่อน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ เพิ่มขึ้นจนกระทั่งถึงจุดสูงสุดหลังจากนั้นน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ จะลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวสามารถแสดงได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 4.7

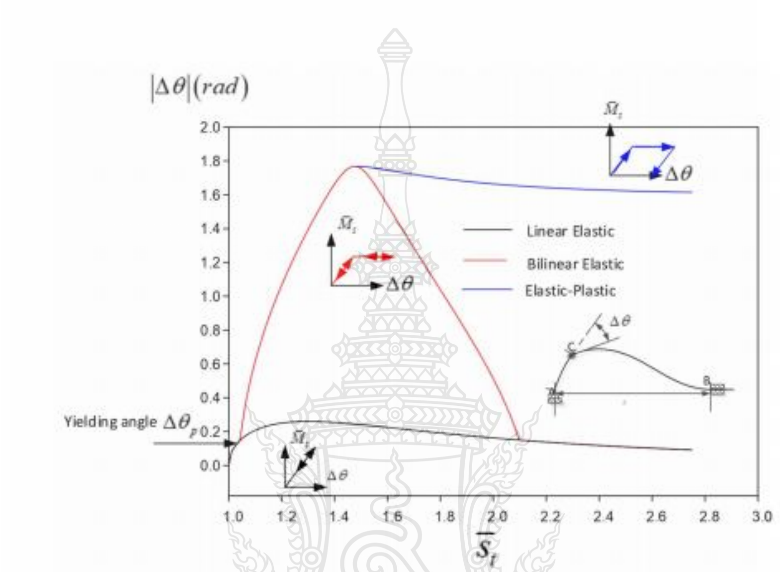


รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$

โดยที่เส้น ABFC คือกรณีที่ไม่เกิดการครากของสปริงต้านทานการหมุน เส้น $ABCDE_1FC$ เป็นกรณีที่เกิดการครากและจุดหมุนเป็นแบบจุดหมุนพลาสติกซึ่งสามารถสังเกตพฤติกรรมได้อย่างชัดเจน ในขณะที่เส้น $ABDE_2G$ สำหรับกรณีที่จุดต้านทานการหมุนเกิดการครากและภายหลังการครากเมื่อสปริงต้านทานการหมุนมีการหมุนกลับด้านโดยที่สติฟเนสในขณะหมุนกลับด้านมีค่าเท่ากับช่วง

เริ่มแรกคือ $\overline{k_1}$ จะทำให้น้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้น (เส้นสีน้ำเงิน) เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนหมุนกลับด้านบนเส้นทางเดิม (เส้นสีแดง) อันเนื่องจากสติฟเนสที่เพิ่มขึ้นเป็น $\overline{k_1}\left(\overline{k_1} > \overline{k_2}\right)$

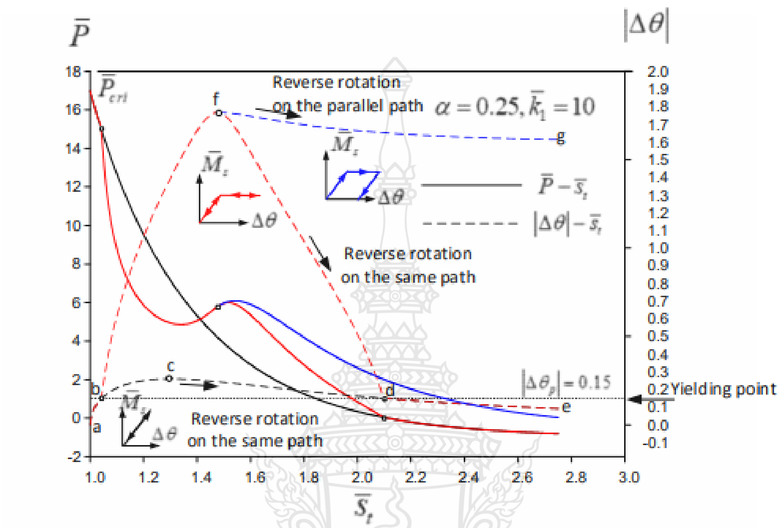
4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่สปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta|$ และความยาวส่วนโค้งทั้ง $\overline{s_t}$



รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างมุม $|\Delta\theta|$ กับ ความยาวส่วนโค้ง $\overline{s_t}$ ที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบ 1.ยืดหยุ่นเชิงเส้น 2.ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ 3.อิลาสติก –พลาสติก

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta| = |\theta_c^+ - \theta_c^-|$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ ในรูปที่ 4.8 จะเห็นได้ว่าของมุม $|\Delta\theta|$ สามารถเพิ่มขึ้นและลดลง (หมุนกลับด้าน) โดยเส้นสีดำแสดงการเพิ่มขึ้น และลดลงของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อสปริงไม่เกิดการคราก (สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น) ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{M_s}$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 ในขณะที่เส้นสีแดงแสดงถึงสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic) เมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่ามากกว่า $|\Delta\theta_p|$ จะเกิดการครากและสติฟเนสของสปริงเปลี่ยนเป็น $\overline{k_2}$ ซึ่งสามารถสังเกตถึงการเพิ่มขึ้นและลดลงของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ได้อย่างชัดเจน เนื่องจากค่าสติฟเนสภายหลังการครากในกรณีนี้ กำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อสติฟเนสภายหลังการครากเป็นศูนย์ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ จึงสามารถเปลี่ยนแปลงได้อยากมากทั้งการเพิ่มขึ้นและลดลง (หมุนกลับด้าน) ซึ่งขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ลดลงบนเส้นทางเดียวกันกับการเพิ่มขึ้นของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ และสอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{M_s}$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 (สปริงต้านทานการหมุนแบบ-

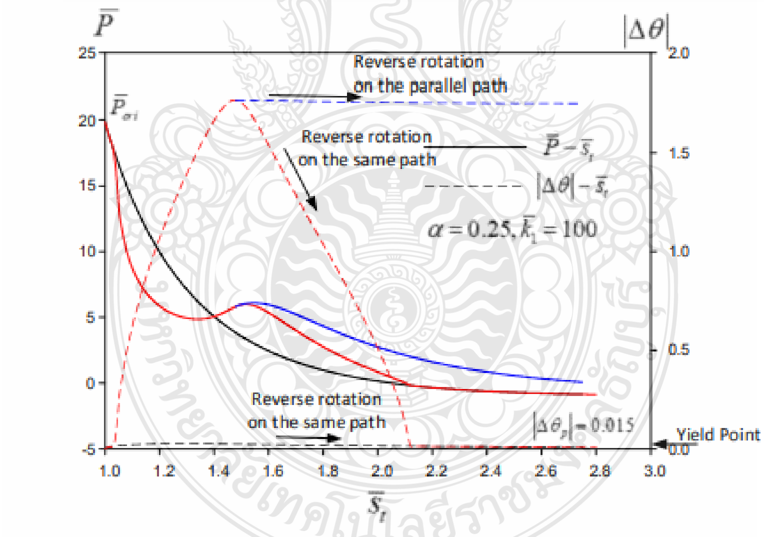
ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่) เส้นสีน้ำเงินแสดงให้เห็นถึงการลดลงของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{M_s}$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 (สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก) ซึ่งเมื่อเกิดการหมุนกลับด้านสติฟเนสของสปริงจะมีค่าเท่ากับค่าสติฟเนสเริ่มแรกคือ $\overline{k_1}$ อีกครั้ง (เส้นตรงคู่ขนาน สีน้ำเงินของกราฟความสัมพันธ์ $\overline{M_s} - \Delta\theta$)



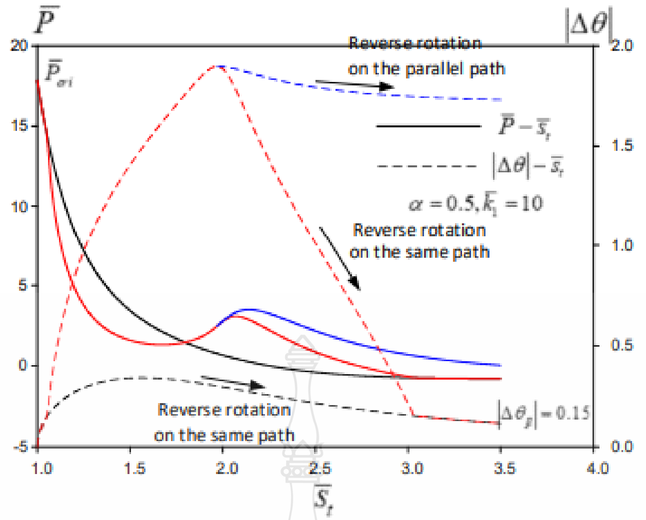
รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่างมุม $|\Delta\theta|$ กับ น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ที่ความยาวส่วนโค้ง $\bar{s}_t$ ที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบ 1.ยืดหยุ่นเชิงเส้น 2.ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ 3.อิลาสติก –พลาสติก

จากรูปที่ 4.9 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ กับน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ซึ่งแสดงถึงจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่สำคัญเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (เส้น abcde) กล่าวคือในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ ที่จุดครากเมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta| > |\Delta\theta_p|$ ค่าสติฟเนสของสปริงลดลง (ในที่นี้ลดลงจนเป็นศูนย์) ขนาดของมุมของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างมากภายหลังการคราก (เส้น bf) ในขณะที่น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ลดลงอย่างมากเช่นกัน แสดงให้เห็นว่าจุดหมุนไม่สามารถถ่ายโมเมนต์ดัดที่เกิดเพิ่มขึ้นได้อีกต่อไป ในระหว่างเกิดการโก่งตัวมากภายใต้สปริงต้านทานการหมุนที่เป็นจุดหมุนแบบพลาสติก (Plastic Hinge) ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างมากทั้งในส่วนของมุมที่เพิ่มขึ้น(เส้น bf) และลดลง (เส้น fde) ซึ่งเป็นการหมุนกลับด้านนั้นเองโดยในระหว่างนั้นอาจมีการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ในช่วงระยะเวลาสั้นๆอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของอิลาสติกคา และภายหลังจากนั้นน้ำหนักบรรทุกจะมีค่าที่ลดลงอย่างต่อเนื่องและขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ลดลงเช่นกัน เมื่อขนาดของมุมของสปริงต้านทานการหมุนลดลงจนน้อยกว่าขนาดของมุมที่ทำให้เกิดการคราก

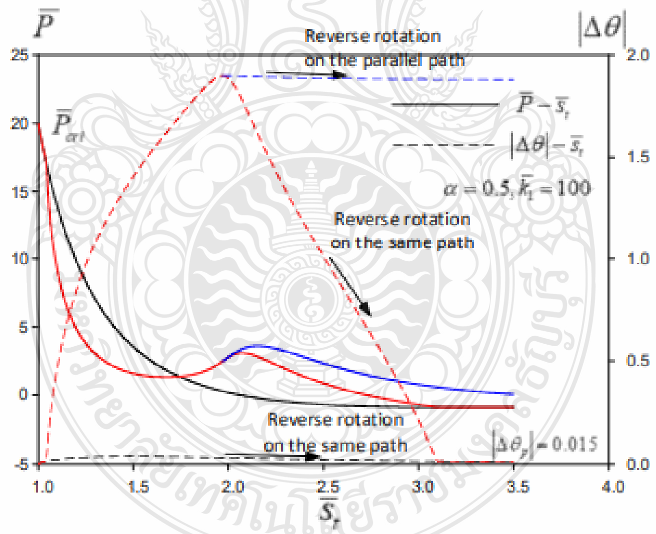
$|\Delta\theta_p|$ (เส้น de) จะเห็นได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 4.9 ว่าน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบเชิงเส้นคู่ ซ้อนทับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta| \le |\Delta\theta_p|$ พฤติกรรมของสปริงต้านทานการหมุนของทั้งสองกรณีเป็นแบบเดียวกัน ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีลักษณะเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic) ในช่วงที่ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่เพิ่มขึ้น (เส้น abf) มีพฤติกรรมที่เหมือนกับกรณีของสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบเชิงเส้นคู่ แต่เมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เริ่มลดลงสังเกตเส้น fg (หมุนกลับด้าน) จะมีพฤติกรรมที่แตกต่างออกไปกล่าวคือสปริงจะกลับมามีสติฟเนสเท่ากับ $\overline{k_1}\left(\overline{k_1} > \overline{k_2}\right)$ ทำให้ต้องการน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ที่มากกว่าสปริงต้านทานการหมุนในสองแบบแรก (แบบยืดหยุ่นเชิงเส้น และแบบเชิงเส้นคู่) และขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ จะมีการลดลงที่น้อยกว่าเมื่อเทียบกับสปริงต้านทานการหมุนในสองแบบแรกเนื่องจากสปริงมีค่าสติฟเนสที่เพิ่มมากขึ้นนั่นเองในกรณีที่ $\overline{k_1}$ หรือ α เปลี่ยนแปลงไปพฤติกรรมโดยรวมยังคงเป็นไปในลักษณะเช่นเดิมซึ่งแสดงในรูปที่ 4.10 (เมื่อทำการแปรผันค่า $\overline{k_1}$ =10 และ 100 โดยแปรผันค่า α =0.25 0.50 และ 0.75) และเมื่อค่า $\overline{k_1}$ = 100 ซึ่งสปริงต้านทานการหมุนมีค่าสติฟเนสที่ค่อนข้างสูงทำให้มุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่น้อยมากในรูปที่ 4.10 (เส้นประสีดำในกรณีที่ $\overline{k_1}$ =100)



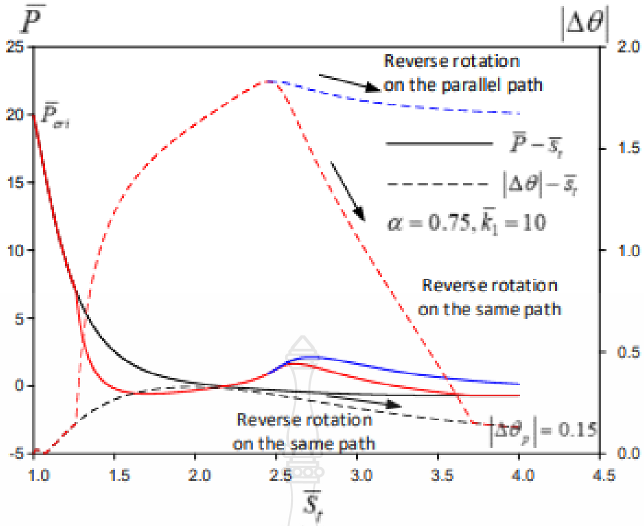
รูปที่ 4.10a เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของ $k_1 = 100$ และ ระยะห่างของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.25$



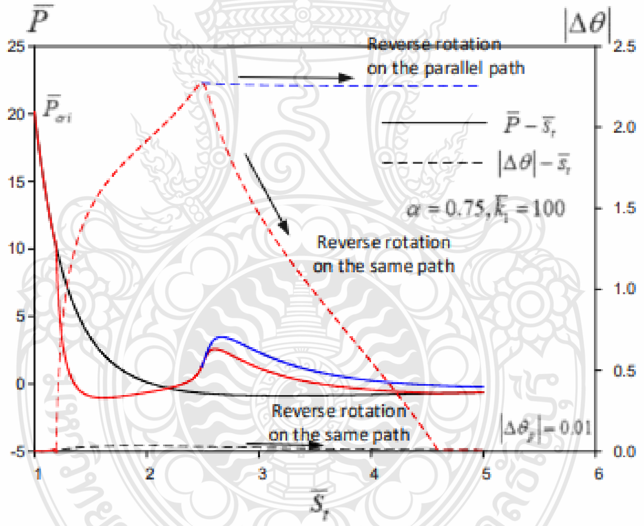
รูปที่ 4.10b เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของ $k_1=10$ และ ระยะห่างของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha=0.50$



รูปที่ 4.10c เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของ $k_1=100$ และ ระยะห่างของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha=0.50$



รูปที่ 4.10d เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของ $k_1 = 10$ และ ระยะห่างของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.75$



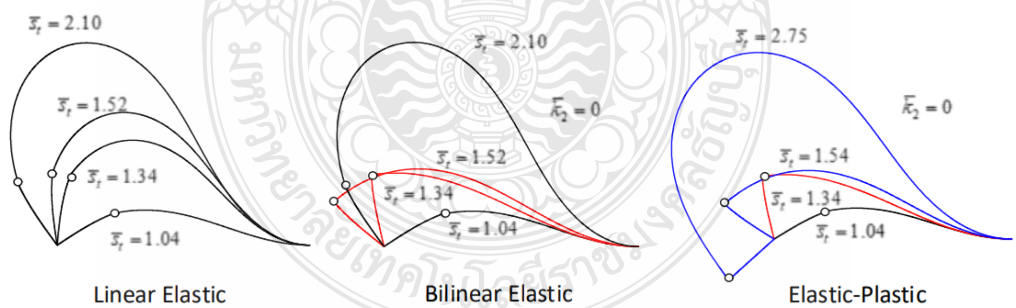
รูปที่ 4.10e เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าสติฟเนสของ $k_1 = 100$ และ ระยะห่างของสปริงต้านทานการหมุน $\alpha = 0.75$

4.4 รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคา

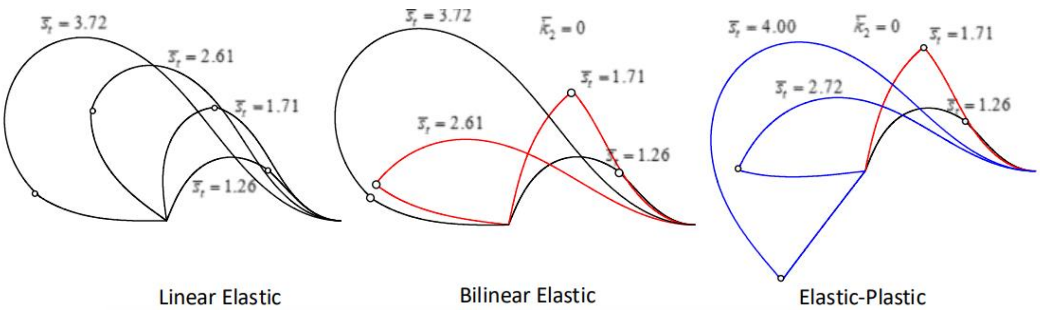
รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่สอดคล้องกับตำแหน่งต่างๆบนเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ (ในรูปที่ 4.7) โดยเปรียบเทียบรูปร่างสมดุลของ

อิลาสติกคาในสามกรณีเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบ 1) ยืดหยุ่นเชิงเส้น 2) ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และ 3) อิลาสติก-พลาสติก ในที่นี้ได้นำเสนอรูปร่างสมดุลที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนสองตำแหน่งได้แก่ α = 0.25 และ 0.75 รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาแสดงดังรูปที่ 4.11 โดยเส้นสีดำแสดงถึงรูปร่างของอิลาสติกคาที่มุม $|\Delta\theta| \le |\Delta\theta_p|$ ซึ่งจะมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น เส้นสีแดงหมายถึงรูปร่างของอิลาสติกคาที่มุม $|\Delta\theta| > |\Delta\theta_p|$ และสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ เส้นสีน้ำเงินแสดงถึงการหมุนกลับด้านของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อสปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก เมื่อได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่เกิดการคราก และสติฟเนส $\overline{k_2}$ = 0 จะเห็นได้ว่ามุมของสปริงหมุนเกิดการหักงออย่างชัดเจนอันเนื่องมาจากจุดหมุนได้กลายสภาพเป็นจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) และเมื่อทำการเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปจะพบว่ามุม $|\Delta\theta|$ เพิ่มขึ้นจนถึงจุดสูงสุดและลดลง จนกระทั่งมุม $|\Delta\theta| \le |\Delta\theta_p|$ ซึ่งหลังจากจุดนี้พฤติกรรมของอิลาสติกคาจะเหมือนกับกรณีที่สปริงหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก ซึ่งมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นในช่วงแรก แบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ในช่วงที่สอง และในช่วงที่สามเมื่อมุม $|\Delta\theta|$ หมุนกลับด้านจะหมุนกลับด้วยสติฟเนสของสปริงที่เท่ากับสติฟเนสในช่วงแรกคือ $\overline{k_1}$ ซึ่งเห็นได้ว่ามีพฤติกรรมที่แตกต่างจากกรณีของสปริงเชิงเส้นคู่คือในการหมุนกลับด้านของสปริงพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงของมุมค่อนข้างน้อยเนื่องจาก สปริงมีค่าสติฟเนสที่สูงขึ้น และด้วยเหตุผลนี้ทำให้น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ เพิ่มขึ้นเช่นกัน



รูปที่ 4.11a รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่สอดคล้องกับตำแหน่งต่างๆบนเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ ที่ $\alpha = 0.25$ $k_1 = 10$



รูปที่ 4.11b รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคาที่สอดคล้องกับตำแหน่งต่างๆบนเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s_t}$ ที่ $\alpha = 0.75$ $k_1 = 10$

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลของการทำวิจัย

การศึกษางานวิจัยนี้ ศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีสปริงต้านทานการหมุนอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติกคาในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธียิงเป้า โดยการอินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหา ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดขึ้น โดยมีการแปรผันตัวแปรที่สำคัญคือ ค่าสติฟเนส และตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน โดยที่ค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนได้ถูกจำลองให้สอดคล้องกับพฤติกรรมการหมุนของสปริงในสามรูปแบบคือ 1) แบบยืดหยุ่นเชิงเส้น 2) แบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และ 3) แบบอิลาสติก-พลาสติก ซึ่งสามารถสรุปผลได้ดังนี้

1. ในช่วงแรกหลังการโก่งเดาะอิลาสติกคามีสมดุลที่ไร้เสถียรภาพในทุกกรณี

2. ภายหลังเกิดการครากของสปริงต้านทานการหมุนน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ มีค่าที่ลดลง และมุม $\Delta\theta$ มีขนาดที่เพิ่มมากขึ้นเนื่องจากค่าสติฟเนสที่ลด

3. จากการแปรผันค่าของอัตราส่วน r จาก 1 ถึง 0 พบว่าในทุกตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α มีพฤติกรรมที่คล้ายคลึงกัน แต่เมื่อ r = 0 ($\overline{k_2}$ = 0)

4. สติฟเนสในช่วงเริ่มต้น $\overline{k_1}$ มีผลต่อค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\overline{P}_{cri}$ และภายหลังการโก่งเดาะค่าสติฟเนส $\overline{k_1}$ ที่มากกว่าเช่น $\overline{k_1}$ =100 จะมีน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ที่สูงกว่ากรณีที่ $\overline{k_1}$ มีค่าน้อย และเนื่องจากค่าสติฟเนสที่สูงจะทำให้ค่าของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่ต่ำลง

5. หลังการครากเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ หรือแบบอิลาสติก-พลาสติก อาจพบลักษณะสมดุลที่มีเสถียรภาพได้ในช่วงสั้นๆ ซึ่งสามารถสังเกตได้ชัดเจนเมื่อ r = 0

6. การหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนในกรณีของสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติก จะทำให้น้ำหนักบรรทุกมีค่าที่มากกว่ากรณีของสปริงต้านทานการหมุนแบบเชิงเส้นคู่อันเนื่องจากค่าสติฟเนสที่กลับมาเท่ากับค่าสติฟเนสในช่วงเริ่มต้น

5.2 ข้อเสนอแนะของการทำวิจัยต่อไปในอนาคต

5.2.1 งานวิจัยนี้นำเสนอการศึกษาผลผลกระทบของจุดต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นพลาสติกต่อพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีจุดต้านทานการหมุนแบบสปริงวางห่างจากจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระตามระยะที่กำหนด อยู่ภายในช่วงของอิลาสติกคา อาจเปลี่ยนจุดรองรับเป็นแบบอื่นเพื่อนำผลมาเปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้

5.2.2 การศึกษาต่อจากงานวิจัยนี้ อาจพิจารณาคุณลักษณะที่เกิดจากการยืดหดตามแนวแกนของอิลาสติกคาและวิเคราะห์ปัญหาการหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนได้ให้สอดคล้องกับความเป็นจริงมากขึ้น

บรรณานุกรม

[1] Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2018, “Postbuckling Behavior of Variable-Arc- Length Elastica Connected with Rotational Spring Joint Including the Effect of Configurational Force,” Meccanica, 53, pp. 2619-2636.

[2] ณัฐฐ์ พิชัยยุทธ์ “พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติคคา”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี,พ.ศ.2558.

[3] ศรัณย์ ชุ่มกลัด “ผลกระทบของปลายยื่นอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี, พ.ศ.2560.

[4] ธานินทร์ สุดสงวน. “อีลาสติคคาของคานโค้งแบบวงกลมที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดแบบติดตามการเสียรูปกระทำทีdปลาย”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี,พ.ศ.2553.

[5] สุนทร เกียรติคงศักดิ์“พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของคานภายใต้สภาพปลายยึดรั้งที่แปรเปลี่ยน” วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, พ.ศ.2548.

[6] บุญชัย ผึงไผ่งาม. “การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงทีเปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, พ.ศ.2544, หน้า1-75.

[7] วิชิต กลับใจได้. “อิลาสติคคาของโครงสร้างแบบวงกลมภายใต้แรงกระทำที่ปลาย”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, พ.ศ.2550, หน้า 7-9.

[8] สุนทร เกียรติคงศักดิ์ และสมชาย ชูชีพสกุล, พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติกคาอย่างง่ายใต้สภาพการยึดรั้งที่ปลาย, วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต,มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, พ.ศ.2548.

[9] Dado, M., Al-Sadder, S. and Abuzeid, O., 2004, “Post-Buckling Behavior of Two Elastica Columns Linked with a Rotational Spring,” International Journal of Non-Linear Mechanics, 39, pp.1579-1587.

[10] N. Kounadis and G. Mallis. “Elastica Type Buckling Analysis of Bar from Nonlinearly Elastic Material”. International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 22, pp. 99-107, 1987.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[11] Wang, C.Y., Wang, C.M. and Aung, T.M., 2004, “Buckling of a Weakened Column,” Journal of Engineering Mechanics, 130, pp. 1373-1376.

[12] สหรัถ โพธิ์นอก “การโก่งตัวมากของเสาปลายยื่นที่ทำจากแบบจำลองวัสดุแบบลุดวิกภายใต้แรงยึดรั้งที่เคเบิล”. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี, พ.ศ.2555.

[13] C. Athisakul and S. Chuchepsakul, “Effect of inclination on bending of Spatial Variable-Arc-Length beam subjected to uniform self – weight”, Engineering Structures, Vol. 30, No 4, pp.902-908,2008

[14] Monasa, F.E., 1974, “Deflections and Stability Behavior of Elasto-Plastic Flexible Bars,”Journal of Applied Mechanics, 41, pp. 537-538.

[15] Pandit, D. and Srinivasan, S.M., 2016, “Numerical Analysis of Large Elasto-Plastic Deflection of Constant Curvature Beam under Follower Load,” International Journal of Non-Linear Mechanics, 84, pp. 46-55.

[16] ปราโมทย์ เดชะอำไพ และนิพนธ์ วรรณโสภาคย์. (2557). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[17] ธนาวุฒิ ประกอบผล. (2555). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ท๊อป จำกัด.

[18] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. (2557). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[19] อำพล ธรรมเจริญ. (2551). วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method)

ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method)

ระเบียบวิธีรุงเง - คุตตา (Runge - Kutta method) จัดได้ว่าเป็นระเบียบที่ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง รวมถึงในการคำนวณหาผลลัพธ์ในงานวิจัยนี้ด้วย โดยแนวความคิดที่ใช้ในระเบียบวิธีรุงเง - คุตตานี้คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ในระเบียบวิธีรุงเง - คุตตานั้น อยู่ในรูปแบบตามสมการ ข.1

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{ข.1}$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชั่นส่วนเพิ่ม (Increment Function) ซึ่งมีความหมายถึงความชันเฉลี่ยตลอดขนาดช่องกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาส่วนที่เพิ่มจากผลลัพธ์เดิม ฟังก์ชั่นส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \dots\dots\dots + a_nk_n \tag{ข.2}$$

โดย $a_i, i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots, n$ เป็นค่าคงที่ และ

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{ข.3ก}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \tag{ข.3ข}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \tag{ข.3ค}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots\dots\dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \tag{ข.3 n}$$

โดยตัวห้อย n บ่งบอกถึงอันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาที่เลือกใช้ เช่น เมื่อ $n = 1$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาอันดับที่หนึ่ง ในทำนองเดียวกันเมื่อเลือกใช้ $n = 2$ จะเรียกว่าเป็นระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาอันดับที่สอง เป็นต้น ค่าของ $k_i, i = 1, 2, 3, \dots\dots\dots, n$ ในสมการ (ข.3) ขึ้นอยู่กับฟังก์ชั่นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่กำหนดมาให้ ในส่วนของค่า p และ q ต่างๆนั้นเป็นค่าคงที่และหากพิจารณาสมการ (ข.3) พบว่าจำเป็นต้องรู้ค่า k_1 ก่อนทำการคำนวณค่า k_2 และต้องรู้ค่า k_2 ก่อนทำการคำนวณค่า k_3 เช่นนี้เรื่อยไป สำหรับรายละเอียดของระเบียบวิธีรุงเง - คุตตาสามารถศึกษาได้จาก [21]

ภาคผนวก ข

ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน

ระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสัน

ระบบสมการแบบไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ และ n ตัวแปร คือ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ มีรูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &F_n(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{ค.1}$$

โดยการใช้ทฤษฎีการกระจายอนุกรมของเทเลอร์ (Taylor Series) กับฟังก์ชันไร้เชิงเส้นจำนวน n สมการ สามารถจัดรูปได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{ค.2}$$

จากสมการ (ค.2) สามารถจัดรูปแบบสมการได้อีกแบบหนึ่ง คือ

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Delta x_j = -F_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \tag{ค.3}$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$[J][\Delta x] = -[F] \tag{ค.4}$$

โดยที่เมตริกซ์ J คือ จาโคเบียนเมติกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าตามสมการต่อไปนี้

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \qquad \text{เมื่อ } i \text{ และ } j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \tag{ค.5}$$

จากสมการที่ (ค.2) ถึง (ค.4) เป็นสมการที่มีเป้าหมายในการหาค่าของ Δx_j เพื่อเป็นค่าปรับแก้ของค่าเดิม x_{old} โดยมีขั้นตอนในการหาค่าปรับแก้ Δx_j ดังต่อไปนี้

1. สมมติค่าเริ่มต้นของตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$
2. ทำการหาค่าของ $F_1, F_2, ..., F_n$ และค่าของ J_{ij} จากสมการ (ค.5)
3. ทำการหาค่า $[\Delta x]$ โดยใช้กระบวนการกำจัดแบบเกาส์ จากสมการที่ (ค.4)
4. จากขั้นตอนที่ 3 จะได้ค่าปรับแก้ $[\Delta x]$ ซึ่งเมื่อนำไปรวมกับค่าเดิมจะได้ค่าใหม่ ดังสมการต่อไปนี้

$$[x_{new}]^{K+1} = [x_{old}]^{K} + [\Delta x]^{k} \qquad (ค.6)$$

โดยที่ค่า K คือ ค่าที่บ่งบอกถึงจำนวนของการกระทำซ้ำ

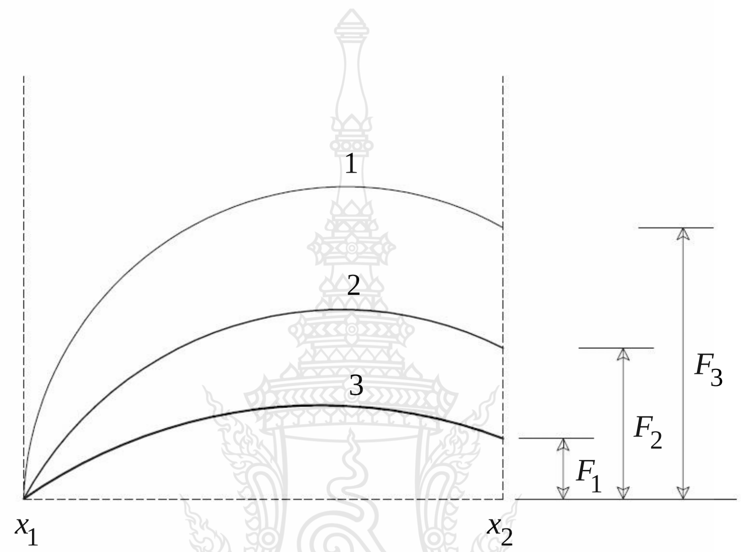
5. จากนั้นให้ทำการตรวจสอบค่าของ $[F]$ ว่ามีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์หรือไม่ ถ้ายังไม่เข้าใกล้ศูนย์ให้หาค่าปรับแก้ใหม่โดยอาศัยสมการ (ค.4) เช่นเดิม ทำเช่นนี้จนกว่าค่า $[F]$ จะมีค่าที่เข้าใกล้ศูนย์จึงจะหยุดกระบวนการได้ รายละเอียดของระเบียบวิธีนิวตัน - ราฟสันสามารถศึกษาได้จาก [18]

ภาคผนวก ค

ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

วิธีการนี้ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขวิธีการหนึ่งซึ่งสามารถจัดการกับปัญหาของระบบสมการอนุพันธ์ที่ขึ้นกับตัวแปร 1 ตัว โดยมีเงื่อนไขแบบ 2 จุด (จุดเริ่มต้น x_1 และจุดปลาย x_2) ได้เป็นอย่างดี โดยมีหลักการคือ พยายามปรับแก้ค่าที่ทำการประมาณจนกระทั่งค่าเหล่านั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุด ตามรูปที่ ง.1 โดยที่วิธีการปรับแก้ที่ใช้คือ วิธีการนิวตัน - ราฟสัน



รูปที่ ง.1 วิธีการยิงเป้า

กระบวนการในการแก้ไขปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้ามีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ที่จุดเริ่มต้น x_1 นี้จะมีค่าเริ่มต้นอยู่ N ค่า โดยค่าแต่ละค่าเหล่านี้จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ x_1 อยู่ n_1 ค่า ดังนั้นจะเหลือค่าของพารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องอาศัยการประมาณค่าอยู่ $n_1 = N - n_1$ ค่า ซึ่งจะเรียกพารามิเตอร์เหล่านี้ว่า เวกเตอร์ V มีขนาดเท่ากับ $n_1 x_1$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$y_i(x_1) = y_i(x_1, V_1, ..., V_{n_2}) \qquad i = 1, ..., N \tag{ง.1}$$

2. อินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์จากจุด x_1 ไปจนถึงจุด x_2 โดยที่ ณ ตำแหน่ง x_2 นี้ให้ทำการหาค่าความแตกต่างของค่าที่อินทิเกรตได้กับเงื่อนไขขอบเขตที่ x_2 ซึ่งเรียกค่านี้ว่าเวกเตอร์ของค่าที่แตกต่าง (Discrepancy vector F) ซึ่งเวกเตอร์นี้มีขนาดเท่ากับ $n_2 x_1$ เช่นเดียวกับเวกเตอร์ V

3. ใช้กระบวนการของวิธีการนิวตัน - ราฟสัน เพื่อหาค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้เวกเตอร์ F มีค่าเป็นศูนย์ โดยมีขั้นตอนการปรับแก้ดังนี้

$$V_{new} = V_{old} + \delta V \tag{ง.2}$$

$$J\delta V = -F \tag{ง.3}$$

โดยที่ J คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ (Jacobian Matrix) มีค่าเท่ากับ

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \tag{ง.4}$$

โดยค่าของเวกเตอร์ V ที่ทำให้ค่าเวกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ คือ ค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 จุดนั่นเอง โดยที่รายละเอียดสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [21]

ภาคผนวก ง

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณ

1. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB กรณี LOADING

```
function dydx=goveqs1_valplastic1(x,y)
global P M0
dydx=zeros(3,1);
% statics
dydx(1)=-(P+(M0^2)/2)*y(3)+M0*y(2);                    %ceta
dydx(2)=cos(y(1));                       % x
dydx(3)=sin(y(1));                      % y
end

function dydx=goveqs2_valplastic1(x,y)
global P M0 xs ys dtheta beta1 beta2 theta1 theta2 chk2 Mi chk1
dydx=zeros(3,1);
dthetai=dtheta-theta1;
dtheta0=dtheta;
thetaf=theta2;
My=theta1*tan(beta1);
Mf=My+(thetaf-theta1)*tan(beta2);
thetap=thetaf-Mf/(tan(beta1));
if (chk2) % chk2 for checking the plastic range
   if(not(chk1))
      %Mj=(dtheta-thetap)*tan(beta1);  % for different unloading path
      Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);         % for elastic loading & unloading
   else
      Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);
   end                                                    % yield
else
      Mj=(tan(beta1))*dtheta0;                                % not yield
end
dydx(1)=Mj+(P+(M0^2)/2)*(ys-y(3))+M0*(y(2)-xs);          % ceta
```

```
dydx(2)=cos(y(1));                              % x
dydx(3)=sin(y(1));                              % y
end

function r=score_valplastic1(v)
global st alpha beta1 beta2 pl xs ys P M0 dtheta theta1 theta2 chk2 chk1 Mi
%loading
r=zeros(4,1);
P=v(1); M0=v(2); cetaa=v(3); dtheta=v(4);
dthetai=dtheta-theta1;
dtheta0=dtheta;
thetaf=theta2;
My=theta1*tan(beta1);
Mf=My+(thetaf-theta1)*tan(beta2);
thetap=thetaf-Mf/(tan(beta1));
odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs1_valplastic1',[0 alpha],[cetaa 0 0],odeoptions);
lastrow1=size(y1,1);
xs=y1(lastrow1,2); ys=y1(lastrow1,3); ceta1=y1(lastrow1,1);
ceta2=ceta1+dtheta;
[x2 y2]=ode45('goveqs2_valplastic1',[alpha st],[ceta2 xs ys],odeoptions);
lastrow2=size(y2,1);
xp=y2(lastrow2,2); yp=y2(lastrow2,3); cetap=y2(lastrow2,1);
if (pl==1)
   figure(1)
   hold on;
   title ('Equilibrium shape');
   plot(y1(:,2),y1(:,3));
   plot(y2(:,2),y2(:,3));
   axis on;
```

```
    axis equal;
    grid on;
end
if (chk2)
    %Mj=beta1*theta1;
    if(not(chk1))
        %Mj=(dtheta-thetap)*tan(beta1); %for different unloading path
        Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);       % for elastic loading & unloading
    else
        Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);
    end
else
        Mj=(tan(beta1))*dtheta0;
end
r(1)=y2(lastrow2,2)-1;
r(2)=y2(lastrow2,3);
r(3)=y2(lastrow2,1);
r(4)=-(P+(M0^2)/2)*ys+M0*xs-Mj;
end

function valelastica_plastic1
% cantilever beam with follower self-weight
% including configurational force M^2/2EI
clear
global st pl alpha beta1 beta2 theta1 theta2 chk2 chk1 Mi
format long
alpha=input('position of spring joint (alpha) ');
%beta1=input('constant of spring joint #1 ');
%beta2=input('constant of the spring joint #2 ');
theta1=input('Yield point (angle)= ');
```

```
theta2=input('final point (angle)= ');
%beta2=beta1*theta1/theta2;
% static parameters
st=input('total arc-length ');
v(1)=input('end load (P) ');
v(2)=input('end moment (M0) ');
v(3)=input('ceta A (cetaa) ');
v(4)=input('difference in angle at spring joint (dtheta) ');
% end of input static parameters
beta1=atan(10); beta2=atan(0);
pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');
P=v(1);
Mo=v(2);
cetaa=v(3);
dtheta=v(4);
Mi=theta1*tan(beta1);
lim=input('limitation= ');
inc=input('increment= ');
%Assume loading
 chk1=true;
%Assume unloading
 %chk1=false;
%Assume in elastic range
if (abs(dtheta)>abs(theta1))
    chk2=true; % plastic range
else
    chk2=false; % elastic range
end
fid=fopen('output1.txt','wt');
fprintf(fid,'output of cantilever follower self-weight elastica\n');
```

```
fprintf(fid,'st          P            Mo              cetaa           dtheta\n');
i=0;
dv=0.0001;
m=1;
%while (st>lim)
while (st<lim)
   v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
   options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
   [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
   test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
   i=i+1;
   v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
   v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
   [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
end
if (abs(dtheta)<abs(v(4)))  % chk1 is applied to check loading or unloading path of the
spring joint
   chk1=true;   % loading
   dtheta=v(4);
else
   chk1=false;  % unloading
   dtheta=v(4);
end
if (abs(v(4))>abs(theta1))    %chk2 is to check the region of stiffness
   chk2=true;          % Yielding
   if (m)
      v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];

options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
```

```
        [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
        test=max(abs(fval));
        while (test>1.0e-7&&i<25)
         i=i+1;
        v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
        v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
        [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
        end
    end
    m=0;
else
    chk2=false;          % elastic
    if (not(m))
        v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
        options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-
15);
        [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
        test=max(abs(fval));
        while (test>1.0e-7&&i<25)
         i=i+1;
        v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
        v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
        [v fval]=fsolve('score_valplastic1',v0,options)
        end
    end
    m=1;
end
%if (not(chk1))
% unloading case (UL)
%   v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
```

```
%  options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
%   [v fval]=fsolve('score_valplastic2',v0,options)
%   test=max(abs(fval));
% end
%if (test<1.0e-7)
%   if (abs(v(4))>abs(dthetai))
%       print('loading');
%       if (abs(v(4)>abs(a)))
%           print('plastic region');
%       else
%           print('elastic region');
%       end
%  else
%       print('unloading');
%  end
% dthetai=v(4);
% odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
% [x1 y1]=ode45('goveqs1_valplastic1',[0 alpha],[v(3) 0 0 0],odeoptions);
% lastrow1=size(y1,1);
% cetac1=y1(lastrow1,1);
%else
%    print('Can not find cetac1');
% end
fprintf(fid,'%12.9f                    %12.9f              %12.9f                 %12.9f                %12.9f
%12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),test);
st=st+inc
end
fclose(fid)
end
```

2. ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธียิงเป้า โดยใช้โปรแกรม MATLAB กรณี REVERSE

```
function dydx=goveqs1_valplastic1un(x,y)
global P M0
dydx=zeros(3,1);
% statics
dydx(1)=-(P+(M0^2)/2)*y(3)+M0*y(2);                  %ceta
dydx(2)=cos(y(1));                       % x
dydx(3)=sin(y(1));                      % y
end

function dydx=goveqs2_valplastic1un(x,y)
global P M0 xs ys dtheta beta1 beta2 theta1 theta2 chk2 Mi chk1
dydx=zeros(3,1);
dthetai=dtheta-theta1;
dtheta0=dtheta;
thetaf=theta2;
My=theta1*tan(beta1);
Mf=My+(thetaf-theta1)*tan(beta2);
thetaR=thetaf-Mf/(tan(beta1));
if (chk2)
   if(not(chk1))
      Mj=(dtheta-thetaR)*tan(beta1);  % for different unloading path
      %Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);         % for elastic loading & unloading
   else
      Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);
   end                                                     % yield
else
   Mj=(tan(beta1))*dtheta0;                                 % not yield
end
```

```
dydx(1)=Mj+(P+(M0^2)/2)*(ys-y(3))+M0*(y(2)-xs);          % ceta
dydx(2)=cos(y(1));                                        % x
dydx(3)=sin(y(1));                                        % y
end

function r=score_valplastic1un(v)
global st alpha beta1 beta2 pl xs ys P M0 dtheta theta1 theta2 chk2 chk1 Mi
%loading
r=zeros(4,1);
P=v(1); M0=v(2); cetaa=v(3); dtheta=v(4);
dthetai=dtheta-theta1;
dtheta0=dtheta;
thetaf=theta2;
My=theta1*tan(beta1);
Mf=My+(thetaf-theta1)*tan(beta2);
thetaR=thetaf-Mf/(tan(beta1));
odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs1_valplastic1un',[0 alpha],[cetaa 0 0],odeoptions);
lastrow1=size(y1,1);
xs=y1(lastrow1,2); ys=y1(lastrow1,3); ceta1=y1(lastrow1,1);
ceta2=ceta1+dtheta;
[x2 y2]=ode45('goveqs2_valplastic1un',[alpha st],[ceta2 xs ys],odeoptions);
lastrow2=size(y2,1);
xp=y2(lastrow2,2); yp=y2(lastrow2,3); cetap=y2(lastrow2,1);
if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title ('Equilibrium shape');
    plot(y1(:,2),y1(:,3));
    plot(y2(:,2),y2(:,3));
```

```
    axis on;
    axis equal;
    grid on;
end
if (chk2)
    %Mj=beta1*theta1;
    if(not(chk1))
        Mj=(dtheta-thetaR)*tan(beta1); %for different unloading path
        %Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);        % for elastic loading & unloading
    else
        Mj=Mi+dthetai*tan(beta2);
    end
else
        Mj=(tan(beta1))*dtheta0;
end
r(1)=y2(lastrow2,2)-1;
r(2)=y2(lastrow2,3);
r(3)=y2(lastrow2,1);
r(4)=-(P+(M0^2)/2)*ys+M0*xs-Mj;
end

function valelastica_plastic1_un
% cantilever beam with follower self-weight
% including configurational force M^2/2EI
clear
global st pl alpha beta1 beta2 theta1 theta2 chk2 chk1 Mi
format long
alpha=input('position of spring joint (alpha) ');
%beta1=input('constant of spring joint #1 ');
%beta2=input('constant of the spring joint #2 ');
```

```
theta1=input('Yield point (angle)= ');
theta2=input('final point (angle)= ');
%beta2=beta1*theta1/theta2;
% static parameters
st=input('total arc-length ');
v(1)=input('end load (P) ');
v(2)=input('end moment (M0) ');
v(3)=input('ceta A (cetaa) ');
v(4)=input('difference in angle at spring joint (dtheta) ');
% end of input static parameters
beta1=atan(100); beta2=atan(0);
pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');
P=v(1);
Mo=v(2);
cetaa=v(3);
dtheta=v(4);
Mi=theta1*tan(beta1);
lim=input('limitation= ');
inc=input('increment= ');
%Assume unloading
chk1=false;
% Assume plastic range
chk2=true;
%Assume in elastic range
%if (abs(dtheta)>abs(theta1))
%    chk2=true; % plastic range
%else
%    chk2=false; % elastic range
% end
fid=fopen('output1.txt','wt');
```

```
fprintf(fid,'output of cantilever follower self-weight elastica\n');
fprintf(fid,'st          P            Mo              cetaa          dtheta\n');
i=0;
dv=0.0001;
m=1;
while (st>lim)
%while (st<lim)
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
    options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
    test=max(abs(fval));
while (test>1.0e-7&&i<25)
    i=i+1;
    v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
    [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
end
%if (abs(v(4))>abs(theta1))    %chk2 is to check the region of stiffness
%    chk2=true;          % Yielding
%    if (m)
%         v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
%         options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-
15);
%         [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
%         test=max(abs(fval));
%        while (test>1.0e-7&&i<25)
%         i=i+1;
%        v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
%        v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
%        [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
```

```
%       end
%   end
%   m=0;
% else
%   chk2=false;          % elastic
%   if (not(m))
%       v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
%       options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-
15);
%       [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
%       test=max(abs(fval));
%       while (test>1.0e-7&&i<25)
%        i=i+1;
%       v(1)=v(1)+dv; v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;
%       v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
%       [v fval]=fsolve('score_valplastic1un',v0,options)
%       end
%   end
%   m=1;
% end
%if (not(chk1))
% unloading case (UL)
%   v0=[v(1) v(2) v(3) v(4)];
%  options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',400,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
%   [v fval]=fsolve('score_valplastic2',v0,options)
%   test=max(abs(fval));
% end
%if (test<1.0e-7)
%   if (abs(v(4))>abs(dthetai))
%      print('loading');
```

```
%       if (abs(v(4)>abs(a)))
%           print('plastic region');
%       else
%           print('elastic region');
%       end
%  else
%       print('unloading');
%  end
% dthetai=v(4);
% odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
% [x1 y1]=ode45('goveqs1_valplastic1',[0 alpha],[v(3) 0 0 0],odeoptions);
% lastrow1=size(y1,1);
% cetac1=y1(lastrow1,1);
%else
%     print('Can not find cetac1');
% end
fprintf(fid,'%12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f          %12.9f
%12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4),test);
st=st+inc
end
fclose(fid)
end
```

ภาคผนวก จ

ผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ตารางที่ จ.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	16.47088438	0.747819923	0.261213974	-0.075399282
1.1	12.66324021	2.140106621	0.822380096	-0.207800258
1.2	9.525802912	2.743025818	1.150880395	-0.250371903
1.3	7.149187514	3.070949506	1.387441332	-0.259852803
1.4	5.313141278	3.257987882	1.571183662	-0.253882566
1.5	3.886579218	3.357153088	1.71958789	-0.240670986
1.6	2.778623515	3.397118594	1.84325809	-0.224557496
1.7	1.919557709	3.396155135	1.949232475	-0.207814561
1.8	1.254257159	3.36676016	2.042294553	-0.191575013
1.9	1.196622597	3.362619843	2.051027218	-0.190002147
2	0.694686432	3.311978082	2.133645806	-0.174899663
2.1	0.032634096	3.183715712	2.272280398	-0.149588985
2.2	-0.205358782	3.106369808	2.338198033	-0.138016266
2.3	-0.388654498	3.025444618	2.400479598	-0.127545195
2.4	-0.529170269	2.942564529	2.459782227	-0.118075477
2.5	-0.636109249	2.858893954	2.516609772	-0.109506576
2.6	-0.716604367	2.775264818	2.571354798	-0.101743488
2.7	-0.776210208	2.692268401	2.624327585	-0.094699225
2.8	-0.819270683	2.610320169	2.67577717	-0.088295524
2.9	-0.849199218	2.529707347	2.725905228	-0.082462728
3	-0.868689859	2.450623103	2.774876867	-0.07713919

ตารางที่ จ.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	16.47088438	0.747819923	0.261213974	-0.075399282
1.1	10.57272404	1.732047707	0.856367905	-0.449535793
1.2	7.934365916	1.991550608	1.258285088	-0.728948474
1.3	6.71075787	2.189959865	1.591262517	-0.872478454
1.4	5.820492466	2.423633239	1.861046945	-0.90732149
1.5	4.807898628	2.688995795	2.04512137	-0.847090155
1.6	3.680684727	2.915771826	2.151896269	-0.734926421
1.7	2.626392032	3.070757688	2.210555355	-0.60793953
1.8	1.737355696	3.160559671	2.242451414	-0.482136216
1.9	1.023249921	3.200946289	2.259237718	-0.362669673
2	0.462941676	3.20573516	2.267218	-0.250821142
2.1	0.032634096	3.183715712	2.272280398	-0.149588985
2.2	-0.205358782	3.106369808	2.338198033	-0.138016266
2.3	-0.388654498	3.025444618	2.400479598	-0.127545195
2.4	-0.529170269	2.942564529	2.459782227	-0.118075477
2.5	-0.636109249	2.858893954	2.516609772	-0.109506576
2.6	-0.716604367	2.775264818	2.571354798	-0.101743488
2.7	-0.776210208	2.692268401	2.624327585	-0.094699225
2.8	-0.819270683	2.610320169	2.67577717	-0.088295524
2.9	-0.849199218	2.529707347	2.725905228	-0.082462728
3	-0.868689859	2.450623103	2.774876867	-0.07713919

ตารางที่ จ.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0.1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	16.47088438	0.747819923	0.261213974	-0.075399282
1.1	9.026834757	1.494142893	0.862772963	-0.594924935
1.2	6.18370246	1.540912262	1.280276372	-1.023339216
1.3	5.279829755	1.523804433	1.668513757	-1.327967181
1.4	5.340612352	1.540769614	2.069538113	-1.555459424
1.5	5.785938002	1.829440239	2.41712406	-1.597141909
1.6	5.025712782	2.309632629	2.553174149	-1.403330717
1.7	3.74304785	2.651120805	2.576269415	-1.167508005
1.8	2.557410799	2.866590903	2.553453315	-0.934399109
1.9	1.56504559	3.00470023	2.499423119	-0.699227194
2	0.741060324	3.100572909	2.411457951	-0.446812461
2.1	0.032634096	3.183715712	2.272280398	-0.149588985
2.2	-0.205358782	3.106369808	2.338198033	-0.138016266
2.3	-0.388654498	3.025444618	2.400479598	-0.127545195
2.4	-0.529170269	2.942564529	2.459782227	-0.118075477
2.5	-0.636109249	2.858893954	2.516609772	-0.109506576
2.6	-0.716604367	2.775264818	2.571354798	-0.101743488
2.7	-0.776210208	2.692268401	2.624327585	-0.094699225
2.8	-0.819270683	2.610320169	2.67577717	-0.088295524
2.9	-0.849199218	2.529707347	2.725905228	-0.082462728
3	-0.868689859	2.450623103	2.774876867	-0.07713919

ตารางที่ จ.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	16.47088438	0.747819923	0.261213974	-0.075399282
1.1	8.769169738	1.458886796	0.862856437	-0.616942314
1.2	5.863202307	1.478152452	1.28050832	-1.065846334
1.3	4.937044769	1.428972785	1.673107819	-1.394699722
1.4	5.05043642	1.390799023	2.092855426	-1.663508657
1.5	5.953379949	1.645713731	2.492662099	-1.754532046
1.6	5.348411002	2.196910208	2.637163426	-1.539520668
1.7	4.004055279	2.57398736	2.653948671	-1.284471172
1.8	2.757246429	2.807242328	2.624646002	-1.037283083
1.9	1.712625869	2.957797986	2.562207496	-0.78716915
2	0.83495901	3.067506635	2.458952477	-0.511493213
2.1	0.032634096	3.183715712	2.272280398	-0.149588985
2.2	-0.205358782	3.106369808	2.338198033	-0.138016266
2.3	-0.388654498	3.025444618	2.400479598	-0.127545195
2.4	-0.529170269	2.942564529	2.459782227	-0.118075477
2.5	-0.636109249	2.858893954	2.516609772	-0.109506576
2.6	-0.716604367	2.775264818	2.571354798	-0.101743488
2.7	-0.776210208	2.692268401	2.624327585	-0.094699225
2.8	-0.819270683	2.610320169	2.67577717	-0.088295524
2.9	-0.849199218	2.529707347	2.725905228	-0.082462728
3	-0.868689859	2.450623103	2.774876867	-0.07713919

ตารางที่ จ.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	17.11527146	0.88708352	0.229203335	-0.064824911
1.1	12.02581858	2.405007855	0.711865367	-0.199607915
1.2	8.453393522	2.921414448	0.996411385	-0.267431514
1.3	6.136938915	3.12629544	1.21558407	-0.306237928
1.4	4.561510687	3.200984514	1.403135302	-0.327905933
1.5	3.440846494	3.21446896	1.570413823	-0.337764186
1.6	2.607452349	3.198573711	1.721741013	-0.338887036
1.7	1.960601054	3.168634302	1.858667306	-0.333401013
1.8	1.439873728	3.131497782	1.981823439	-0.323031036
1.9	1.010011971	3.089548659	2.091881746	-0.309299592
2	0.650899415	3.043160725	2.189939089	-0.293536266
2.1	0.350596462	2.992176009	2.277484493	-0.276822866
2.2	0.1009507	2.936607254	2.35617428	-0.259962126
2.3	-0.104669645	2.876812185	2.427609271	-0.24349567
2.4	-0.272254671	2.813414866	2.493200188	-0.227754282
2.5	-0.407342019	2.747164455	2.554120107	-0.212915741
2.6	-0.51497881	2.678820795	2.61131121	-0.199055059
2.7	-0.599652296	2.609083704	2.665515864	-0.186182366
2.8	-0.665262398	2.538560024	2.717313517	-0.174269162
2.9	-0.71513961	2.467755419	2.767155261	-0.163265588
3	-0.752089909	2.397078878	2.815392432	-0.153111379

ตารางที่ จ.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	17.11527146	0.88708352	0.229203335	-0.064824911
1.1	10.31396397	2.310677706	0.663789307	-0.360733033
1.2	6.253175434	2.62148899	0.899949284	-0.629619218
1.3	4.299175585	2.658338686	1.106671615	-0.794267552
1.4	3.223167057	2.596352754	1.304169886	-0.908181531
1.5	2.608599142	2.497407767	1.500285147	-0.990569771
1.6	2.265601833	2.391153897	1.698675295	-1.049611442
1.7	2.092031999	2.297381217	1.900074288	-1.087433566
1.8	2.014802086	2.235334601	2.100753371	-1.100973542
1.9	1.94989096	2.224834243	2.28902049	-1.082780057
2	1.79638093	2.271454663	2.446208477	-1.027776911
2.1	1.5105679	2.34984479	2.561304149	-0.943771913
2.2	1.143794643	2.425346227	2.639889134	-0.84644619
2.3	0.766850427	2.480277179	2.693503916	-0.747063391
2.4	0.42131308	2.511666937	2.731176592	-0.650701927
2.5	0.122743589	2.522314519	2.758590467	-0.559081902
2.6	-0.126942224	2.516235003	2.779218623	-0.472530553
2.7	-0.331593243	2.497134728	2.795244498	-0.390861405
2.8	-0.496960841	2.468055996	2.808100999	-0.313726729
2.9	-0.62899319	2.431392535	2.81876996	-0.240753628
3	-0.7331521	2.388998367	2.827950896	-0.171593615

ตารางที่ จ.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0.1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	17.11527146	0.88708352	0.229203335	-0.064824911
1.1	9.339805859	2.250180483	0.636064576	-0.450607179
1.2	5.051744144	2.461059106	0.847527964	-0.813190626
1.3	3.192062343	2.425190986	1.043182086	-1.042149783
1.4	2.239858561	2.30096559	1.236383826	-1.21223012
1.5	1.740961637	2.140959598	1.434315995	-1.349691086
1.6	1.509667818	1.96696668	1.64265611	-1.467480344
1.7	1.469901034	1.790033103	1.86756134	-1.57274201
1.8	1.613377453	1.620705845	2.116968887	-1.668025837
1.9	2.001961744	1.48857259	2.398809602	-1.74422154
2	2.625965331	1.509731743	2.684632347	-1.74246949
2.1	2.743578794	1.751357135	2.856695692	-1.600211704
2.2	2.290602223	1.98564783	2.93052276	-1.419340862
2.3	1.720073779	2.147401883	2.964638032	-1.247687657
2.4	1.186801025	2.25219478	2.979104666	-1.087847885
2.5	0.725061853	2.317321489	2.980931397	-0.936671806
2.6	0.335193718	2.355137379	2.972937648	-0.790886626
2.7	0.008243214	2.374269045	2.956173234	-0.647562781
2.8	-0.266617909	2.38096216	2.930660905	-0.503894108
2.9	-0.499918403	2.380050898	2.895544552	-0.356817871
3	-0.701596976	2.375732282	2.848840242	-0.20239736

ตารางที่ จ.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	17.11527146	0.88708352	0.229203335	-0.064824911
1.1	6.724874162	2.072421414	0.563182081	-0.679211604
1.2	3.443146907	2.255816165	0.780325299	-1.039350221
1.3	1.986038847	2.203269972	0.977802746	-1.280731263
1.4	1.248470817	2.064144921	1.172286902	-1.467702905
1.5	0.87179412	1.887862126	1.372036546	-1.625285201
1.6	0.705508046	1.693216064	1.583835367	-1.767063873
1.7	0.688838533	1.486306393	1.815927242	-1.902511093
1.8	0.82591344	1.266275042	2.081864086	-2.040430466
1.9	1.258567268	1.028881906	2.411484249	-2.191603202
2	3.062012913	0.889319861	2.873729585	-2.319216221
2.1	4.149214857	1.407859942	3.096065902	-2.090641828
2.2	3.491106264	1.756626882	3.164631143	-1.876727014
2.3	2.746221833	1.961376022	3.205610825	-1.7044065
2.4	2.092926658	2.084251995	3.234139417	-1.556698702
2.5	1.547661038	2.155749827	3.254860692	-1.424915403
2.6	1.098919811	2.193030495	3.269808528	-1.304031263
2.7	0.730859191	2.206693299	3.280021439	-1.190797328
2.8	0.428741323	2.203704714	3.286054804	-1.082923872
2.9	0.180087482	2.188853231	3.288183558	-0.978675061
3	-0.025336021	2.165548085	3.28649067	-0.876641772

ตารางที่ จ.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.38170329	0.826575936	0.24914806	0.016571597
1.1	13.98362235	2.550872172	0.765120286	-0.021168051
1.2	9.16688313	3.30576706	1.036656228	-0.103194409
1.3	5.943016321	3.606946029	1.220102976	-0.173763709
1.4	3.872981898	3.686980292	1.364704628	-0.226905116
1.5	2.536801659	3.656193401	1.490419574	-0.265240292
1.6	1.660853429	3.569890105	1.606686372	-0.292061297
1.7	1.076556131	3.457523891	1.718117712	-0.310014898
1.8	0.67925118	3.335558536	1.826795285	-0.32104444
1.9	0.402589028	3.213447146	1.933357221	-0.326542999
2	0.203588085	3.096589764	2.037575835	-0.327517891
2.1	0.053974225	2.987854257	2.138714291	-0.324731849
2.2	-0.064833549	2.888380056	2.235801657	-0.318816011
2.3	-0.164665145	2.798051819	2.327883158	-0.310350202
2.4	-0.252468775	2.715870628	2.414238009	-0.299904087
2.5	-0.331726123	2.640326088	2.494520147	-0.288038713
2.6	-0.403685632	2.569760661	2.568786838	-0.275280637
2.7	-0.46842002	2.502660032	2.637426494	-0.26208938
2.8	-0.525605001	2.437817723	2.701034653	-0.248835586
2.9	-0.574981522	2.374378668	2.760291696	-0.235796042
3	-0.616547406	2.311801707	2.815872071	-0.223162306

ตารางที่ จ.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.38170329	0.826575936	0.24914806	0.016571597
1.1	13.98362235	2.550872172	0.765120286	-0.021168051
1.2	9.16688313	3.30576706	1.036656228	-0.103194409
1.3	5.097127146	3.732271492	1.177356563	-0.307005606
1.4	2.239412887	3.839735166	1.233040877	-0.586461355
1.5	0.975914161	3.69290858	1.308334563	-0.750593375
1.6	0.393303581	3.471302459	1.402039638	-0.85596714
1.7	0.131830966	3.234349732	1.510351167	-0.927595394
1.8	0.034454344	3.00368492	1.630520943	-0.978001394
1.9	0.027195959	2.7875383	1.760897321	-1.013821487
2	0.073148587	2.589460817	1.900460503	-1.03849547
2.1	0.152699971	2.412054694	2.048278422	-1.053350884
2.2	0.253253299	2.259100263	2.202723547	-1.057881672
2.3	0.36120156	2.137027659	2.360126416	-1.049621428
2.4	0.453324048	2.05456488	2.512948261	-1.024398859
2.5	0.494480654	2.016905218	2.649808489	-0.978778351
2.6	0.458025035	2.016186115	2.761254254	-0.914538419
2.7	0.351166678	2.033533026	2.846260392	-0.838866561
2.8	0.204266073	2.052326972	2.910132339	-0.759150195
2.9	0.04584012	2.064096207	2.959019387	-0.679935559
3	-0.106507907	2.066248405	2.997593913	-0.603331725

ตารางที่ จ.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0.1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.38170329	0.826575936	0.24914806	0.016571597
1.1	13.98362235	2.550872172	0.765120286	-0.021168051
1.2	8.521641891	3.436671928	1.01621121	-0.183696308
1.3	1.472507123	4.198133436	0.914704617	-0.974805587
1.4	-0.213318027	3.957786823	0.945852998	-1.259928446
1.5	-0.747553456	3.606613254	1.028448729	-1.421966358
1.6	-0.889060356	3.258600783	1.134829192	-1.533984582
1.7	-0.871874655	2.934672398	1.256035811	-1.620621715
1.8	-0.785027224	2.63640737	1.389262277	-1.69293374
1.9	-0.664997277	2.360467035	1.534250944	-1.756951604
2	-0.525416012	2.102228078	1.692296396	-1.816516738
2.1	-0.367298169	1.856704177	1.866219467	-1.874472606
2.2	-0.180228555	1.618632665	2.061073119	-1.933274144
2.3	0.067098112	1.382568956	2.286119484	-1.995206306
2.4	0.473197022	1.147025858	2.559793318	-2.06047391
2.5	1.396329526	0.986437926	2.901003285	-2.09262328
2.6	2.19488937	1.187945812	3.12373357	-1.946667266
2.7	2.060725314	1.419335039	3.214824413	-1.770781977
2.8	1.716458017	1.573595835	3.271246527	-1.620653443
2.9	1.359465976	1.672974881	3.313062228	-1.490054936
3	1.035578553	1.734899014	3.346430554	-1.373283954

ตารางที่ จ.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.38170329	0.826575936	0.24914806	0.016571597
1.1	13.98362235	2.550872172	0.765120286	-0.021168051
1.2	9.16688313	3.30576706	1.036656228	-0.103194409
1.3	3.805301294	3.914929372	1.100638393	-0.52442843
1.4	0.745530916	3.93994677	1.074417306	-0.971518296
1.5	-0.192811499	3.660231251	1.128690905	-1.187099327
1.6	-0.507726754	3.340069838	1.219357523	-1.322259079
1.7	-0.58037641	3.02996525	1.330750753	-1.419709917
1.8	-0.544767466	2.740238137	1.457091257	-1.496691984
1.9	-0.454898987	2.470964399	1.596601491	-1.561762583
2	-0.332351896	2.219340216	1.749600932	-1.619838539
2.1	-0.182143961	1.981897397	1.918018886	-1.674051665
2.2	0.003546972	1.755504807	2.105623764	-1.726396027
2.3	0.251034513	1.539212007	2.318817648	-1.777253686
2.4	0.627343825	1.343658291	2.566618263	-1.820664957
2.5	1.226617269	1.244967339	2.838083432	-1.815645038
2.6	1.615986144	1.369256312	3.02572067	-1.687951304
2.7	1.490002729	1.546112672	3.115083651	-1.516697569
2.8	1.18787746	1.678914868	3.164939209	-1.355198749
2.9	0.863815022	1.769543058	3.196270098	-1.206702274
3	0.563041025	1.828936694	3.216251446	-1.068182911

ตารางที่ จ.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.15607217	0.871490405	0.250531559	-0.008108588
1.1	14.00354892	2.458004979	0.774853833	-0.021668089
1.2	9.969725733	3.090273997	1.07076336	-0.025503959
1.3	7.117621586	3.392354636	1.283438941	-0.026135649
1.4	5.062428327	3.535179491	1.452576049	-0.025411497
1.5	3.558795945	3.588013843	1.594122664	-0.024086218
1.6	2.445087666	3.586241109	1.716487096	-0.022524003
1.7	1.611960753	3.550108087	1.824749699	-0.020909936
1.8	0.983811035	3.492005119	1.922242604	-0.019338104
1.9	0.507382457	3.419853639	2.011275447	-0.017854153
2	0.144552995	3.338871667	2.093514854	-0.016477453
2.1	-0.132359291	3.252569468	2.17020149	-0.015213118
2.2	-0.343710255	3.163341682	2.242282232	-0.014058699
2.3	-0.504642285	3.072836545	2.310494914	-0.013007937
2.4	-0.626535246	2.982192323	2.375424406	-0.012052882
2.5	-0.718023677	2.892194086	2.437541512	-0.011185078
2.6	-0.785713457	2.80337859	2.497229824	-0.010396201
2.7	-0.834699194	2.716107109	2.554805036	-0.009678396
2.8	-0.86893681	2.630615506	2.610530007	-0.009024424
2.9	-0.891517709	2.547050002	2.664624672	-0.008427721
3	-0.904871661	2.465492593	2.717274458	-0.007882381

ตารางที่ จ.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.15607217	0.871490405	0.250531559	-0.008108588
1.1	13.59931921	2.358159629	0.791922392	-0.080120758
1.2	9.797976263	2.946231271	1.106576975	-0.119337128
1.3	7.137200882	3.255251706	1.330014614	-0.126669796
1.4	5.166859309	3.421678487	1.502763657	-0.119732988
1.5	3.681935854	3.500898284	1.642512027	-0.106328557
1.6	2.555334202	3.522891227	1.759527621	-0.090420749
1.7	1.697814222	3.506333012	1.860385876	-0.074040043
1.8	1.04371529	3.46363821	1.949464473	-0.058189845
1.9	0.544016133	3.40330637	2.029747999	-0.043327745
2	0.161962679	3.331242489	2.103314877	-0.029624803
2.1	-0.130069282	3.251584876	2.171643514	-0.017104923
2.2	-0.343710255	3.163341682	2.242282232	-0.014058699
2.3	-0.504642285	3.072836545	2.310494914	-0.013007937
2.4	-0.626535246	2.982192323	2.375424406	-0.012052882
2.5	-0.718023677	2.892194086	2.437541512	-0.011185078
2.6	-0.785713457	2.80337859	2.497229824	-0.010396201
2.7	-0.834699194	2.716107109	2.554805036	-0.009678396
2.8	-0.86893681	2.630615506	2.610530007	-0.009024424
2.9	-0.891517709	2.547050002	2.664624672	-0.008427721
3	-0.904871661	2.465492593	2.717274458	-0.007882381

ตารางที่ จ.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.15607217	0.871490405	0.250531559	-0.008108588
1.1	11.09776026	1.824425683	0.851209391	-0.394207723
1.2	8.199987652	2.083700581	1.249738413	-0.670104514
1.3	6.822535051	2.29144792	1.573439641	-0.80333924
1.4	5.789357877	2.530356212	1.828902668	-0.826309652
1.5	4.677221714	2.788378129	1.99934169	-0.758475513
1.6	3.511631756	3.002776751	2.096707919	-0.642506273
1.7	2.451665448	3.147490162	2.148448281	-0.512353136
1.8	1.568681319	3.229992377	2.17428113	-0.382898155
1.9	0.864121387	3.265251118	2.185208604	-0.259216
2	0.314033843	3.266326509	2.187331405	-0.142736823
2.1	-0.110014988	3.242997488	2.184238981	-0.033637642
2.2	-0.343710255	3.163341682	2.242282232	-0.014058699
2.3	-0.504642285	3.072836545	2.310494914	-0.013007937
2.4	-0.626535246	2.982192323	2.375424406	-0.012052882
2.5	-0.718023677	2.892194086	2.437541512	-0.011185078
2.6	-0.785713457	2.80337859	2.497229824	-0.010396201
2.7	-0.834699194	2.716107109	2.554805036	-0.009678396
2.8	-0.86893681	2.630615506	2.610530007	-0.009024424
2.9	-0.891517709	2.547050002	2.664624672	-0.008427721
3	-0.904871661	2.465492593	2.717274458	-0.007882381

ตารางที่ จ.16 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.25$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.15607217	0.871490405	0.250531559	-0.008108588
1.1	8.769169738	1.458886796	0.862856437	-0.616942314
1.2	5.863202307	1.478152452	1.28050832	-1.065846334
1.3	4.937044769	1.428972785	1.673107819	-1.394699722
1.4	5.05043642	1.390799023	2.092855426	-1.663508657
1.5	5.953379949	1.645713731	2.492662099	-1.754532046
1.6	5.348411002	2.196910208	2.637163426	-1.539520668
1.7	4.004055279	2.57398736	2.653948671	-1.284471172
1.8	2.757246429	2.807242328	2.624646002	-1.037283083
1.9	1.712625869	2.957797986	2.562207496	-0.78716915
2	0.83495901	3.067506635	2.458952477	-0.511493213
2.1	0.010732847	3.192612557	2.258926947	-0.131962486
2.2	-0.343710255	3.163341682	2.242282232	-0.014058699
2.3	-0.504642285	3.072836545	2.310494914	-0.013007937
2.4	-0.626535246	2.982192323	2.375424406	-0.012052882
2.5	-0.718023677	2.892194086	2.437541512	-0.011185078
2.6	-0.785713457	2.80337859	2.497229824	-0.010396201
2.7	-0.834699194	2.716107109	2.554805036	-0.009678396
2.8	-0.86893681	2.630615506	2.610530007	-0.009024424
2.9	-0.891517709	2.547050002	2.664624672	-0.008427721
3	-0.904871661	2.465492593	2.717274458	-0.007882381

ตารางที่ จ.17 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.21456811	0.887658163	0.246638081	-0.007144823
1.1	13.9079987	2.486412848	0.761878255	-0.022518532
1.2	9.836987866	3.10612497	1.053490505	-0.030402216
1.3	7.006893484	3.393219859	1.265168588	-0.034669722
1.4	4.990777015	3.523931412	1.435549842	-0.036712215
1.5	3.52463788	3.568620944	1.579658256	-0.037271192
1.6	2.440148258	3.562306895	1.705158055	-0.036835129
1.7	1.626970202	3.524404549	1.816607147	-0.035748828
1.8	1.010847033	3.466437876	1.917022607	-0.034259937
1.9	0.540516803	3.395601753	2.008560701	-0.032545047
2	0.1797336	3.316573642	2.092843995	-0.030727536
2.1	-0.097689166	3.232493927	2.171133274	-0.028891143
2.2	-0.311027911	3.145523472	2.24442734	-0.027090622
2.3	-0.474694751	3.057174045	2.313526902	-0.025360003
2.4	-0.599602559	2.968512938	2.379079047	-0.023718851
2.5	-0.694103525	2.880295732	2.441610178	-0.022176878
2.6	-0.764646377	2.793055038	2.501551165	-0.020737251
2.7	-0.816245835	2.707161413	2.559256528	-0.019398934
2.8	-0.852828001	2.622867362	2.615019798	-0.018158293
2.9	-0.877482667	2.540338325	2.669085151	-0.017010196
3	-0.892653745	2.459675821	2.721656699	-0.015948745

ตารางที่ จ.18 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50, \beta_1 = 100,$ $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.21456811	0.887658163	0.246638081	-0.007144823
1.1	13.26910731	2.461684092	0.745372321	-0.082248426
1.2	9.133281884	3.013042852	1.025049288	-0.151265229
1.3	6.521946267	3.240284415	1.2379461	-0.189591728
1.4	4.753887727	3.330415046	1.417769834	-0.209831729
1.5	3.495327921	3.354394408	1.575891583	-0.217740198
1.6	2.559533603	3.344632427	1.716869271	-0.216740095
1.7	1.837325562	3.316610255	1.84275273	-0.209256855
1.8	1.264090127	3.277462023	1.954847028	-0.197229346
1.9	0.801329712	3.23025014	2.054477783	-0.182273938
2	0.4253099	3.176324598	2.143194134	-0.165701192
2.1	0.120130407	3.116537583	2.222676324	-0.148506479
2.2	-0.126099571	3.051729312	2.294563364	-0.131389027
2.3	-0.323086977	2.98282455	2.360322779	-0.11480117
2.4	-0.479094513	2.910778193	2.421192006	-0.099009104
2.5	-0.601218286	2.836500042	2.478174871	-0.084149025
2.6	-0.695508892	2.760802097	2.532066946	-0.070271618
2.7	-0.76706565	2.684374569	2.5834907	-0.057374145
2.8	-0.820139591	2.607783407	2.632930455	-0.045422297
2.9	-0.858243653	2.531479849	2.68076264	-0.034364485
3	-0.884260755	2.455814909	2.727280107	-0.024140922

ตารางที่ จ.19 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 1$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.21456811	0.887658163	0.246638081	-0.007144823
1.1	10.81508451	2.340026638	0.678003677	-0.313856416
1.2	6.526538428	2.658559799	0.912014746	-0.586253618
1.3	4.480263036	2.69958562	1.117304057	-0.750718527
1.4	3.351644754	2.641369474	1.313345392	-0.86314162
1.5	2.701062422	2.546685893	1.50761137	-0.943108928
1.6	2.328456118	2.445762465	1.703332343	-0.998768259
1.7	2.124520861	2.35877138	1.900605529	-1.032064455
1.8	2.009465713	2.304545874	2.094876237	-1.039902255
1.9	1.896744448	2.300213691	2.274225284	-1.015696221
2	1.697180097	2.347034672	2.421945011	-0.956355769
2.1	1.384050995	2.419808316	2.529724132	-0.870384087
2.2	1.00876232	2.488158091	2.60335658	-0.772132752
2.3	0.633329131	2.536949316	2.653300393	-0.671769358
2.4	0.29322291	2.563653834	2.687815488	-0.574044409
2.5	0.001217689	2.570826578	2.712232619	-0.480676785
2.6	-0.241872329	2.562164198	2.729883034	-0.392067859
2.7	-0.440286884	2.541118357	2.742898034	-0.308106273
2.8	-0.599884911	2.510547704	2.752695873	-0.22850584
2.9	-0.726611382	2.472715815	2.760259706	-0.152942185
3	-0.825886115	2.42938402	2.766297401	-0.081105496

ตารางที่ จ.20 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.50$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.21456811	0.887658163	0.246638081	-0.007144823
1.1	9.183291229	2.240089671	0.631616117	-0.464854546
1.2	4.86215407	2.436225469	0.839396793	-0.841045093
1.3	3.011953706	2.390085403	1.033147132	-1.07972005
1.4	2.071363666	2.257176129	1.225194887	-1.258640332
1.5	1.580642925	2.088681044	1.422573767	-1.405043487
1.6	1.353222235	1.905163176	1.631134924	-1.532631368
1.7	1.313740435	1.715891157	1.857656775	-1.649597377
1.8	1.459061414	1.527805349	2.111944605	-1.760609436
1.9	1.886317049	1.362635536	2.408555719	-1.861448245
2	2.755011415	1.355389115	2.731971143	-1.886313869
2.1	3.030902333	1.65027699	2.915943928	-1.723891036
2.2	2.535197356	1.919722343	2.984825431	-1.523819446
2.3	1.914748856	2.097972941	3.01494181	-1.340476856
2.4	1.342551118	2.212007413	3.026293143	-1.17184934
2.5	0.850299965	2.283291052	3.025119929	-1.012733579
2.6	0.435266247	2.325958353	3.013658258	-0.858745998
2.7	0.086197638	2.349622339	2.992401428	-0.706075337
2.8	-0.209608277	2.361298361	2.960657832	-0.550894188
2.9	-0.464635316	2.366722005	2.916410935	-0.388557338
3	-0.691730009	2.371635905	2.855362891	-0.212031914

ตารางที่ จ.21 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 100$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.46416307	0.880327774	0.248766492	0.001740232
1.1	14.13389139	2.500650658	0.767716379	-0.002134813
1.2	9.926701104	3.147660851	1.058120528	-0.010519009
1.3	6.985989037	3.447298784	1.265824318	-0.018145427
1.4	4.905213638	3.579399986	1.431191116	-0.024210294
1.5	3.41127176	3.618687258	1.570460181	-0.028746577
1.6	2.323839852	3.60337502	1.692067709	-0.031959182
1.7	1.522529377	3.55512667	1.800951919	-0.034067259
1.8	0.925551232	3.486989666	1.900191873	-0.035270191
1.9	0.476455118	3.407095052	1.991785028	-0.035743292
2	0.135780943	3.320589261	2.077075604	-0.035639397
2.1	-0.124353815	3.230739182	2.157011511	-0.035090763
2.2	-0.32385538	3.139607878	2.232302505	-0.034210452
2.3	-0.477099614	3.04848667	2.303515534	-0.033093421
2.4	-0.594604224	2.958175094	2.371128968	-0.031817695
2.5	-0.684181964	2.869163693	2.435561423	-0.030445807
2.6	-0.75172633	2.78174947	2.497185345	-0.029026551
2.7	-0.80175479	2.696109296	2.556333371	-0.027596918
2.8	-0.837779025	2.612344195	2.613301146	-0.026184092
2.9	-0.862564275	2.530506873	2.66834957	-0.024807332
3	-0.878309651	2.450617928	2.72170679	-0.023479671

ตารางที่ จ.22 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75, \beta_1 = 100,$ $\beta_2 = 10$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.46416307	0.880327774	0.248766492	0.001740232
1.1	14.13389139	2.500650658	0.767716379	-0.002134813
1.2	9.926701104	3.147660851	1.058120528	-0.010519009
1.3	6.799830292	3.476184984	1.258189878	-0.04525939
1.4	4.500812023	3.622278869	1.406483325	-0.101629355
1.5	2.981690173	3.638055405	1.53283175	-0.142212586
1.6	1.964442734	3.586140909	1.647434543	-0.170396413
1.7	1.270457229	3.500141498	1.755343912	-0.188965604
1.8	0.786477252	3.398929667	1.858901006	-0.199999123
1.9	0.439901019	3.293340605	1.958917503	-0.205025827
2	0.18361372	3.189500638	2.055335677	-0.205195361
2.1	-0.013092486	3.090589118	2.147654044	-0.201419815
2.2	-0.17000848	2.997849012	2.235239858	-0.194476984
2.3	-0.299489552	2.911254505	2.317565605	-0.185071763
2.4	-0.408854574	2.830026256	2.394361069	-0.173857577
2.5	-0.502182198	2.753052915	2.465667112	-0.161428678
2.6	-0.581677109	2.679207885	2.531801405	-0.148300642
2.7	-0.648627546	2.607539941	2.593271263	-0.134894955
2.8	-0.703992909	2.537349251	2.650676193	-0.121535333
2.9	-0.74869246	2.468181865	2.704627928	-0.108455367
3	-0.783703751	2.39978406	2.755698531	-0.095812888

ตารางที่ จ.23 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75, \beta_1 = 100,$ $\beta_2 = 1$

$\overline{S_t}$	$\overline{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.46416307	0.880327774	0.248766492	0.001740232
1.1	14.13389139	2.500650658	0.767716379	-0.002134813
1.2	9.926701104	3.147660851	1.058120528	-0.010519009
1.3	5.620166393	3.655244697	1.204423225	-0.223837112
1.4	2.526595067	3.815091542	1.258921349	-0.519266644
1.5	1.153327326	3.691895637	1.332034497	-0.690502317
1.6	0.510636188	3.483550453	1.423536392	-0.799455546
1.7	0.212861567	3.255172307	1.529797283	-0.872733219
1.8	0.091542283	3.030873075	1.647977951	-0.923551626
1.9	0.066909535	2.820165443	1.776245951	-0.958867627
2	0.098610977	2.627379057	1.913339367	-0.982246175
2.1	0.164449121	2.455652525	2.057998567	-0.99502645
2.2	0.249317458	2.309073333	2.208157589	-0.996675591
2.3	0.33706259	2.193841049	2.359680826	-0.984823716
2.4	0.403499245	2.117260312	2.504985228	-0.955835635
2.5	0.417707137	2.082023226	2.633811129	-0.907331679
2.6	0.361242076	2.079244593	2.738516908	-0.841725004
2.7	0.244831042	2.091917013	2.818758365	-0.765689254
2.8	0.096156325	2.105666766	2.87929462	-0.685807091
2.9	-0.059960464	2.113056322	2.92558556	-0.606213268
3	-0.208276122	2.111689532	2.96188316	-0.528918867

ตารางที่ จ.24 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{S}_t, \bar{P}, M_0, \theta_A, \Delta\theta$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\alpha = 0.75$, $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 0$

$\bar{S}_t$	$\bar{P}$	M_0	θ_A	$\Delta\theta$
1.01	19.46416307	0.880327774	0.248766492	0.001740232
1.1	14.13389139	2.500650658	0.767716379	-0.002134813
1.2	9.926701104	3.147660851	1.058120528	-0.010519009
1.3	3.805301294	3.914929372	1.100638393	-0.52442843
1.4	0.745530916	3.93994677	1.074417306	-0.971518296
1.5	-0.192811499	3.660231251	1.128690905	-1.187099327
1.6	-0.507726754	3.340069838	1.219357523	-1.322259079
1.7	-0.58037641	3.02996525	1.330750753	-1.419709917
1.8	-0.544767466	2.740238137	1.457091257	-1.496691984
1.9	-0.454898987	2.470964399	1.596601491	-1.561762583
2	-0.332351896	2.219340216	1.749600932	-1.619838539
2.1	-0.182143961	1.981897397	1.918018886	-1.674051665
2.2	0.003546972	1.755504807	2.105623764	-1.726396027
2.3	0.251034513	1.539212007	2.318817648	-1.777253686
2.4	0.627343825	1.343658291	2.566618263	-1.820664957
2.5	1.226617269	1.244967339	2.838083432	-1.815645038
2.6	1.615986144	1.369256312	3.02572067	-1.687951304
2.7	1.490002729	1.546112672	3.115083651	-1.516697569
2.8	1.18787746	1.678914868	3.164939209	-1.355198749
2.9	0.863815022	1.769543058	3.196270098	-1.206702274
3	0.563041025	1.828936694	3.216251446	-1.068182911

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นายณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี
วัน เดือน ปีเกิด	10 มกราคม 2518
ที่อยู่	98 หมู่ที่ 7 ตำบลดีลัง อำเภอพัฒนานิคม จังหวัดลพบุรี 15220
ประวัติการศึกษา	ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยนเรศวร
ประวัติการทำงาน	
ปัจจุบัน	นักบริหารงานประปา สังกัดกองประปา ชื่อหน่วยงาน เทศบาลตำบลพัฒนานิคม อ.พัฒนานิคม จ.ลพบุรี
เบอร์โทรศัพท์	08 – 9113 - 1293
อีเมล์	tob.nattaphat@hotmail.com