

ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดย  
มีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง

**EFFECTS OF OVERHANGING PORTION ON THE  
VARIABLE-ARC-LENGTH ELASTICA SUBJECTED TO  
UNIFORM SELF-WEIGHT**

ศรัณย์ ชุ่มกลัด

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี  
ปีการศึกษา 2560  
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยน  
ได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง

ศรัณย์ ชุ่มกลัด

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

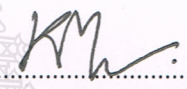
ปีการศึกษา 2560

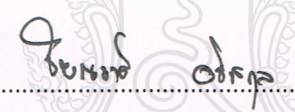
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี


หัวข้อวิทยานิพนธ์ ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง  
Effects of Overhanging Portion on the Variable-Arc Length Elastica Subjected to Uniform Self-Weight

ชื่อ - นามสกุล นายศรัณย์ ชุ่มกลัด  
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา  
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.  
ปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

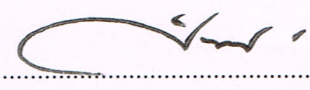
  
..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ์ มุสิกเทศ, Ph.D.)

  
..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

  
..... กรรมการ  
(อาจารย์จตุพล ตั้งปกาศิต, ปร.ด.)

  
..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

  
..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)

วันที่ 25 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2561

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้  
โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง  
Effects of Overhanging Portion on the Variable-Arc Length Elastica  
Subjected to Uniform Self-Weight

ชื่อ - นามสกุล นายศรัณย์ ชุ่มกลัด  
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา  
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.  
ปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ์ มุสิกเทศ, Ph.D.)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

..... กรรมการ  
(อาจารย์จตุพล ตั้งปกาศิต, ปร.ด.)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้  
เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)

วันที่ 25 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2561



หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง
ชื่อ – นามสกุล	ศรัณย์ ชุ่มกัลด์
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ค.
ปีการศึกษา	2560

## บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เกี่ยวข้องกับการศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ต่อพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคา โดยมีแรงกระทำภายใต้ น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยที่ปลายยื่นกำหนดให้เป็นสัดส่วนกับความยาวของช่วงของอิลาสติกคา

สมการครอบคลุมปัญหาสามารถสร้างได้จาก ชุดสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยของ อิลาสติกคา ความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์ดัดและความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต หลังจากนั้นระเบียบวิธียิงเป้าจะถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา โดยปลายยื่นเป็นสัดส่วนกับความยาวของช่วงอิลาสติกคาที่ 0.25, 0.50 และ 0.75 โดยมีการแปรผันค่าความแข็งของสปริงหมุนที่ ศูนย์ ถึง อนันต์ ระเบียบวิธียิงเป้าจะถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา

ได้นำผลจากการคำนวณมาวิเคราะห์โดยอาศัยแผนผังความสัมพันธ์ระหว่าง น้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของอิลาสติกคา รูปร่างสมดุลของอิลาสติกคา พบว่าความยาวของปลายยื่นมีผลต่อพฤติกรรมของอิลาสติกคา โดยอาจทำให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤติมีค่าที่ต่ำลงหรือสูงขึ้นกว่ากรณีที่ไม่พิจารณาผลกระทบของปลายยื่นซึ่งขึ้นอยู่กับความยาวของปลายยื่น และเมื่อความยาวของปลายยื่นเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลต่อการดิ่งรั้งของอิลาสติกคาเป็นผลให้ไม่สามารถหาสถานะสมดุลในบางช่วงของความยาวส่วนโค้งได้ในบางกรณี ในส่วนของผลกระทบของจุดรองรับแบบสปริงหมุนซึ่งเป็นไปตามคาดหมายกล่าวคือเมื่อค่าสติเฟนสของสปริงเพิ่มขึ้นเป็นผลให้ระบบมีสติเฟนสเพิ่มขึ้น

**คำสำคัญ:** อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ การแอ่นตัวมาก น้ำหนักบรรทุกตัวเอง ระเบียบวิธียิงเป้า

<b>Thesis</b>	Effects of Overhanging Portion on the Variable-Arc-Length Elastica Subjected to Uniform Self-Weight
<b>Name – Surname</b>	Mr. Sarun Chumklad
<b>Program</b>	Civil Engineering
<b>Thesis Advisor</b>	Assistant Professor Boonchai Phungpaingam, Ph.D.
<b>Academic Year</b>	2017

## ABSTRACT

This research study aimed to investigate the effect of overhanging portion of the variable-arc-length elastica subjected to uniform self-weight on the large deflection behavior of elastica. One end of the elastica is attached on the rotational spring support, while the other end is placed on the frictionless support. The overhanging portion is proportional to the span-length of the elastica.

The set of governing differential equations can be established by considering the equilibrium of the elastica, the moment-curvature relationship, and the geometric relations. Subsequently, the shooting method is utilized to compute the numerical results of the problem. The overhanging portions of the length  $0.25L$ ,  $0.50L$  and  $0.75L$  will be studied. In addition, the stiffness of the spring joint can be varied be from zero to infinity to investigate the effect of the stiffness of the spring joint.

The results from the computation have been analysed by using the load-deflection diagrams and equilibrium shapes of the elastica. From the results, it is found that the length of the overhanging portion affects the behavior of the elastica depending on the length of overhanging portion. The critical load can be lower or higher than that of VAL elastica without the effect of overhanging portion. When the length of overhanging portion becomes large enough, the pulling effect of the overhanging portion may be dominated. This results in no equilibrium state for some cases. In the case of effect of the spring support, the increase of the stiffness of the rotational spring leads to the increase of the stiffness of the system as expected.

**Keywords:** Variable-arc-length elastica, Large deflection, Uniform self-weight, Shooting method

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้จัดทำวิทยานิพนธ์ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่เสียสละเวลาส่วนตัว ให้ความกรุณาชี้แนะ ให้คำแนะนำ ให้การแนะนำในการแก้ไขปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นและติดตามการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ นับแต่เริ่มต้นจนกระทั่งสำเร็จสมบูรณ์ ขอขอบพระคุณท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิกเขต ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.จตุพล ตั้งปกาศิต กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ จากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่กรุณาเสียสละเวลาร่วมเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล จากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่กรุณารับเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่ ในการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ของงานวิจัย รวมทั้งเสียสละเวลาร่วมเป็นกรรมการสอบในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ สำนักงานทางหลวงที่ 5 (พิษณุโลก) กรมทางหลวง กระทรวงคมนาคม ที่ให้โอกาสในการลาศึกษาต่อในการศึกษาครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ และมอบความดีทั้งหมดนี้ให้แก่ บิดามารดา ครอบครัวข้าพเจ้า คณะครูอาจารย์ที่ให้การสนับสนุนและประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทุกท่าน และเพื่อนๆ MCE 56 ตลอดจนเพื่อนๆ CVE52411 ทุกคนที่เป็นกำลังใจ

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่า วิทยานิพนธ์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้สนใจหากวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้มีข้อผิดพลาด หรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้

ศรัณย์ ชุ่มกักัด

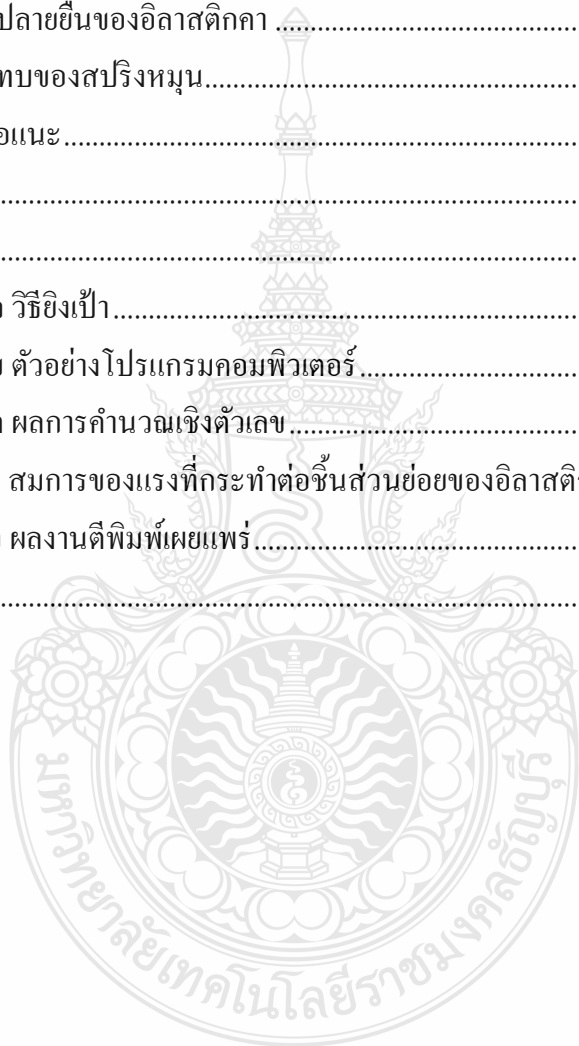
## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	(3)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	(4)
กิตติกรรมประกาศ.....	(5)
สารบัญ.....	(6)
สารบัญตาราง.....	(8)
สารบัญรูป.....	(10)
บทที่ 1 บทนำ.....	13
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	13
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	15
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	15
1.4 ขั้นตอนการวิจัย.....	16
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	16
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	17
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	18
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	21
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	26
3.1 สมมติฐานในการวิเคราะห์.....	26
3.2 สมการครอบคลุมปัญหา.....	27
3.3 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions).....	31
3.4 ขั้นตอนการหาคำตอบ.....	32
บทที่ 4 ผลการศึกษา.....	34
4.1 ผลจากการคำนวณค่า $\beta = 0.25$ .....	34
4.2 ผลจากการคำนวณค่า $\beta = 0.50$ .....	47
4.3 ผลจากการคำนวณค่า $\beta = 0.75$ .....	59
4.4 ผลจากการคำนวณเปรียบเทียบระหว่าง ผลของปลายยื่นและไม่มีปลายยื่น.....	74



## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ .....	83
5.1 ผลของปลายยื่นของอิลาสติกคา .....	83
5.2 ผลกระทบของสปริงหมุน.....	83
5.3 ข้อเสนอแนะ.....	84
บรรณานุกรม .....	85
ภาคผนวก.....	88
ภาคผนวก ก วิธียิงเป้า.....	89
ภาคผนวก ข ตัวอย่างโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	92
ภาคผนวก ค ผลการคำนวณเชิงตัวเลข.....	103
ภาคผนวก ง สมการของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาที่รับแรงกระทำ .....	122
ภาคผนวก จ ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่.....	125
ประวัติผู้เขียน.....	141



## สารบัญตาราง

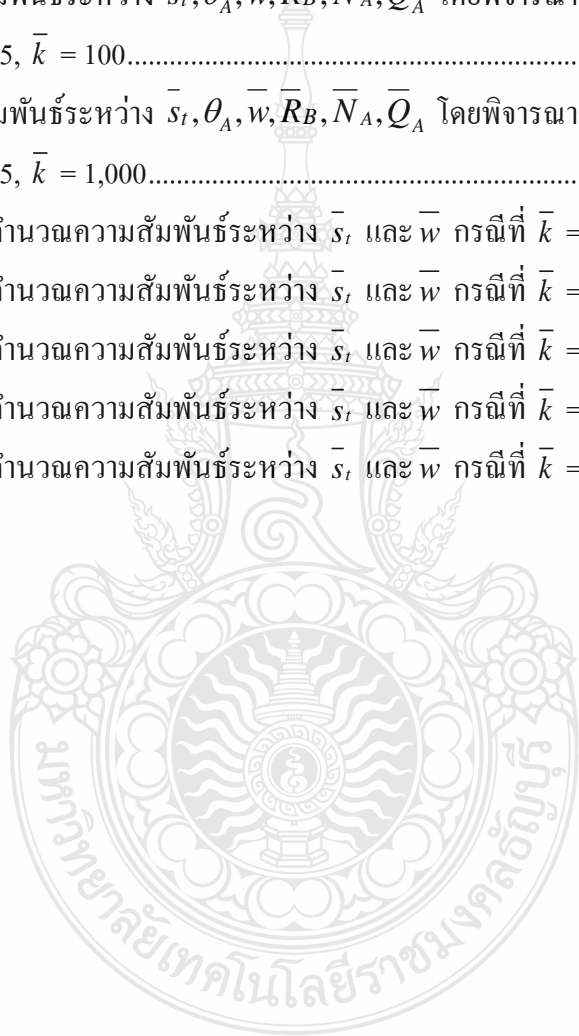
หน้า

ตารางที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.25, \bar{k} = 0$ .....	35
ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.25, \bar{k} = 5$ .....	37
ตารางที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.25, \bar{k} = 10$ .....	39
ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.25, \bar{k} = 100$ .....	41
ตารางที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.25, \bar{k} = 1,000$ .....	43
ตารางที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.50, \bar{k} = 0$ .....	47
ตารางที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.50, \bar{k} = 5$ .....	49
ตารางที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.50, \bar{k} = 10$ .....	51
ตารางที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.50, \bar{k} = 100$ .....	53
ตารางที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.50, \bar{k} = 1,000$ .....	55
ตารางที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.75, \bar{k} = 0$ .....	59
ตารางที่ 4.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.75, \bar{k} = 5$ .....	62

## สารบัญตาราง (ต่อ)

หน้า

ตารางที่ 4.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.75, \bar{k} = 10$ .....	64
ตารางที่ 4.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.75, \bar{k} = 100$ .....	67
ตารางที่ 4.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ โดยพิจารณาค่าคงที่ $\beta = 0.75, \bar{k} = 1,000$ .....	70
ตารางที่ 4.16 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 0$ .....	74
ตารางที่ 4.17 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 5$ .....	76
ตารางที่ 4.18 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 10$ .....	78
ตารางที่ 4.19 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 100$ .....	79
ตารางที่ 4.20 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_t$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 1,000$ .....	81



## สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 อิลาสติกคาเมื่อมีน้ำหนักมากระทำ.....	18
รูปที่ 2.2 พิจารณาความสัมพันธ์ ส่วนโค้ง $ds$ และมุม $\theta$ .....	18
รูปที่ 3.1 แบบจำลองอิลาสติกคาช่วงเดียวปลายยื่นภายใต้น้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอก่อนเสียรูป .....	27
รูปที่ 3.2 แบบจำลองอิลาสติกคาช่วงเดียวปลายยื่นภายใต้น้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอ เมื่อเกิดการเสียรูป .....	28
รูปที่ 3.3 สมดุลแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา .....	28
รูปที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต.....	29
รูปที่ 3.5 แสดงจุดต่างๆในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต .....	31
รูปที่ 3.6 กระบวนการคำนวณโดยวิธียิงเป้า .....	33
รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 0$ .....	35
รูปที่ 4.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 0$ .....	36
รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 5$ .....	37
รูปที่ 4.4 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 5$ .....	38
รูปที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 10$ .....	39
รูปที่ 4.6 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 10$ .....	40
รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 100$ .....	41
รูปที่ 4.8 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 100$ .....	42
รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 1,000$ , $\bar{k} = \infty$ .....	43
รูปที่ 4.10 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.25$ และ $\bar{k} = 1,000$ .....	44
รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.25$ .....	45
รูปที่ 4.12 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 0$ .....	48
รูปที่ 4.13 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 0$ .....	48
รูปที่ 4.14 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 5$ .....	50
รูปที่ 4.15 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 5$ .....	50
รูปที่ 4.16 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 10$ .....	52



## สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 4.17 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 10$ .....	52
รูปที่ 4.18 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 100$ .....	54
รูปที่ 4.19 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 100$ .....	54
รูปที่ 4.20 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 1,000$ $\bar{k} =$ อนันต์ .....	56
รูปที่ 4.21 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.50$ และ $\bar{k} = 1,000$ .....	56
รูปที่ 4.22 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.50$ .....	57
รูปที่ 4.23 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 0$ .....	60
รูปที่ 4.24 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 0$ .....	60
รูปที่ 4.25 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 5$ .....	62
รูปที่ 4.26 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 5$ .....	63
รูปที่ 4.27 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 10$ .....	65
รูปที่ 4.28 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 10$ .....	65
รูปที่ 4.29 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 100$ .....	68
รูปที่ 4.30 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 100$ .....	68
รูปที่ 4.31 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 1,000$ $\bar{k} =$ อนันต์ .....	71
รูปที่ 4.32 รูปร่างของฮิสโตแกรมที่ได้จากการคำนวณ $\beta = 0.75$ และ $\bar{k} = 1,000$ .....	71
รูปที่ 4.33 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ .....	72
รูปที่ 4.34 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง $\beta = 0.75$ ความยาว $\bar{s}_i = 1.00 - 1.02$ .....	73
รูปที่ 4.35 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_i$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 0$ .....	75
รูปที่ 4.36 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_i$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 5$ .....	76

## สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.37 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_r$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 10$ .....	78
รูปที่ 4.38 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_r$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 100$ .....	80
รูปที่ 4.39 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}_r$ และ $\bar{w}$ กรณีที่ $\bar{k} = 1,000$ .....	81



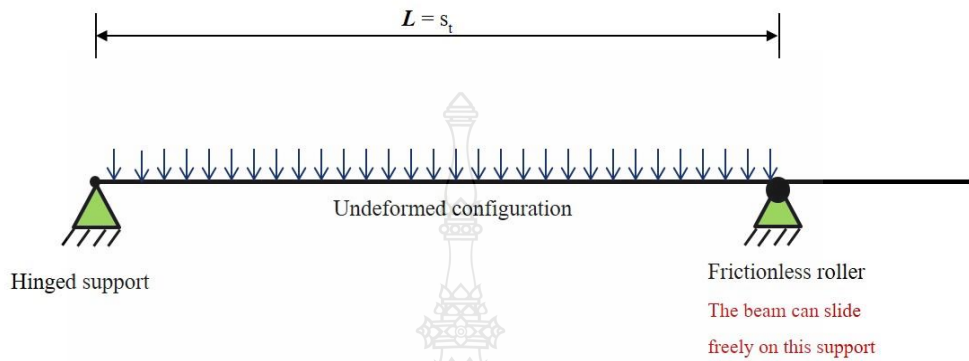
# บทที่ 1

## บทนำ

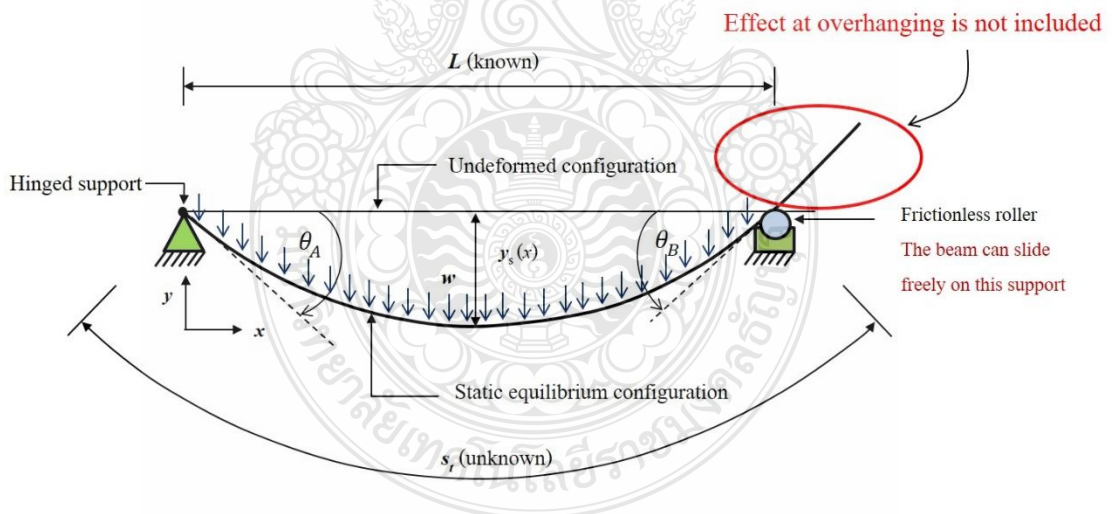
### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยธรรมชาติแล้วเป็นปัญหาในลักษณะที่อิลาสติกคาแอนตัวได้มากแต่ถ้าความเครียดที่เกิดขึ้นมีน้อย ในกรณีที่มีการแอนตัวของอิลาสติกคามีค่าน้อย โดยทั่วไปนิยมใช้ทฤษฎีการค้ำเบื่องตัน จะนำไปสู่สมการอนุพันธ์เชิงเส้นสามารถหาคำตอบแบบแม่นยำตรง (Exact solution) ได้ง่าย ดังนั้นทฤษฎีการค้ำเบื่องตันจะให้คำตอบที่ถูกต้องใกล้เคียงความจริงเมื่อเกิดการแอนตัวมีค่าน้อย แต่ในบางกรณี การแอนตัวสามารถเกิดขึ้นได้มากโดยที่อิลาสติกคานั้นยังมีคุณสมบัติอยู่ในช่วงอิลาสติก (Elastic) จึงทำให้สมการทฤษฎีการค้ำเบื่องตันไม่สามารถให้คำตอบที่ใกล้เคียงความจริงได้ โดยมี Chucheeepsakul and Huang [1] เป็นผู้เสนอนำเสนอ แบบจำลองอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ เป็นครั้งแรก โดยมีลักษณะพิเศษที่ปลายด้านหนึ่งสามารถเลื่อนเข้าได้อย่างอิสระ ทำให้เกิดความยาวช่วงจูดรองรับถึงจูดรองรับเท่าเดิม แต่อิลาสติกคามีความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น และต่อมากการแอนตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวางในรูปแบบต่างๆ [2-19] งานวิจัยผลของการสั่นที่มีต่อโครงสร้างอิลาสติกคา [20]งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับขนส่งใต้ทะเลเกี่ยวกับผลกระทบของไหลในท่อ [21-22] ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มีความละเอียดสูง โดยจำลองจูดรองรับแบบยึดหมุนเปรียบเสมือนปลายของท่อส่งยึดกับแท่นขุดเจาะ และจูดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานเปรียบเสมือนปลายด้านที่อยู่บนเรือ เช่น การค้ำของท่อส่งน้ำมันในทะเล การเคลื่อนตัวมากของท่อขุดเจาะ เป็นต้น ปัญหาเช่นนี้มักจะถูกมองว่าเป็นปัญหาแบบอิลาสติกคา (Elastic) หรือการแอนตัวมากปัจจุบันการแก้ปัญหาเหล่านี้นิยมกระทำใน 3 วิธีหลัก คือ ระเบียบวิธีอีลิปติกอินทิกรัล (Elliptic integral method), ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) โดยวิธีการแรกเชิงวิเคราะห์ให้คำตอบในรูปแบบปิด (Closed form solution) จะให้ผลลัพธ์แบบแม่นยำตรง (Exact solution) มีปัญหาไม่ซับซ้อนมาก ในส่วนของสองวิธีการหลังให้คำตอบในเชิงตัวเลข (Numerical method) จะไม่สามารถให้คำตอบที่เป็นรูปแบบปิดได้ ข้อดีของวิธีเชิงวิเคราะห์คือ คำตอบรูปแบบปิดจะแสดงถึงพฤติกรรมการแอนตัวมากของอิลาสติกคาและให้ผลลัพธ์แบบแม่นยำตรง ส่วนวิธีเชิงตัวเลขสามารถใช้วิเคราะห์การแอนตัวมากของอิลาสติกคาได้ทุกสภาพการรับน้ำหนักบรรทุก

การรับน้ำหนักบรรทุกที่ซับซ้อน นิยมใช้ระเบียบวิธีตัวเลขเป็นส่วนใหญ่ [7] ลักษณะอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length, VAL) นั้น จะมีความยาวช่วงที่คงที่ แต่จะมีความยาวส่วนโค้งไม่คงที่ ดังในรูปที่ (1.1) และ (1.2)



รูปที่ 1.1 อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ก่อนการเสียรูป



รูปที่ 1.2 อิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ หลังการเสียรูป



ในอดีตที่ผ่านมิงานวิจัยการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length, VAL) เป็นจำนวนมาก [1-22] และที่ผ่านมามีไม่ได้นำผลของส่วนปลายที่ยื่นมาพิจารณาด้วย สำหรับงานวิจัยนี้นำผลส่วนปลายที่ยื่นมาวิเคราะห์รวมด้วย โดยมีจุดรองรับทางด้านหนึ่งแบบสปริงหมุน และจุดรองรับอีกด้านหนึ่งแบบไร้แรงเสียดทาน มีระยะจากจุดรองรับถึงจุดรองรับคงที่ แต่ความยาวส่วนโค้งไม่คงที่ โดยมีน้ำหนักบรรทุกทุกตัวเองแผ่แบบกระจายสม่ำเสมอ (Uniformly distributed self weight) และทำการหาผลเฉลยของสมการไร้เชิงเส้น โดยระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta method)

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาพฤติกรรมของการแอ่นตัวมากและเสถียรภาพของอิลาสติกคาช่วงเดี่ยวยปลายยื่นที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยพิจารณาผลของการยึดรั้งที่จุดหมุน และผลกระทบของปลายยื่น

1.2.2 เพื่อศึกษาสถานะน้ำหนักบรรทุกทุกวิถี (ถ้ามี) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอ

## 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วงเดี่ยวยปลายยื่นที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้สภาวะรับน้ำหนักบรรทุกตัวเองโดยใช้ระเบียบวิธียิงเป้าในการหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยมีขอบเขตในการวิเคราะห์ดังนี้

1.3.1 แบบจำลองในการวิเคราะห์เป็นแบบสองมิติที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบจุดยึดสปริงหมุน ส่วนอีกด้านเป็นแบบจุดรองรับไร้แรงเสียดทาน อิลาสติกคาสามารถเลื่อนผ่านจุดรองรับได้อย่างอิสระ

1.3.2 วิเคราะห์น้ำหนักแบบบรรทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอ

1.3.3 ค่าสตีเฟนสของสปริง กำหนดที่ 0 5 10 100 1,000 และ อนันต์

1.3.4 กำหนดปลายยื่นระยะที่ 0.25 0.50 และ 0.75 โดยเป็นสัดส่วนกับความยาวช่วง

1.3.5 การพิจารณาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาเป็นแบบแอ่นตัวมากแต่ความเครียดมีค่าน้อย

1.3.6 คุณสมบัติวัสดุของอิลาสติกคาเป็นไปตามกฎของฮุก (Hooke's law)

## 1.4 ขั้นตอนการวิจัย

1.4.1 ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วงเดี่ยวปลายยื่นที่มีตัวแปรความยาวส่วนโค้ง แปรเปลี่ยนได้ โดยที่ผลของส่วนปลายที่ยื่น ได้ถูกนำมาพิจารณาด้วย

1.4.2 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.4.3 ศึกษาระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีรุงง-คุดตา (Runge-Kutta method)

1.4.4 เขียนสมการครอบคลุมของปัญหา (Governing equation) และกำหนดขอบเขตเงื่อนไขที่เหมาะสมในการหาคำตอบ (Boundary condition)

1.4.5 เขียนโปรแกรมและหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB

1.4.6 สรุปผลการศึกษา

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ทราบถึงผลกระทบของปลายยื่นและผลกระทบของจูดรองรับแบบสปริงหมุน

1.5.2 ทราบถึงพฤติกรรมของการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีปลายยื่น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอ

## บทที่ 2

### ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

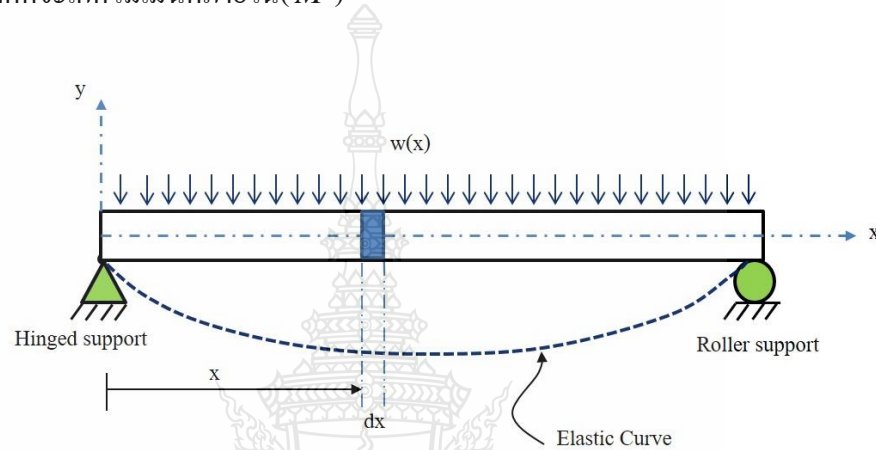
งานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วงเดียวปลายยื่นที่ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่วางอยู่บนจตุรรองรับสองจุด มีระยะห่างระหว่างจตุรรองรับทั้งสองคงที่ โดยมีจตุรรองรับปลายด้านหนึ่งเป็นแบบสปริงหมุน และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นแบบไร้แรงเสียดทาน อิลาสติกคาสามารถเลื่อนไหลผ่านจตุรรองรับได้อย่างอิสระ โดยนำส่วนของปลายยื่นมาวิเคราะห์รวมด้วย โดยมีน้ำหนักบรรทุกทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอเมื่ออิลาสติกคารับน้ำหนักบรรทุกดังกล่าว เกิดการแอ่นตัวมากทำให้ความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกคาเพิ่มขึ้น และจัดเป็นปัญหาทางอิลาสติกคา (Elastica) ที่น่าสนใจปัญหาหนึ่ง เนื่องจากปัญหาในลักษณะนี้มีสมการครอบคลุมปัญหา (Governing equation) ที่มีความไร้เชิงเส้น (Non-linear) สูง โดยทั่วไปวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะนี้สามารถกระทำได้ด้วย 3 วิธีหลัก ดังนี้

1. วิธีอีลิปติกอินทิกรัล (Elliptic integral method)
2. วิธียิงเป้า (Shooting method)
3. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method)

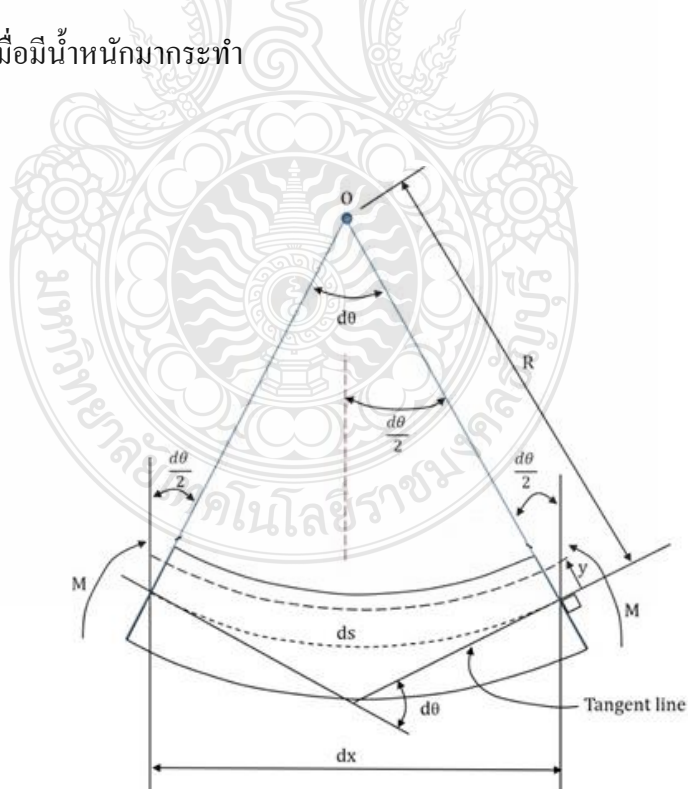
โดยวิธีการแรกเชิงวิเคราะห์ให้คำตอบในรูปแบบปิด ในส่วนของสองวิธีการหลังให้คำตอบในเชิงตัวเลขจะไม่สามารถให้คำตอบที่เป็นรูปแบบปิดได้ ข้อดีของวิธีเชิงวิเคราะห์คือ คำตอบรูปแบบปิดจะแสดงถึงพฤติกรรมของการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาและให้ผลลัพธ์แบบแม่นยำ สามารถให้คำตอบที่มีปัญหาซับซ้อนไม่มากนัก ส่วนวิธีเชิงตัวเลขสามารถใช้วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาได้ทุกสภาพการรับน้ำหนักบรรทุก ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาเพื่อใช้ในทางปฏิบัติ มีสภาพการรับน้ำหนักบรรทุกที่ซับซ้อน นิยมใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นส่วนใหญ่ ในการทำวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method) และในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

## 2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เมื่อพิจารณารูป 2.1 และ 2.2 เมื่ออิลาสติกคาร์รับน้ำหนักจะเกิดการโก่งตัวที่เรียกว่าเส้นโค้งอิลาสติก (Elastic curve) โดยค่าการโก่งตัวที่จุดต่างๆ จะมากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติความแข็งแรงของหน้าตัดในการต้านทานแรงคดที่เรียกว่า ความแข็งแรงต่อการคด (Flexural rigidity) หรือ  $EI$  เมื่อพิจารณาส่วนโค้งสั้นๆ  $ds$  (วัดตามแกนสะเทิน) หรือชิ้นส่วนสั้นๆ  $dx$  (ความยาวตามแนวราบ) ที่หน้าตัดจะเกิดโมเมนต์ภายใน ( $M$ )



รูปที่ 2.1 อิลาสติกคาเมื่อมีน้ำหนักมากกระทำ



รูปที่ 2.2 พิจารณาความสัมพันธ์ ส่วนโค้ง  $ds$  และมุม  $\theta$

โดย  $\theta$  = มุมลาดที่จุดใดๆบนเส้นโค้งยืดหยุ่น (Elastic curve)  
 $d\theta$  = ค่าการเปลี่ยนแปลงของมุมลาด ของชิ้นส่วนความยาว  $dx$   
 $M$  = โมเมนต์ ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด  
 $R$  = รัศมีความโค้ง (Radius of curvature) ของโค้ง  $ds$   
 $EI$  = ความแข็งแกร่งต่อการดัด (Flexural rigidity) ของหน้าตัด

จากรูป 2.2 ค่าความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ดัดและความโค้ง (Moment curvature relationship)

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \quad (2.1)$$

ค่ามุมลาด ที่แกนสะเทิน (Neutral axis)

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (2.2)$$

$$\theta = \tan^{-1} \theta \frac{dy}{dx} \quad (2.3)$$

เนื่องจาก  $\theta$  และ  $s$  มีความสัมพันธ์กับ  $x$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left( \tan^{-1} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds} \quad (2.4)$$

ความยาวส่วนโค้งของอีลาสติคคา

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.7)$$

$$\frac{dx}{ds} \left( \tan^{-1} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d}{dx} \left( \tan^{-1} \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = \left( \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \right) \left( \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (2.10)$$

จากสมการที่ 2.10 จะได้ สมการอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้นที่อธิบายการแอ่นตัวของอิลาสติกคา

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \quad (2.11)$$

สมการที่ 2.11 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไร้เชิงเส้น (Nonlinear second order differential equation) โดยทั่วไปแล้วค่าการโก่งตัว (Deflection) ของอิลาสติกคาจะถูกจำกัดให้มีค่า

น้อยมากๆ และพจน์ของ  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \approx 0$  จะได้

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2.12)$$

## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้การรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบต่างๆ พบได้ในงานวิจัย ดังนี้

### 2.3.1 การเสนอแบบจำลองอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

Chucheepsakul และ Huang [1] ได้ศึกษาอิลาสติกคาที่มีลักษณะมีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจตุรกรรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุน และอีกด้านหนึ่งเป็นจตุรกรรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยการสร้างฟังก์ชันนำพลังงานขึ้นมา โดยมีโมเมนต์ เป็นแรงกระทำ หาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

### 2.3.2 การจำลองความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในรูปแบบต่างๆ

สมเจตน์ อยู่สุนิห [2] ได้ศึกษาการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์เพื่อหาค่าการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่วางอยู่บนจตุรกรรับสองจุดที่มีระยะห่างคงที่ โดยมีจตุรกรรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุน และอีกปลายอีกด้านหนึ่งพาดอยู่บนจตุรกรรับแบบไร้แรงเสียดทาน รับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบกระทำเป็นจุด ตัวเองแบบแผ่สม่ำเสมอ และแบบมีโมเมนต์ทั้งสองด้านจตุรกรรับ หาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เปรียบเทียบกับวิธีอิลิปติกอินทิกรัล พบว่าให้ค่าใกล้เคียงกันมาก

สุรพันธ์ บุญเจริญ [3] ได้ทำการ ศึกษาวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ จตุรกรรับสองจุดมีระยะห่างคงที่ โดยมีจตุรกรรับด้านหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นแบบยึดหมุน ปลายอิลาสติกคาอีกด้านหนึ่งพาดอยู่บนจตุรกรรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยทำการทดสอบ 3 กรณี ได้แก่ 1.รับน้ำหนักกระทำแบบจุดบริเวณกลางอิลาสติกคา 2.แบบมีโมเมนต์เพียงหนึ่งด้าน 3.แบบมีโมเมนต์คดทั้งสองด้าน หาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล เปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลปรากฏว่ามีความสอดคล้องกันดี

จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ [4] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ จตุรกรรับทั้งสองจุดมีระยะห่างคงที่ จตุรกรรับด้านหนึ่งของอิลาสติกคาเป็นแบบยึดหมุน ปลายอิลาสติกคาอีกด้านหนึ่งพาดอยู่บนจตุรกรรับแบบไร้แรงเสียดทาน ได้ทำการทดสอบ 4 กรณี ได้แก่ 1.น้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุดที่ตำแหน่งใดๆ 2.โมเมนต์คดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม 3.โมเมนต์คดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางตรงกันข้าม และมีน้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุดกระทำที่ตำแหน่งใดๆ 4.โมเมนต์คดกระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน หาผลเฉลยด้วย วิธีอิลิปติกอินทิกรัล

He และคณะ [5] ได้ศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ จูดรองรับทั้งสองจุดมีระยะห่างคงที่ โดยจูดรองรับด้านหนึ่งเป็นสปริง และจูดรองรับอีกด้านหนึ่งมีแรงเสียดทาน โดยกำหนดค่าของสปริงอยู่ที่ 0.25 0.50 และ 0.75 ส่วนจูดรองรับที่มีแรงเสียดทานได้ กำหนดแรงเสียดทานไว้ที่ 0 0.1 0.2 0.3 0.4 และ 0.5 ได้ทำการหาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล

Wang และคณะ [6] ได้ศึกษาการความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยแบ่งออกเป็น 4 ลักษณะได้แก่ 1. ลักษณะอิลาสติกคายีนมีแรงกระทำที่ปลายแบบติดตาม 2. อิลาสติกคาช่วงเดียวมีแรงกระทำที่ปลายแบบติดตาม 3. อิลาสติกคาช่วงเดียวมีแรงกระทำที่ปลายแบบติดตามมีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ 4. จูดรองรับด้านหนึ่งเป็นสปริงและจูดรองรับอีกด้านหนึ่งมีแรงเสียดทาน มีแรงกระทำที่ปลายแบบติดตาม ละใช้ค่า  $k = 0$  1 10 และ  $10^4$  หาผลเฉลยโดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล

สุนิสรา รอดสังวาลย์ [7] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยแบ่งเป็น 2 กรณี 1. ลักษณะอิลาสติกคาต่อเนื่อง ต่างระดับกัน 2. ลักษณะอิลาสติกคาช่วงเดียว ที่มีจูดรองรับมีระยะคงที่ มีจูดรองรับด้านหนึ่งเป็นสปริงหมุน และอีกด้านหนึ่งเป็นแบบไร้แรงเสียดทาน โดยศึกษาแรงที่มากกระทำแบ่งเป็น 3 กรณี 1. น้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุดกระทำบริเวณกึ่งกลาง 2. น้ำหนักบรรทุกทุกแบบแผ่สม่ำเสมอ 3. โมเมนต์กระทำทั้งสองปลายในทิศทางเดียวกัน หาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

กอบประชัย ศิริตระกูลมั่ง [8] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ เป็น 3 กรณี 1. อิลาสติกคาช่วงเดียว โดยที่จูดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุนและจูดรองรับอีกด้านหนึ่งมีแรงเสียด โดยไม่มีแรง น้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุด น้ำหนักบรรทุกกระจายแบบสม่ำเสมอ โมเมนต์ที่จูดรองรับทั้งสองแบบทิศทางเดียวกันและคนละทิศทาง 2. อิลาสติกคาช่วงเดียวที่มีจูดรองรับแบบสปริงหมุนและปลายอีกด้านหนึ่งแบบมีแรงเสียดทาน โดยมีแรงกระทำแบบจุดกึ่งกลาง โมเมนต์ที่จูดรองรับทั้งสองแบบทิศทางเดียวกันและคนละทิศทาง 3. แบบอิลาสติกคายีนยึดแน่นและปลายอิสระ โดยเปรียบเทียบผลกับ [2] โดยหาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ระบบพิกัดลากรางจ์เทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ระบบพิกัดออยเลอร์

Chucheepsakal และ Phungpaingam [9] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ทำการหาสมการในรูปแบบปิด เมื่อให้แรงกระทำแบบเป็นจุด แรงกระทำนั้นเอียงและติดตามการเสี้ยวรูปของอิลาสติกคา โดยทำการเปรียบเทียบกับแรงที่ไม่ได้เอียงตามลักษณะของอิลาสติกคา โดยที่ระยะตามแนวแกน  $x$  ที่  $\beta = 0.25$  0.50 และ 0.75 โดยหาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล



Zhang และ Yang [10] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดรองรับด้านหนึ่งแบบยึดแน่น และอีกด้านหนึ่งแบบยึดหมุน แบบเลื่อนได้อิสระ มีแรงที่กระทำเป็นแบบจุด โดยมีระยะห่างจากจุดรองรับที่  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  หาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล

นฤพนธ์ ศิลาภากุล [11] ได้ศึกษาวัสดุที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยใช้สมการลูควิก (Ludwick) มาใช้  $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon^{1/n}$  มาประยุกต์ใช้ กับอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำแบบจุดที่ตำแหน่งใดๆ แรงกระทำที่ปลายอิลาสติคคาโดยมีทิศทางตามการเสี้ยวรูป โดยกำหนดค่า  $n = 0 - 2.0$  หาผลเฉลยวิธีการยิงเป้าและการอินทิเกรตโดยใช้วิธีรุงเง-คุดตา เมื่อค่า  $n$  สูงกว่าจะมีการโก่งตัวสูงสุดและความยาวของส่วนโค้งมากกว่าอิลาสติคคาที่ขนาดของ  $n$  ต่ำกว่าเสมอ

Athisakul และ Chuchepsakul [12] ได้ศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ภายใต้การรับน้ำหนักบรรทุกตัวเองแบบแผ่กระจายตลอดความยาวส่วนโค้ง โดยที่จุดรองรับทั้งสองด้านต่างระดับกัน หาคำตอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้า จากการวิเคราะห์ผลพบว่า การยกหรือลดระดับของจุดรองรับมีผลต่อค่าน้ำหนักตัวเองแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอ เมื่อยกระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน ค่าน้ำหนักตัวเองแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติที่มีค่าเพิ่มขึ้น หากลดระดับจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทานค่าน้ำหนักตัวเองแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอ ณ สภาวะวิกฤติที่มีค่าลดลง

Plaut และคณะ [13] ได้ทำการศึกษาอิลาสติคคาช่วงเดียวปลายยื่นที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยให้จุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่น และจุดรองรับอีกด้านหนึ่งมีแรงเสียดทาน โดยมีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ โดยหาความสัมพันธ์ของมุมที่จุดรองรับและแรงเสียดทาน รวมถึงระยะความยาวส่วนโค้งที่เปลี่ยนไป

Athisakul และคณะ [14] ได้ทำการศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดย มีน้ำหนักแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอกระทำ ที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุน อีกด้านหนึ่งเป็นแบบไร้แรงเสียดทาน โดยอาศัยสมการลูควิก (Ludwick)  $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon^{1/n}$  โดยได้กำหนดค่า  $n = 1$   $2$   $3$  และ  $4$  สังเกตความสัมพันธ์ของมุมที่เปลี่ยนไป น้ำหนัก และการโก่งตัว หาผลเฉลยด้วยวิธียิงเป้า

Humer [15] ได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่น และอีกด้านหนึ่งเป็นแบบไร้แรงเสียดทาน โดยหาความยาวส่วนโค้งที่เพิ่มขึ้น ระยะการโก่งตัว หาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล

Pulngern และคณะ [16] ได้ศึกษาอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้มีลักษณะโค้งวงกลม โดยให้แรงกระทำที่ปลายแบบติดตามการเสีรูป ที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุน อีกด้านหนึ่งเป็นแบบไร้แรงเสียดทาน หาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้า

Phungpaingam และคณะ [17] ได้ศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยที่จุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดหมุน และอีกด้านหนึ่งเป็นแบบมีแรงเสียดทาน โดยการเพิ่มโมเมนต์ที่จุดรองรับแบบหมุน จนเกิดการเสีรูป หาผลเฉลยด้วยวิธียิงเป้า

ณัฐ พิชัยยุทธ์ และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม [18] ได้ทำการศึกษากองเดาะของอิลาสติคคาโดยเสาเป็นลักษณะที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ใส่จุดหมุนที่เป็นสปริงลงไปในช่วงโดยกำหนดระยะสปริง ที่ 0.25 0.50 0.75 และค่าสตีเฟนของสปริง โดยนำผลลัพธ์จากทางทฤษฎีนำไปเปรียบเทียบกับผลทดสอบตัวอย่างกรณีวัสดุเป็นเชิงเส้นโดยใช้วัสดุแผ่นโพลีคาร์บอเนต หาผลเฉลยด้วยวิธียิงเป้า ปรากฏว่าเสานั้นได้เกิดการโค้งเดาะถึง 2 ครั้ง ผลที่ได้จากการคำนวณและผลจากการทดสอบมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

Phungpaingam และ Chucheeesakul [19] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมหลังการโค้งเดาะ โดยมีอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ยึดด้วยสปริงภายในอิลาสติคคา โดยมีปลายด้านหนึ่งแบบยึดหมุน และอีกด้านหนึ่งแบบไร้แรงเสียดทาน โดยมีแรงกระทำที่ปลายด้านไร้แรงเสียดทาน หาผลเฉลยด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้า โดยกำหนดจุดที่มีสปริง ห่างจากจุดรองรับแบบหมุนเป็นระยะ  $\alpha L = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  และมีค่าสปริง  $\beta = 0, 1, 5, 10, 100$  และ  $1,000$  โดยรวมผลกระทบของ Configurational force

### 2.3.3 การศึกษาผลของการสั้นที่มีต่อโครงสร้างอิลาสติคคา

Pulngern และคณะ [20] ได้ศึกษาและทดลอง เปรียบเทียบ การแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดรองรับด้านหนึ่งแบบยึดหมุน และจุดรองรับอีกด้านหนึ่งยกขึ้นต่างระดับและมีแรงเสียดทาน โดยใส่การสั้นสะเทือนและวิเคราะห์รูปร่างที่เปลี่ยนไป หาผลเฉลยโดยวิธีวิธีไฟไนต์เอลเมนต์

### 2.3.4 และการศึกษาผลกระทบของของไหลภายในท่อ

Chucheeesakul และ Monprapussorn [21] ได้ศึกษาการขนส่งของไหลในท่อโดยจำลองเป็นลักษณะอิลาสติคคาช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยที่จุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบสปริงและจุดรองรับอีกด้านหนึ่งมีแรงเสียดทาน หาผลเฉลยด้วยวิธียิงเป้าและวิธีไฟไนต์เอลเมนต์

Athisakul และคณะ [22] ได้ทำการศึกษาการขนส่งของไหลในท่อ โดยได้จำลองเป็นอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีน้ำหนักแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ และมีโมเมนต์ในทิศทางเดียวกัน ทั้งสองปลาย โดยมีจุดรองรับด้านหนึ่งแบบยึดหมุน และอีกด้านหนึ่งแบบไร้แรงเสียดทาน ทำการหาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

งานวิจัยที่ผ่านนั้นมีวิธีการหาผลเฉลย 3 วิธีหลัก คือ ระเบียบวิธีอีลิปติกอินทิกรัล (Elliptic integral method) ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) โดยมีการเปลี่ยนแปลงจุดรองรับ การเพิ่มความถี่ให้แก่จุดรองรับที่มีการเลื่อนไหลแรงที่มากกระทำกับอิลาสติกคา แบบจุด แบบมีโมเมนต์คดที่จุดรองรับ และแบบน้ำหนักบรรทุกตัวเอง มีระบบสมการที่แตกต่างกันออกไป ในงานวิจัยที่ผ่านมานั้น ไม่ได้นำส่วนปลายยื่นมาพิจารณาด้วย โดยพิจารณาเฉพาะช่วงจุดรองรับถึงจุดรองรับที่มีระยะคงที่ ในงานวิจัยครั้งนี้จึงนำส่วนยื่นที่ปลายมาพิจารณาผลกระทบที่เกิดขึ้น กับอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีลักษณะจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นสปริงหมุน และอีกด้านหนึ่งเป็นจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยมีระยะปลายยื่นเป็นสัดส่วนกับช่วงความยาวระหว่างจุดรองรับถึงจุดรองรับ



## บทที่ 3

### วิธีดำเนินการวิจัย

ปัญหาแบบอีลาสติคคา (Elastica) หรือการแอ่นตัวมากปัจจุบันการแก้ปัญหาเหล่านี้นิยมกระทำใน 3 วิธีหลัก คือ ระเบียบวิธีอินทิกรัล (Elliptic integral method) ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) โดยวิธีการอินทิกรัลให้คำตอบในรูปแบบปิด จะให้ผลลัพธ์แบบแม่นยำตรง ที่มีปัญหาไม่ซับซ้อนมาก ในส่วนของวิธียิงเป้าและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ให้คำตอบในเชิงตัวเลข ไม่สามารถให้คำตอบที่เป็นรูปแบบปิดได้ ข้อดีของวิธีเชิงวิเคราะห์คือ คำตอบรูปแบบปิดจะแสดงถึงพฤติกรรมของการแอ่นตัวมากของอีลาสติคคาและให้ผลลัพธ์แบบแม่นยำตรง ส่วนวิธีเชิงตัวเลขสามารถใช้วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของอีลาสติคคาได้ในสภาพการรับน้ำหนักบรรทุกที่หลากหลาย อาทิเช่น น้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจาย นั้นไม่สามารถหาคำตอบในรูปแบบปิดได้ จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลขในการแก้ไขปัญหา ดังนั้นในงานวิจัยนี้ใช้กระบวนการวิธียิงเป้า (Shooting method) เพื่อหาคำตอบเนื่องจากเป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear) มีน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจาย ในการหาคำตอบของสมการครอบคลุมปัญหารายละเอียดของกระบวนการหาคำตอบ และเงื่อนไขขอบเขตแต่ละปัญหา รายละเอียดการวิเคราะห์โดยวิธีนี้จะกล่าวต่อไป

#### 3.1 สมมติฐานในการวิเคราะห์

สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการแอ่นตัวมากของอีลาสติคคาช่วงเดียวปลายยื่นที่ถูกระงับโดยน้ำหนักบรรทุกตัวเองมีดังนี้

3.1.1 วัสดุมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาวอีลาสติคคา และมีคุณสมบัติทางกายภาพเหมือนกันในทุกทิศทาง

3.1.2 หน้าตัดของอีลาสติคคาเป็นระนาบคงที่ทั้งก่อนและหลังรับแรงกระทำ

3.1.3 การแอ่นตัวมีมาก แต่ความเครียดที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย

3.1.4 ไม่คำนึงถึงผลของแรงบิด

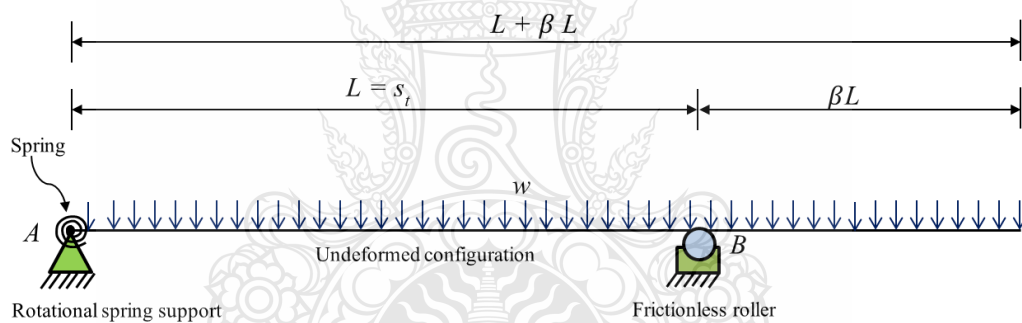
3.1.5 ไม่คำนึงถึงผลของการเสยรูปอันเนื่องมาจากแรงเฉือน

3.1.6 คุณสมบัติของอีลาสติคคาเป็นไปตามกฎของฮุก (Hooke's law)

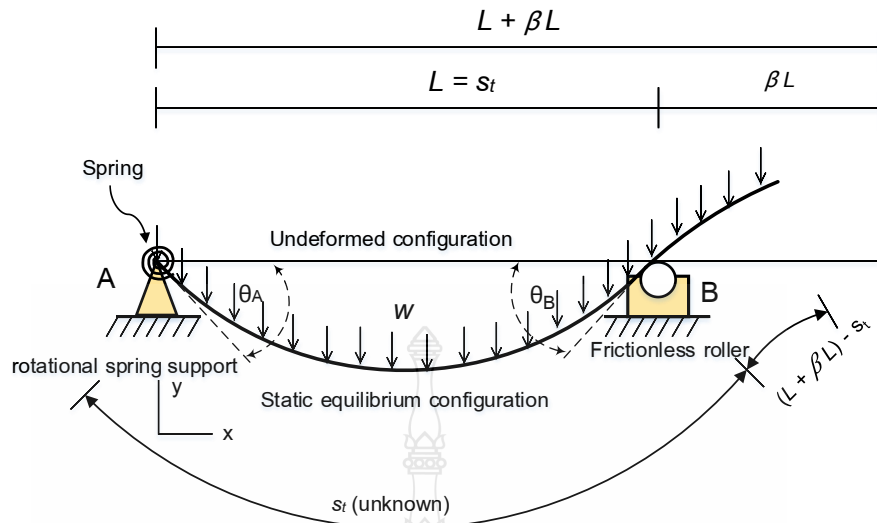
3.1.7 ระยะระหว่างจุดรองรับถึงจุดรองรับคงที่

### 3.2 สมการครอบคลุมปัญหา

สมการครอบคลุมปัญหา (Governing equations) ของการแอ่นตัวมากของอิลาสติกคาช่วง เดียวปลายยื่นที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ เมื่อรับแรงกระทำแสดงในรูปที่ 3.1 มีค่าความ แข็งแรงของวัสดุต่อการดัด (Flexural rigidity) เท่ากับ  $EI$  ปลายด้าน  $A$  มีจุดรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายด้าน  $B$  มีจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน (Frictionless support) โดยที่จุดรองรับทั้งสองห่างกันเป็นระยะ  $L$  ส่วนบริเวณปลายยื่นห่างจากจุดรองรับเป็นระยะ  $\beta L$  โดยเป็นสัดส่วนกับ ความยาวช่วงจุดรองรับถึงจุดรองรับ จะได้ความยาวของอิลาสติกคา  $L + \beta L$  อิลาสติกคามีน้ำหนัก บรรทุกตัวเองกระจายสม่ำเสมอ ( $w$ ) และเมื่ออิลาสติกคารับแรงจะเกิดการแอ่นตัวที่มีความยาวส่วน โคงทั้งหมดเป็น  $L + \beta L$  แสดงในรูปที่ 3.2 การสร้างสมการครอบคลุมปัญหาจะพิจารณาจากชิ้น ส่วนย่อยของอิลาสติกคาซึ่งมีความยาวส่วนโค้ง  $ds$  และอยู่ในสภาวะสมดุลของแรงต่างๆ ดังแสดงใน รูปที่ 3.3

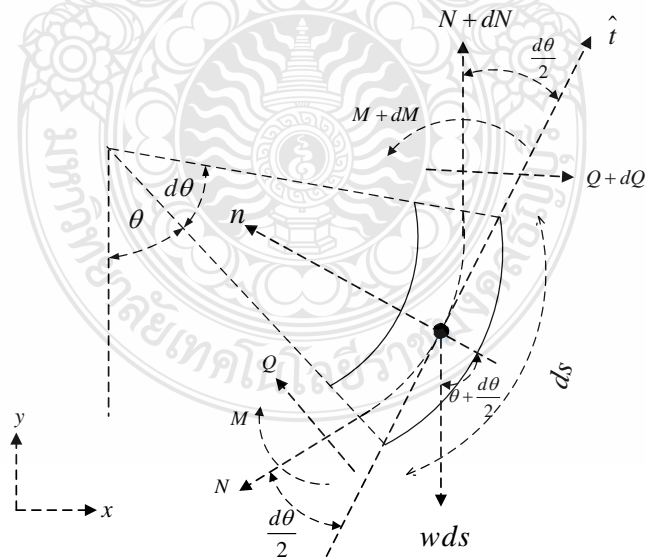


รูปที่ 3.1 แบบจำลองอิลาสติกคาช่วงเดียวปลายยื่นภายใต้น้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอก่อนเสียรูป



รูปที่ 3.2 แบบจำลองอิลาสติกคาช่วงเดี่ยวย่นภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกสม่ำเสมอเมื่อเกิดการเสียรูป

เมื่ออิลาสติกคารับน้ำหนักก็จะเกิดการโก่งตัวที่เรียกว่าเส้นโค้งอิลาสติก (Elastic curve) เมื่อพิจารณาสมดุลในแนวเส้นสัมผัสเส้นโค้งอิลาสติกผ่านแนวแกนสะเทินของอิลาสติกคา (Tangential direction) และในแนวตั้งฉากกับเส้นสัมผัส (Normal direction) จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการสมดุลแรงของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคาดังภาพที่ 3.3



รูปที่ 3.3 สมดุลแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา

เมื่อ

$\theta$  = มุมลาดที่จุดใดๆบนเส้นโค้งอีลาสติก (Elastic Curve)

$d\theta$  = ค่าการเปลี่ยนแปลงของมุมลาด ของชิ้นส่วนความยาว

$M$  = โมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด

$Q$  = แรงเฉือน

$N$  = แรงตามแนวแกน

$w$  = น้ำหนักบรรทุกทุกแบบสม่ำเสมอ

$ds$  = ความยาวส่วนโค้ง (วัดตามแกนสะเทิน)

สมการสมดุลในระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local coordinate system) (ภาคผนวก ง)

ผลรวมของแรงในแนวแกนสะเทินของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติก ( $\sum F_t = 0$ ) เป็นดังนี้

$$\frac{dN}{ds} = -Q \frac{d\theta}{ds} + w \sin \theta \quad (3.1)$$

ผลรวมของแรงในแนวตั้งฉากกับแกนสะเทินของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติก ( $\sum F_n = 0$ ) เป็นดังนี้

$$\frac{dQ}{ds} = N \frac{d\theta}{ds} - w \cos \theta \quad (3.2)$$

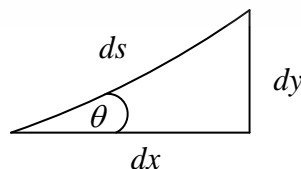
ผลรวมของโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติก ( $\sum M = 0$ ) เป็นดังนี้

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (3.3)$$

จากรูปที่ 3.3 พฤติกรรมการคดของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติก สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์คดกับความยาวส่วนโค้ง (Moment curvature) ของชิ้นส่วนย่อยอีลาสติกได้ดังนี้

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \quad (3.4)$$

และจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต (Geometric relations) จะได้



รูปที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (3.5)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (3.6)$$

จะได้สมการที่ครอบคลุมปัญหาทั้งหมดรวมหมด 6 สมการ ประกอบด้วย สมการสมดุลในระบบพิกัดเฉพาะที่ (รูปที่ 3.3) จำนวน 3 สมการ ได้แก่สมการที่ (3.1) (3.2) และ (3.3) ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ตัดกับค่าความโค้ง (Moment curvature) สมการที่(3.4) และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต (Geometric relations) ดังแสดงในรูปที่ 3.5 จำนวน 2 สมการ ได้แก่สมการที่ (3.5) และ (3.6) รวมทั้งหมด 6 สมการ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจึงได้จัดสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ ดังนี้

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (3.7)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (3.8)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{s}} = \bar{M} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\bar{M}}{d\bar{s}} = \bar{Q} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{d\bar{s}} = \bar{N} \frac{d\theta}{ds} - \bar{w} \cos \theta \quad (3.11)$$

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{s}} = -\bar{Q} \frac{d\theta}{ds} + \bar{w} \sin \theta \quad (3.12)$$

โดยที่

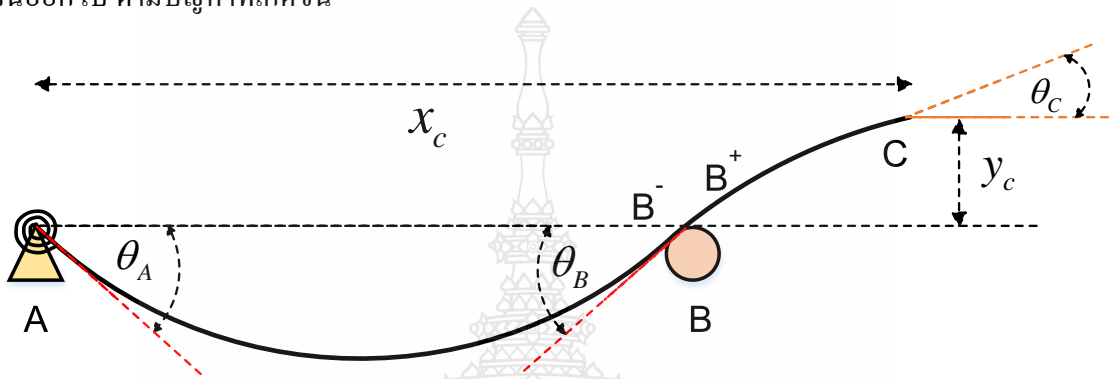
$$\bar{s}_i = \frac{s_i}{L}, \quad \bar{s} = \frac{s}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \quad (3.13 \text{ a-d})$$

$$\bar{w} = \frac{wL^3}{EI}, \quad \bar{M} = \frac{ML}{EI}, \quad \bar{N} = \frac{NL^2}{EI}, \quad \bar{Q} = \frac{QL^2}{EI} \quad (3.14 \text{ a-d})$$



### 3.3 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)

ในกระบวนการหาผลเฉลยของระเบียบวิธียิงเป้านั้น จะต้องทราบค่าเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้น 2 จุด ก่อน คือ จุดรองรับด้านซ้าย (A) และจุดรองรับด้านขวา (B) จึงสามารถหาคำตอบของสมการครอบคลุมปัญหาได้ อีลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ เกิดการแอ่นตัวมาก จุดรองรับทางด้านซ้าย (A) และจุดรองรับทางด้านขวา (B) โดยแต่ละประเภทรูปนั้นก็จะมีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกันออกไป ตามปัญหาที่เกิดขึ้น



รูปที่ 3.5 แสดงจุดต่างๆในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

ที่จุด A มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 0$ )

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{M}_A = k\theta_A, \theta = \theta_A, \bar{Q} = \bar{Q}_A, \bar{N} = \bar{N}_A \quad (3.15 \text{ a-f})$$

ที่จุด B<sup>-</sup> มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_l$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \theta = \theta_B, \bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)}, \bar{N} = \bar{N}_B \quad (3.16 \text{ a-f})$$

ที่จุด B<sup>+</sup> มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_l$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \theta = \theta_B, \bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)} + \bar{R}_B, \bar{N} = \bar{N}_B \quad (3.17 \text{ a-f})$$

ที่จุด C มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 1 + \beta$ )

$$\bar{x} = \bar{x}_C, \bar{y} = \bar{y}_C, \bar{M} = 0, \theta = \theta_C, \bar{Q} = 0, \bar{N} = 0 \quad (3.18 \text{ a-f})$$

โดยที่  $\bar{R}_B$  คือแรงปฏิกิริยาที่จุด B

### 3.4 ขั้นตอนการหาคำตอบ

ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม MATLAB

3.3.1 ทำการป้อนค่าความยาวส่วนโค้ง ( $\bar{s}_t$ ) ค่าสถิติเฟนสของสปริง ( $\bar{k}$ ) และค่าสัดส่วนที่สัมพันธ์กับความยาวช่วง ( $\beta$ )

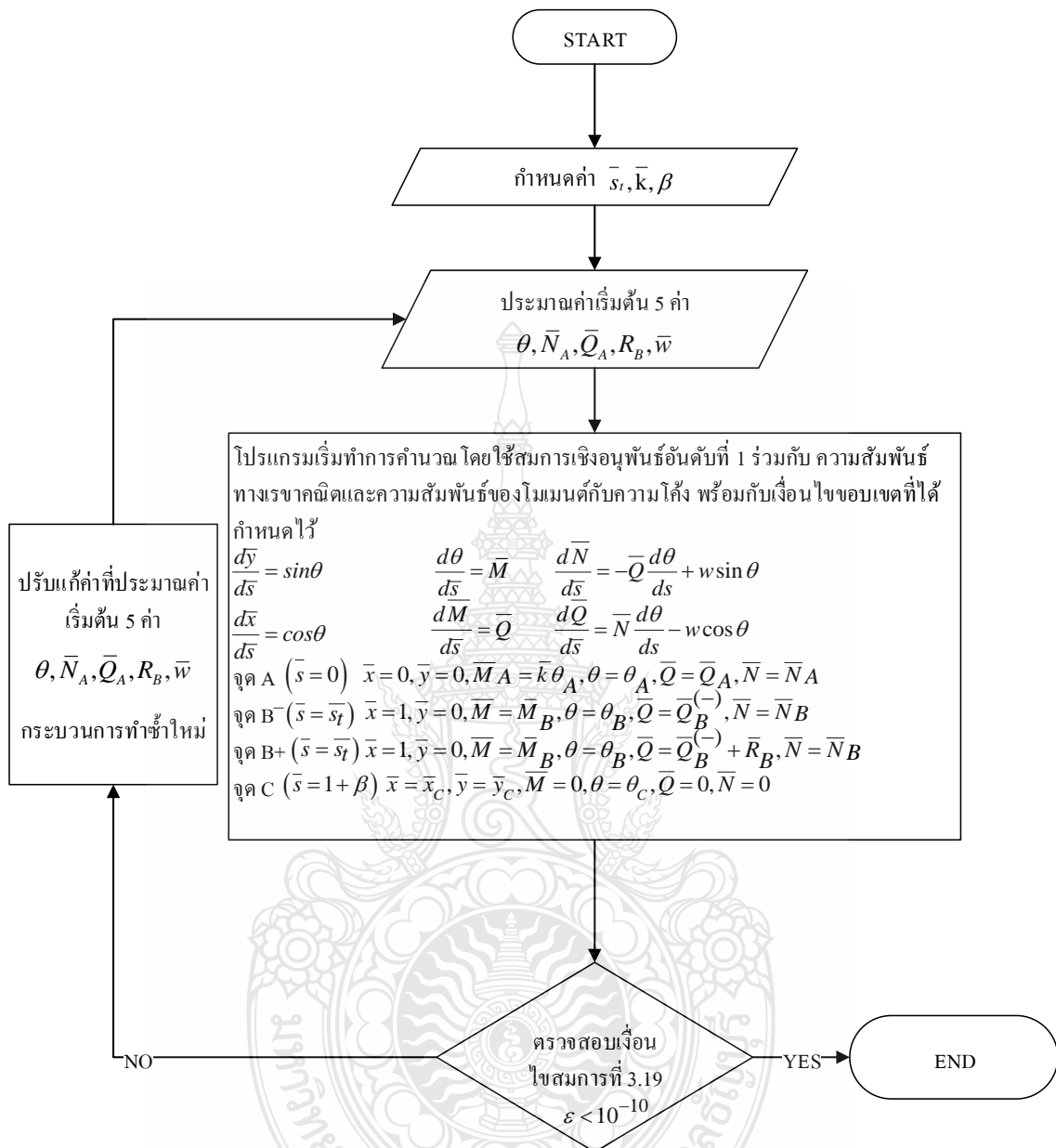
3.3.2 ทำการประมาณค่าเริ่มต้นให้แก่ค่า  $\theta$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{N}_A$  และ  $\bar{Q}_A$

3.3.3 หาคำตอบด้วยสมการครอบคลุมปัญหา(3.7) (3.8) (3.9) (3.10) (3.11) และ (3.12) โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธี รุงเง-คูดตา โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายดั่งสมการที่ (3.19)

$$\underset{\theta, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A}{\text{Min}} = \{|\bar{x}(\bar{s}_t) - 1| + |\bar{y}(\bar{s}_t)| + |\bar{N}(1 + \beta)| + |\bar{Q}(1 + \beta)| + |\bar{M}(1 + \beta)| \quad (3.19)$$

3.3.4 ปรับแก้ค่าที่ได้ทำการประมาณไว้ในขั้นตอนที่ 3.3.2 โดยกระบวนการทำซ้ำ ด้วยระเบียบวิธี นิวตัน-ราฟสัน (ในโปรแกรม MATLAB ใช้คำสั่ง “fsolve”) จนกว่าจะมีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  ถือว่าเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้





รูปที่ 3.6 กระบวนการคำนวณโดยวิธียิงเป้า

## บทที่ 4

### ผลการศึกษา

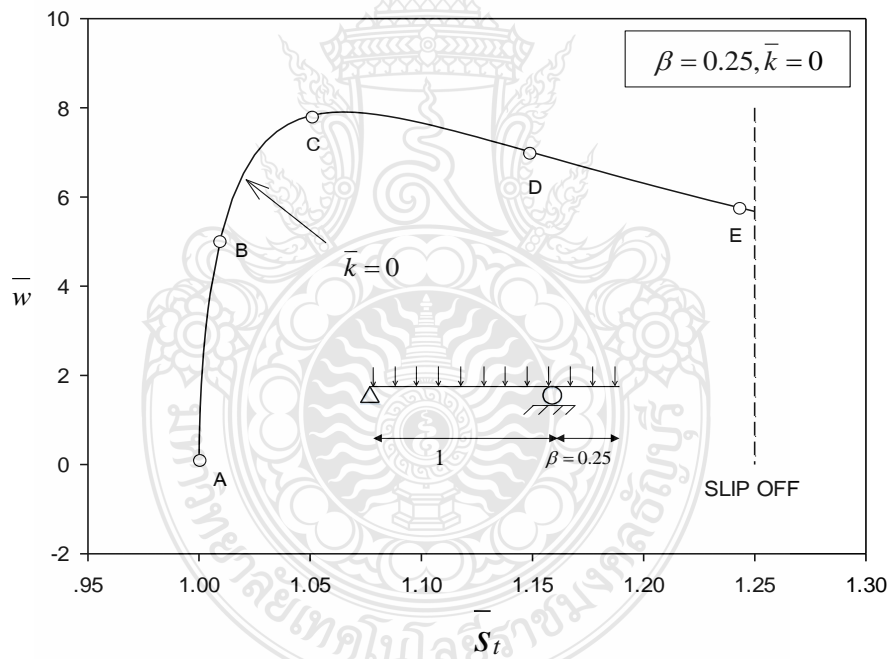
การศึกษาคาร์บอนไดออกไซด์ครั้งนี้เพื่อศึกษาพฤติกรรมหลังการแอ่นตัวของอิลาสติคคาและเสถียรภาพของอิลาสติคคาช่วงเดียวปลายยื่นที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน และปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน วัสดุมีความยืดหยุ่นและมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกตัวกระจายอย่างสม่ำเสมอ ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลขนั้นจะใช้ระเบียบวิธียิงเป้า การหาผลเฉลย แบ่งเป็นการหาค่าตอบระยะปลายยื่น ( $\beta$ ) ที่ 0.25 0.50 และ 0.75 และแปรผันค่าสตีเฟนสของสปริงหมุน ( $\bar{k}$ ) ที่ 0 (แบบหมุน) 5 10 100 1,000 และ อนันต์ (แบบยึดแน่น) แสดงให้เห็นพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติคคา โดยจะนำเสนอในรูปแบบของความสัมพันธ์ ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและการแอ่นตัวมากของอิลาสติคคาในรูปแบบของความยาวส่วนโค้ง ( $\bar{s}_r$ ) นอกจากนี้ จะกล่าวถึงการศึกษาผลกระทบของการแปรผันค่า  $\beta$  และค่าสตีเฟนสของสปริง ดังนี้

#### 4.1 ผลจากการคำนวณค่า $\beta = 0.25$

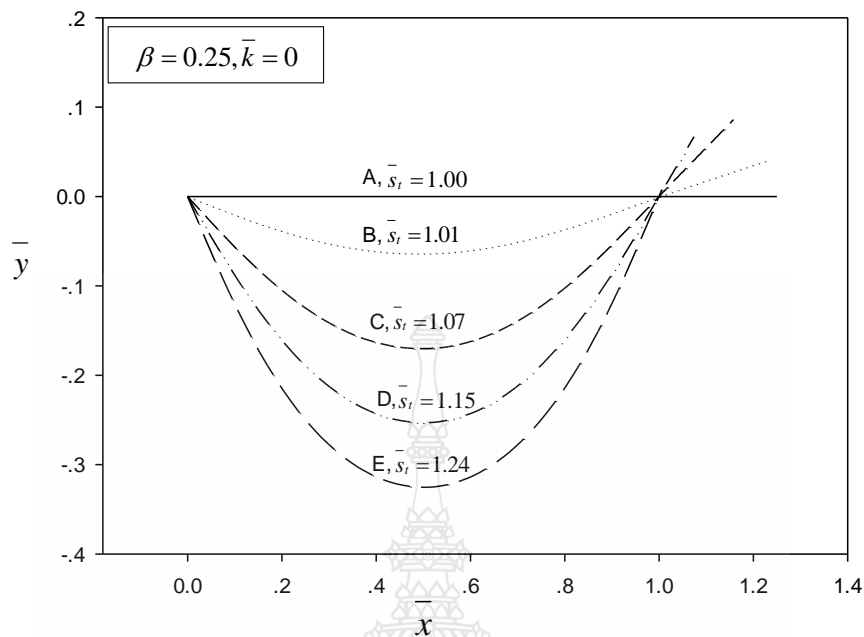
เริ่มต้นการคำนวณหาผลเฉลยและวิเคราะห์รูปร่างของอิลาสติคคา โดยกำหนดค่า  $\beta = 0.25$  แปรผันค่า  $\bar{k} = 0$  5 10 100 1,000 และอนันต์ กำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เป็นค่าหลักที่กำหนด โดยเริ่มจากค่าที่ 1.01 – 1.2499 (ค่าใกล้เคียง 1.25) เนื่องจากที่ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r = 1.25$  เป็นจุดที่อิลาสติคคานั้นหลุดจากจุดรองรับ ซึ่งในการคำนวณได้แบ่งช่วงของการอินทิเกรต สองช่วงคือ ช่วงระหว่างจุดรองรับและช่วงที่มีปลายยื่น หากกำหนดให้ความยาวส่วนโค้งภายในช่วงของจุดรองรับ มีค่ามากกว่า  $1 + \beta$  จะทำให้ความยาวในการคำนวณ ในส่วนของปลายยื่นติดลบ ซึ่งจะไม่สามารถทำการคำนวณต่อไปได้ ส่วนที่เหลืออีก 5 ค่า ทำการป้อนค่าที่ใกล้เคียง ได้แก่ มุมลาดที่จุดรองรับ A ( $\theta_A$ ) น้ำหนักแบบบรรทุกทุกตัวกระจายสม่ำเสมอ ( $\bar{w}$ ) แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B ( $\bar{R}_B$ ) แรงตามแนวแกน ( $\bar{N}_A$ ) และแรงเฉือน ( $\bar{Q}_A$ ) โดยตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน(สมการที่ 3.19) ที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  ถือว่าเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

ตารางที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.20757	5.133468	4.036279	-0.21329	2.54637
1.07	-0.52455	7.897066	6.568442	-0.67885	5.148449
1.10	-0.61641	7.660351	6.588664	-0.64817	5.539197
1.15	-0.73721	6.99799	6.380589	-0.46712	5.825936
1.20	-0.83409	6.308774	6.102567	-0.23336	5.883976
1.24	-0.90033	5.797632	5.878244	-0.04542	5.842013
1.249	-0.91551	5.677936	5.823866	-0.00045	5.82352



รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 0$



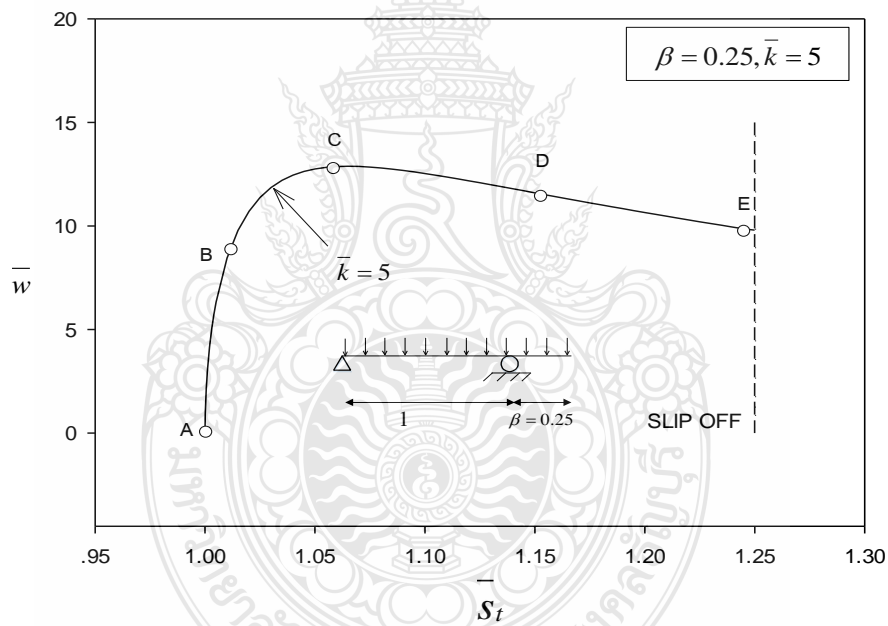
รูปที่ 4.2 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 0$

จากรูปที่ 4.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสตีเฟนของสปริง  $\bar{k} = 0$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.07$  และ  $\bar{w}_{cri} = 7.897$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_r = 1.25$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ เป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

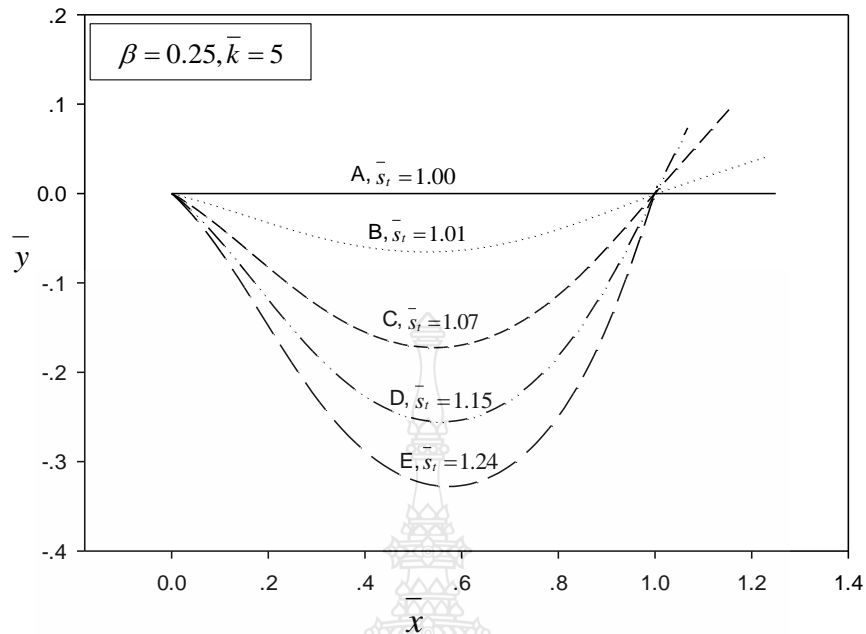
จากรูปที่ 4.2 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.1 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 5 จุด ได้แก่ จุด A ที่จุด  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.07$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.15$  และ ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.24$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจตุรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนของสปริงเพิ่มขึ้นจตุรองรับแบบสปริงหมุนทำให้เกิดความต้านทานมากขึ้น

ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.12666	8.446363	6.01511	-0.56298	4.765123
1.07	-0.29897	12.87067	9.359976	-2.32439	9.232762
1.10	-0.34241	12.53024	9.290091	-2.62945	9.846529
1.15	-0.39494	11.59802	8.92257	-2.80084	10.3143
1.20	-0.43308	10.64614	8.516984	-2.77622	10.45677
1.24	-0.45692	9.945442	8.210173	-2.69485	10.44859



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวมและค่าความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 5$



รูปที่ 4.4 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 5$

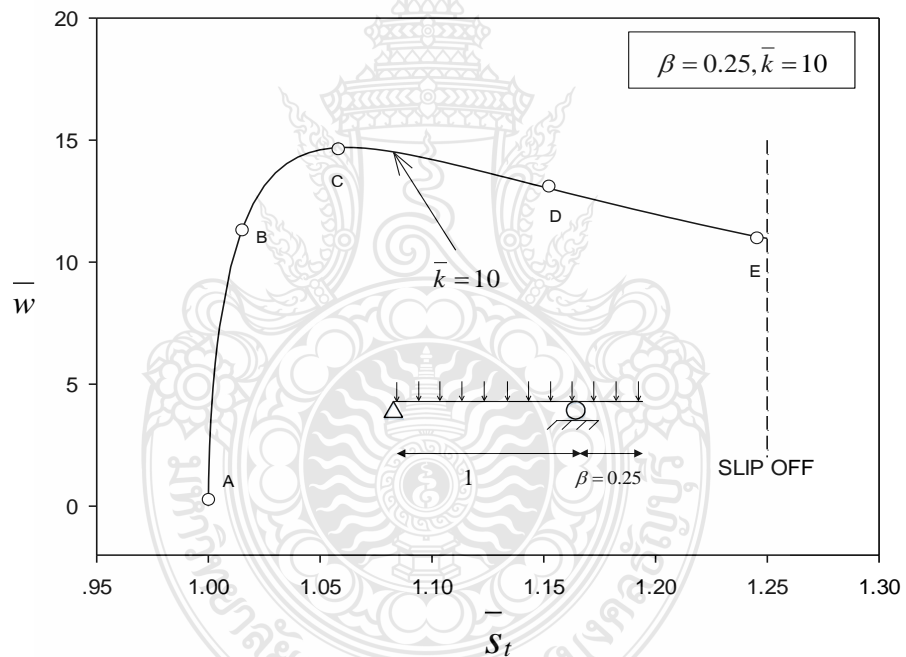
จากรูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสตีเฟนของสปริง  $\bar{k} = 5$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.07$  และ  $\bar{w}_{cri} = 12.870$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_r = 1.25$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ เป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

จากรูปที่ 4.4 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.3 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 5 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.07$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.15$  และ ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.24$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น

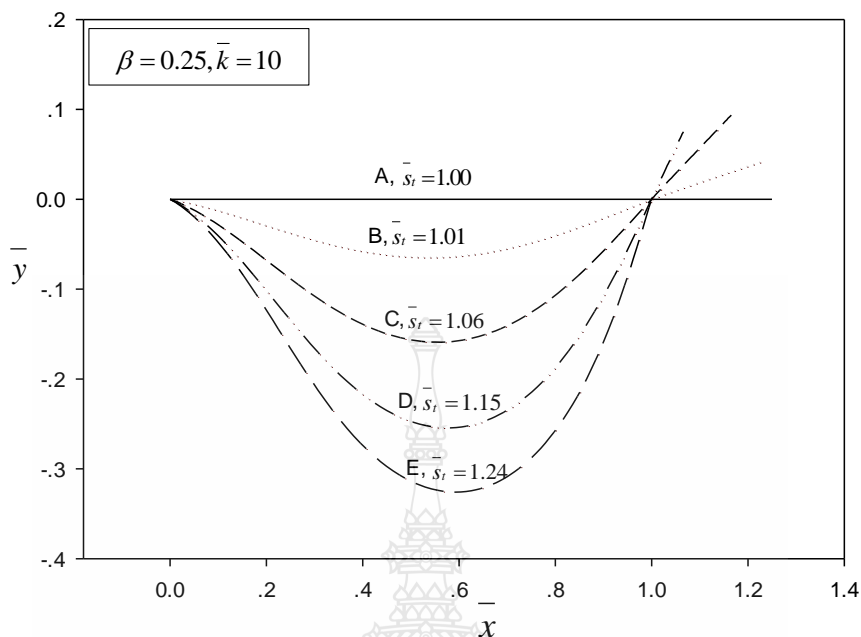


ตารางที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.09026	9.811022	6.823304	-0.83056	5.670954
1.06	-0.19476	14.69823	10.34564	-3.27228	10.25303
1.10	-0.23355	14.2063	10.24541	-4.08072	11.12074
1.15	-0.26558	13.07683	9.789896	-4.50943	11.4826
1.20	-0.28798	11.959	9.32037	-4.64204	11.52627
1.24	-0.30151	11.1447	8.973347	-4.64264	11.44764



รูปที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 10$



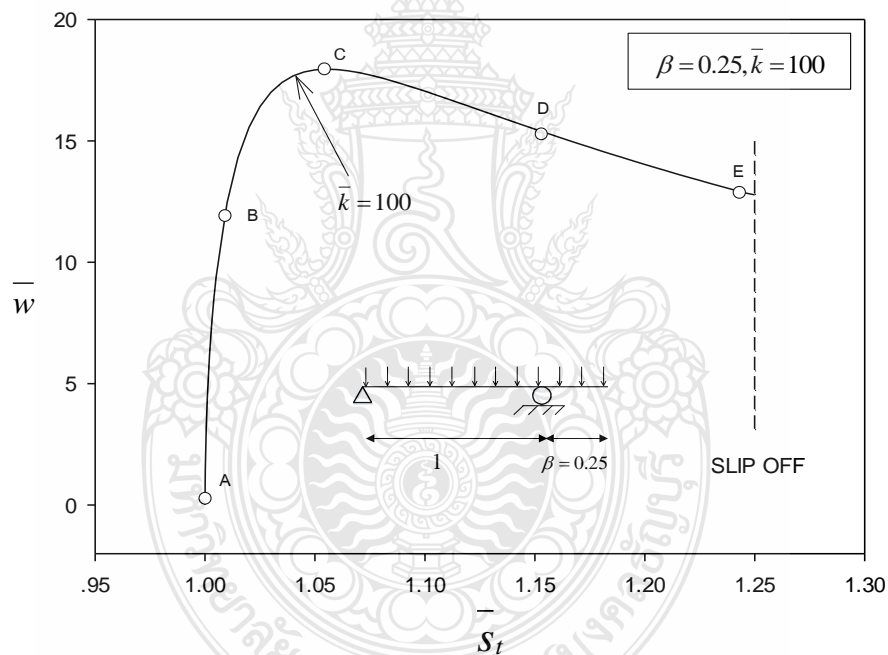
รูปที่ 4.6 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 10$

จากรูปที่ 4.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวม  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสตีเฟนของสปริง  $\bar{k} = 10$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักรวม  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.06$  และ  $\bar{w}_{cri} = 14.698$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักรวม  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_r = 1.25$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

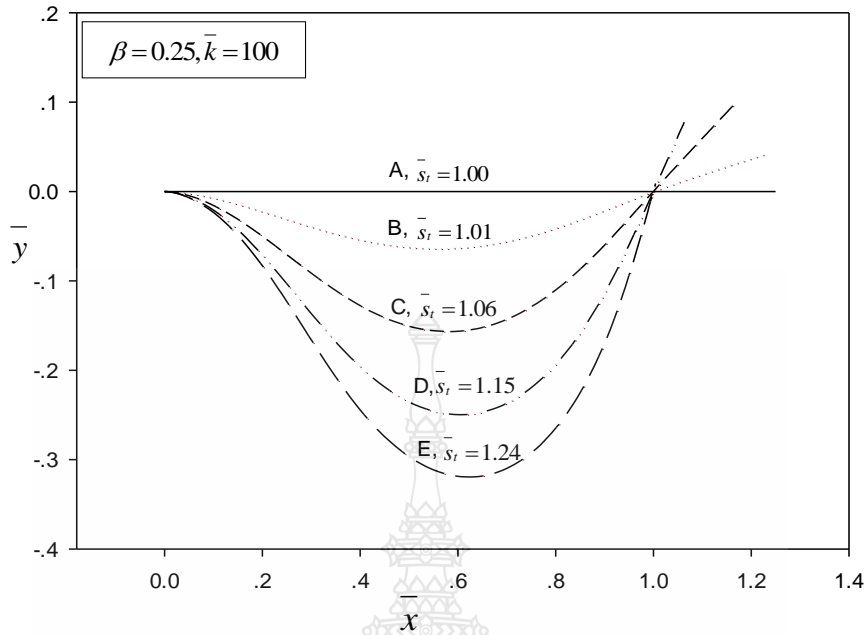
จากรูปที่ 4.6 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.5 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 5 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.06$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.15$  และ ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.24$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น

ตารางที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.01435	12.44354	8.367664	-1.5632	7.378072
1.06	-0.02911	17.93644	12.18279	-5.96659	12.18334
1.10	-0.03388	17.04501	11.88049	-7.41502	12.63723
1.15	-0.03753	15.48422	11.23945	-8.24219	12.56733
1.20	-0.03992	14.02938	10.64138	-8.56406	12.28646
1.24	-0.04127	12.99339	10.21496	-8.6315	12.00582



รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 100$



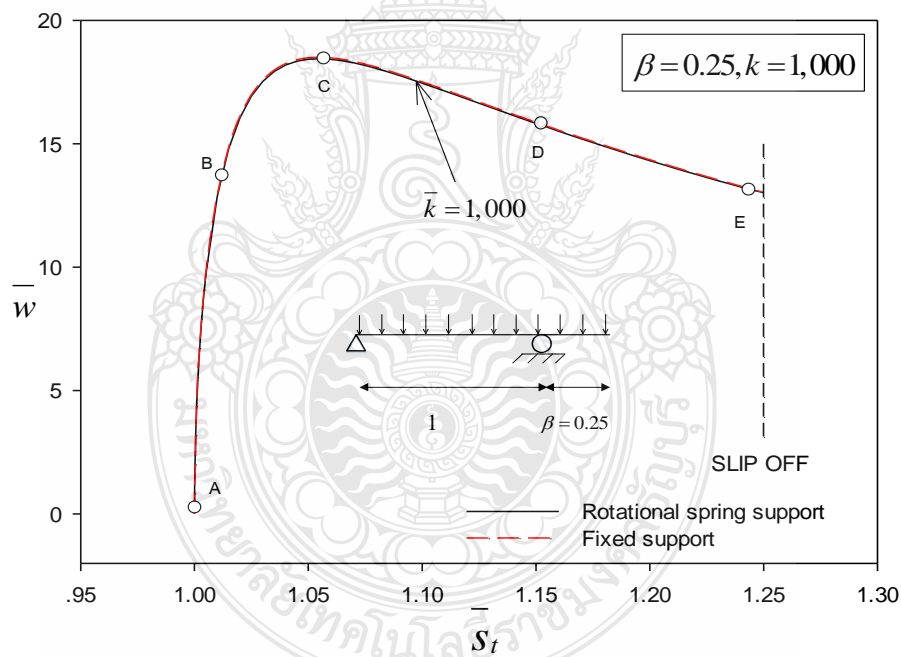
รูปที่ 4.8 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 100$

จากรูปที่ 4.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสตีเฟนสของสปริง  $\bar{k} = 100$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.06$  และ  $\bar{w}_{cri} = 17.936$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอนตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.25$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

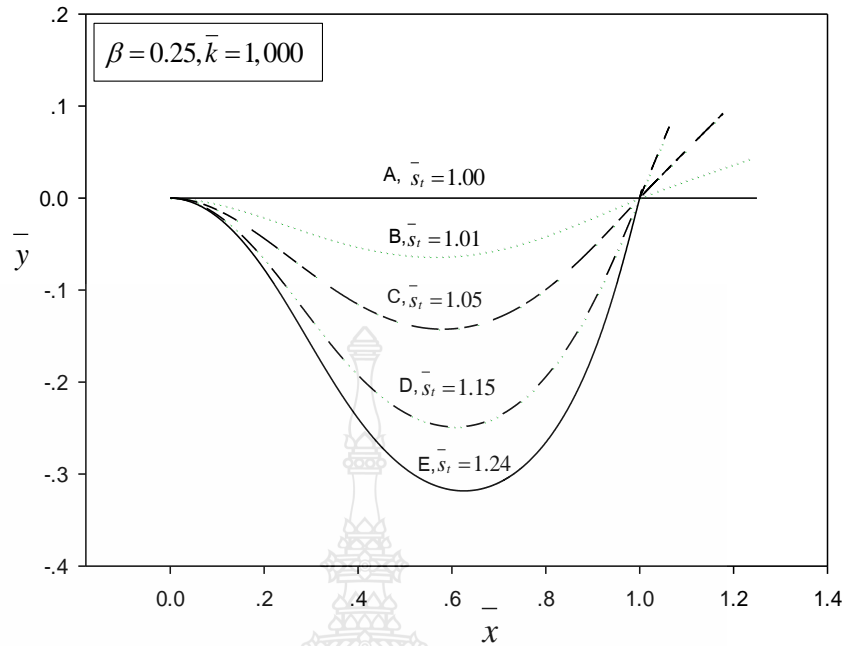
จากรูปที่ 4.8 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.7 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 5 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอนตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.06$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.15$  และ ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.24$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนสของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น

ตารางที่ 4.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.00152	12.86228	8.611168	-1.70677	7.642492
1.05	-0.00288	18.42607	12.40038	-5.84293	12.13068
1.10	-0.00354	17.45814	12.11848	-7.97774	12.7685
1.15	-0.0039	15.82577	11.44656	-8.84633	12.61309
1.20	-0.00414	14.3174	10.82768	-9.17934	12.27406
1.24	-0.00427	13.2471	10.38856	-9.24455	11.96007



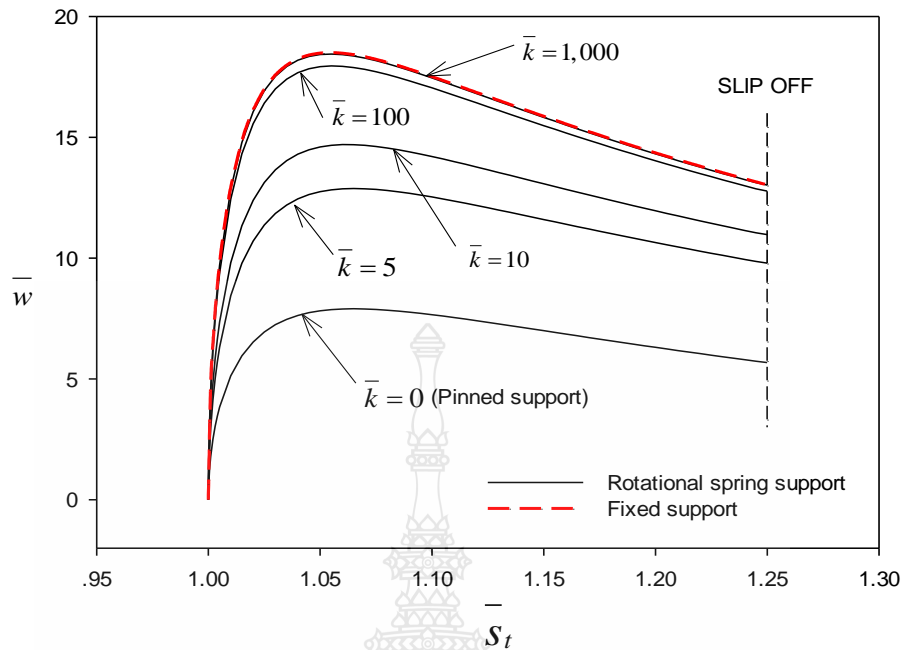
รูปที่ 4.9 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 1,000$ ,  $\bar{k} =$  อนันต์



รูปที่ 4.10 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 1,000$

จากรูปที่ 4.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสติเฟนเนสของสปริง  $\bar{k} = 1,000$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.05$ ,  $\bar{w}_{cri} = 18.426$  และ  $\bar{k} =$  อนันต์ (Fixed support)  $\bar{s}_r = 1.05$ ,  $\bar{w}_{cri} = 18.484$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_r = 1.25$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

จากรูปที่ 4.10 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.9 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 5 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.05$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.15$  และ ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.24$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติเฟนเนสของสปริง เพิ่มขึ้น จุดรองรับแบบสปริงหมุน จะเกิดความต้านทานมากขึ้น



รูปที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25$

ผลการศึกษาคritical value  $\beta = 0.25$  และทำการแปรผันค่า  $\bar{k}$  ตั้งแต่ค่า 0 5 10 100 1,000 และอนันต์ จากรูปที่ 4.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  จากกราฟเห็นได้ว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้น (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อีลาสติกคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด กรณีที่  $\bar{k} = 0, \bar{s}_t = 1.07, \bar{w}_{cri} = 7.897$ , กรณี  $\bar{k} = 5, \bar{s}_t = 1.07, \bar{w}_{cri} = 12.870$ , กรณี  $\bar{k} = 10, \bar{s}_t = 1.0, \bar{w}_{cri} = 14.698$ , กรณี  $\bar{k} = 100, \bar{s}_t = 1.06, \bar{w}_{cri} = 17.936$ , กรณี  $\bar{k} = 1,000, \bar{s}_t = 1.05, \bar{w}_{cri} = 18.426$  และ  $\bar{k} = \infty$  (Fixed support)  $\bar{s}_t = 1.05, \bar{w}_{cri} = 18.484$  จากผลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเมื่อค่า สติฟเนสของสปริงมีค่าเพิ่มขึ้น ส่งผลให้อีลาสติกคามีสติฟเนสเพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุกวิกฤติเพิ่มขึ้นเช่นกัน หลังจากจุดที่ได้รับน้ำหนักสูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.25$  ทำให้อีลาสติกคาลุดออกจากจตุรกรับ เป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

ส่วนรูปร่างสมมูล ในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  (จตุรรองรับแบบหมุน) แสดงในรูปที่ 4.2 และเมื่อแปรผันค่า  $\bar{k}$  ไปที่ 5 10 100 1,000 และ อนันต์ ทำให้จุดหมุนนั้นเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม จากจตุรรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระไปจนกระทั่งเป็นจตุรรองรับแบบยึดแน่น (Fixed support) (ผลการคำนวณ Fixed support ภาคผนวก ค) กล่าวคือมีสติเฟเนสของสปริง เข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้จตุรรองรับ A มีความต้านทานในการรับแรงดัดเพิ่มมากขึ้น เมื่อให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุกมากขึ้นตามไปด้วย รูปร่างของอิลาสติกาเปลี่ยนไปตามค่าสติเฟเนสของสปริง ดังแสดงในรูปที่ 4.4 4.6 4.8 และ 4.10



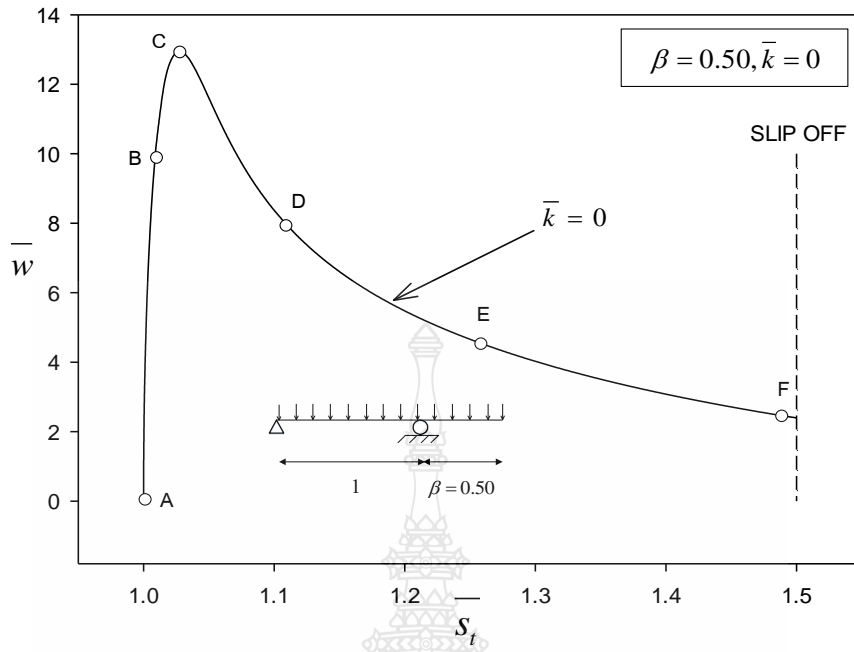


#### 4.2 ผลจากการคำนวณค่า $\beta = 0.50$

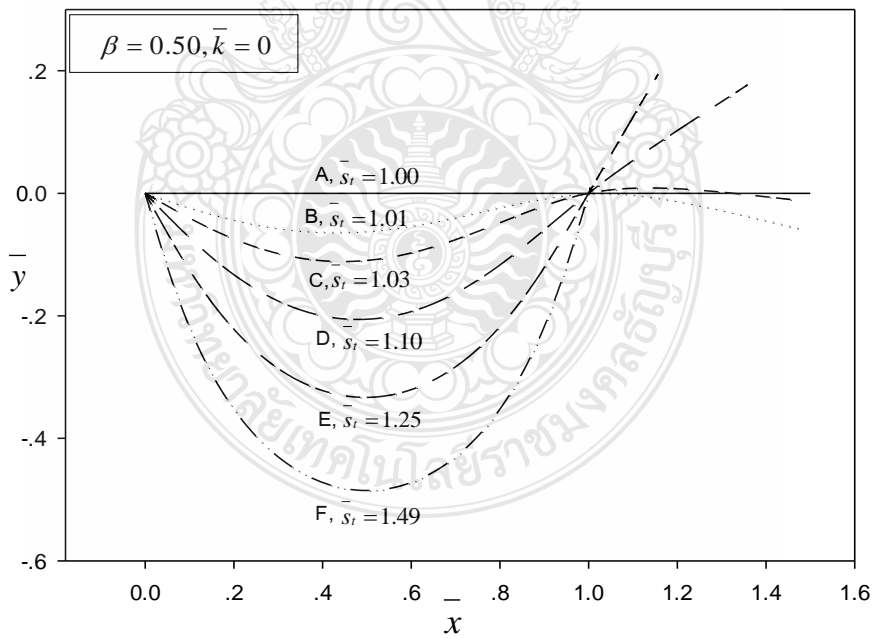
เริ่มต้นการคำนวณหาผลเฉลยและวิเคราะห์รูปร่างของอีลาสติคคา โดยกำหนดค่า  $\beta = 0.50$  แปรผันค่า  $\bar{k} = 0.5, 10, 100, 1,000$  และอนันต์ กำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เป็นค่าหลักที่กำหนด โดยเริ่มจากค่าที่  $1.01 - 1.4999$  (ค่าใกล้เคียง  $1.50$ ) เนื่องจากที่ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t = 1.50$  เป็นจุดที่อีลาสติคคานั้นหลุดจากจุดรองรับ หากทำการคำนวณความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  ที่มากกว่า  $1 + \beta$  จะไม่สามารถคำนวณได้ด้วยสาเหตุเดียวกันกับในกรณีที่  $\beta = 0.25$  ส่วนที่เหลืออีก 5 ค่า ทำการป้อนค่าที่ใกล้เคียง ได้แก่ มุมลาดที่จุดรองรับ  $A$  ( $\theta_A$ ) น้ำหนักแบบบรทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอ ( $\bar{w}$ ) แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ  $B$  ( $\bar{R}_B$ ) แรงตามแนวแกน ( $\bar{N}_A$ ) และแรงเฉือน ( $\bar{Q}_A$ ) โดยตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน (สมการที่ 3.19) ที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  นั้นเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

ตารางที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.23765	10.36026	11.53752	0.615858	3.974517
1.03	-0.39525	12.92558	14.26609	0.14538	5.648532
1.05	-0.48862	11.6062	12.91138	-0.74015	6.029925
1.10	-0.64147	8.373231	9.813784	-1.48151	6.143364
1.15	-0.75286	6.606788	8.258007	-1.40518	6.107114
1.20	-0.84382	5.476305	7.324453	-1.16601	6.009576
1.25	-0.92137	4.659272	6.677885	-0.90671	5.868332
1.30	-0.98911	4.025044	6.187091	-0.66605	5.698101
1.35	-1.04925	3.510258	5.791019	-0.4548	5.510226
1.40	-1.10325	3.079758	5.457563	-0.2746	5.312953
1.45	-1.15217	2.711987	5.168285	-0.12386	5.112134
1.49	-1.18819	2.453191	4.960915	-0.02276	4.951726



รูปที่ 4.12 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 0$



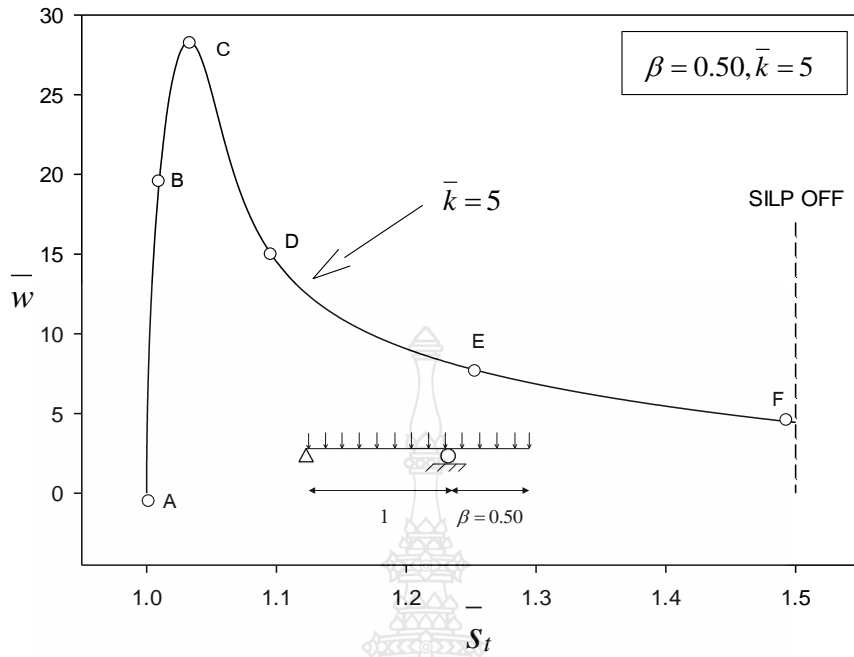
รูปที่ 4.13 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ไดจากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 0$

จากรูปที่ 4.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสลิปเนสของสปริง  $\bar{k} = 0$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.03$  และ  $\bar{w}_{cri} = 12.925$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

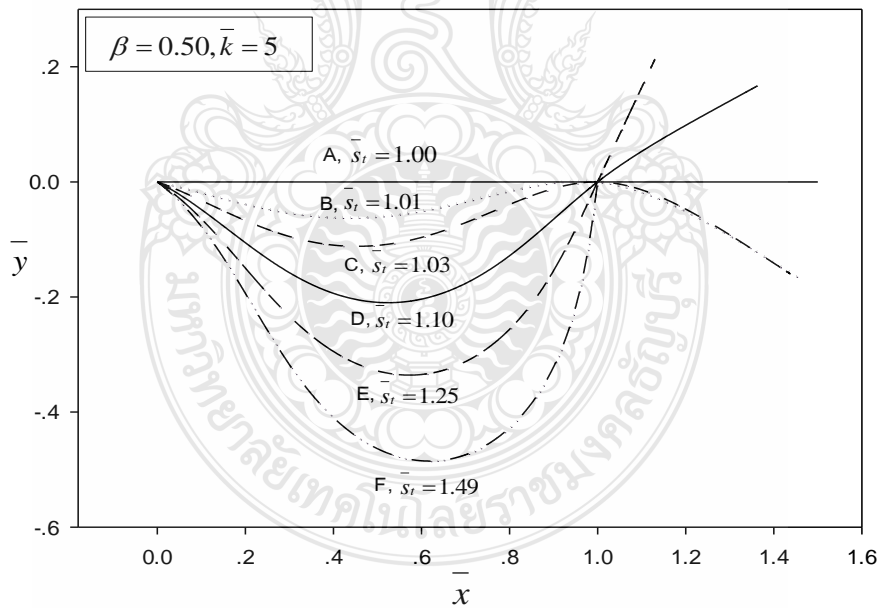
จากรูปที่ 4.13 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.12 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 6 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.03$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.10$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.25$  และที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.49$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสลิปเนสของสปริงเพิ่มขึ้น จุดรองรับแบบสปริงหมุนทำให้เกิดความต้านทานมากขึ้น

ตารางที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.15959	19.82112	21.23599	3.000215	8.18802
1.03	-0.26508	28.24032	29.40207	3.640222	12.44035
1.05	-0.31776	25.17933	25.71371	0.258424	12.90052
1.10	-0.36776	14.5336	15.20845	-4.11692	10.94167
1.15	-0.40439	10.9499	12.00561	-4.54658	10.31105
1.20	-0.43404	9.06112	10.45174	-4.46867	9.982948
1.25	-0.45772	7.800309	9.485954	-4.28317	9.71394
1.30	-0.47659	6.854859	8.799903	-4.07732	9.450562
1.35	-0.49154	6.097144	8.269652	-3.87713	9.180528
1.40	-0.50328	5.463773	7.835627	-3.69102	8.902499
1.45	-0.51233	4.918746	7.465787	-3.52135	8.61803
1.49	-0.51791	4.530877	7.203359	-3.39758	8.387161



รูปที่ 4.14 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 5$



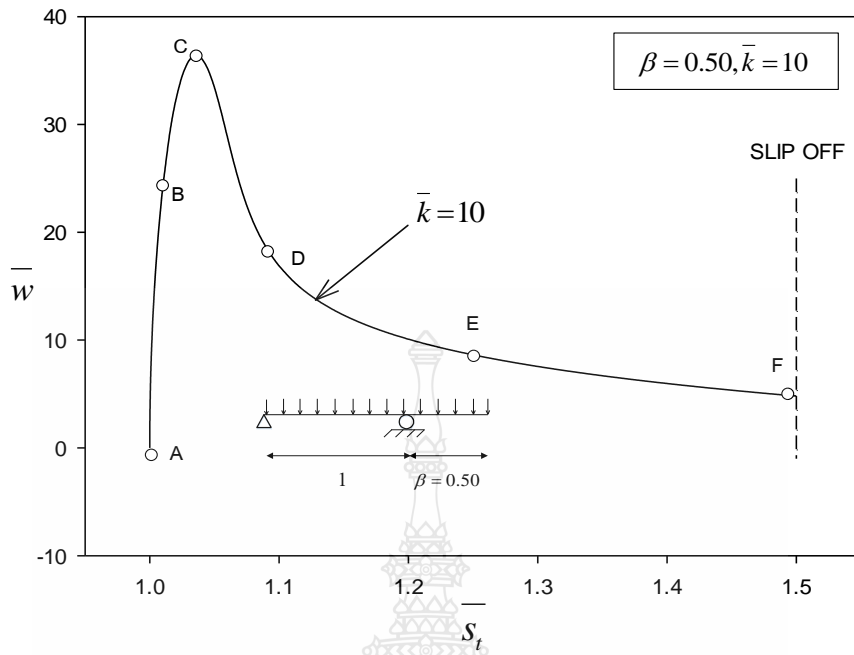
รูปที่ 4.15 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 5$

จากรูปที่ 4.14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสติเฟเนสของสปริง  $\bar{k} = 5$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.03$  และ  $\bar{w}_{cri} = 28.240$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคานเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

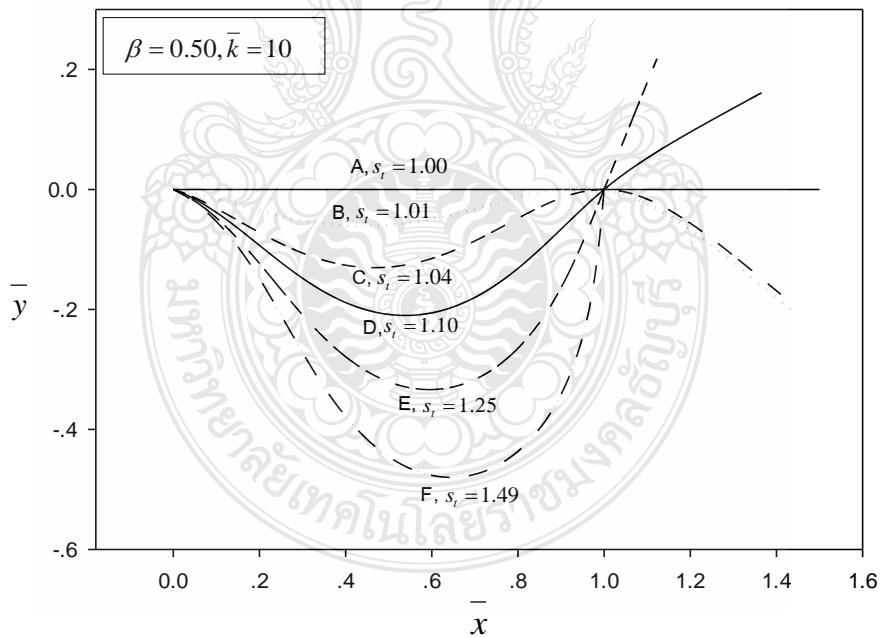
จากรูปที่ 4.15 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคาน ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.14 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคาน จำนวน 6 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.03$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.10$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.25$  และที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.49$  (จุดที่อิลาสติกคานโก่งหลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติเฟเนสของสปริงเพิ่มขึ้น จุดรองรับแบบสปริงหมุนเกิดความต้านทานมากขึ้น

**ตารางที่ 4.8** ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, R_B, N_A, Q_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$R_B$	$N_A$	$Q_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.11864	24.07742	25.60424	4.24308	10.25802
1.04	-0.22112	36.129	36.70662	4.040832	17.01554
1.10	-0.25389	16.88471	17.27571	-5.94407	12.38979
1.15	-0.27091	12.31022	13.24	-6.54038	11.199
1.20	-0.28614	10.08182	11.4382	-6.50059	10.65289
1.25	-0.2983	8.630851	10.35345	-6.32914	10.25388
1.30	-0.30768	7.552784	9.595169	-6.12178	9.896059
1.35	-0.31473	6.691354	9.014117	-5.90706	9.549791
1.40	-0.31984	5.971306	8.54066	-5.69539	9.20633
1.45	-0.32333	5.350685	8.138129	-5.49095	8.863427
1.49	-0.32512	4.907941	7.852813	-5.33382	8.589294



รูปที่ 4.16 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 10$



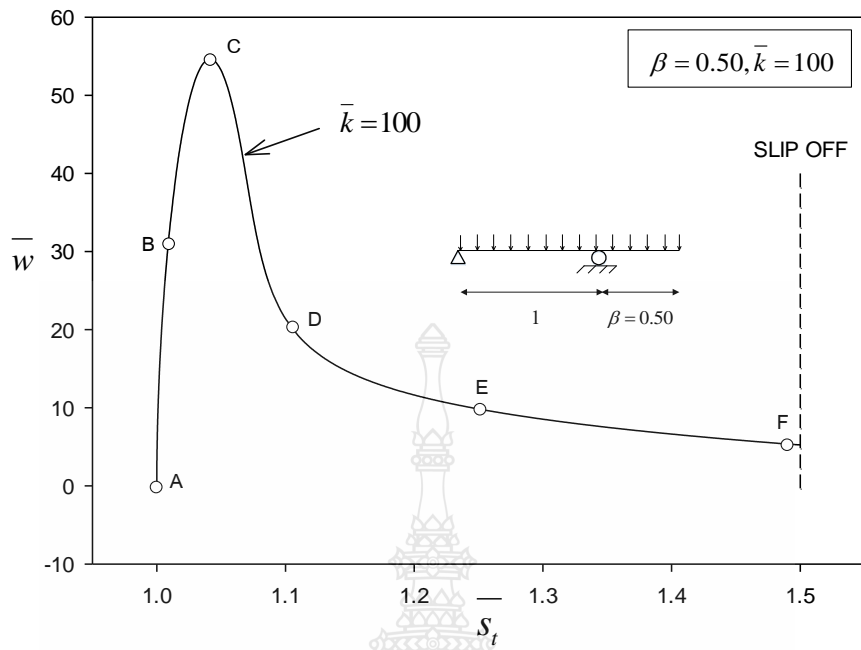
รูปที่ 4.17 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ไ้จากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 10$

จากรูปที่ 4.16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสตีเฟนสของสปริง  $\bar{k} = 10$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.04$  และ  $\bar{w}_{cri} = 36.129$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

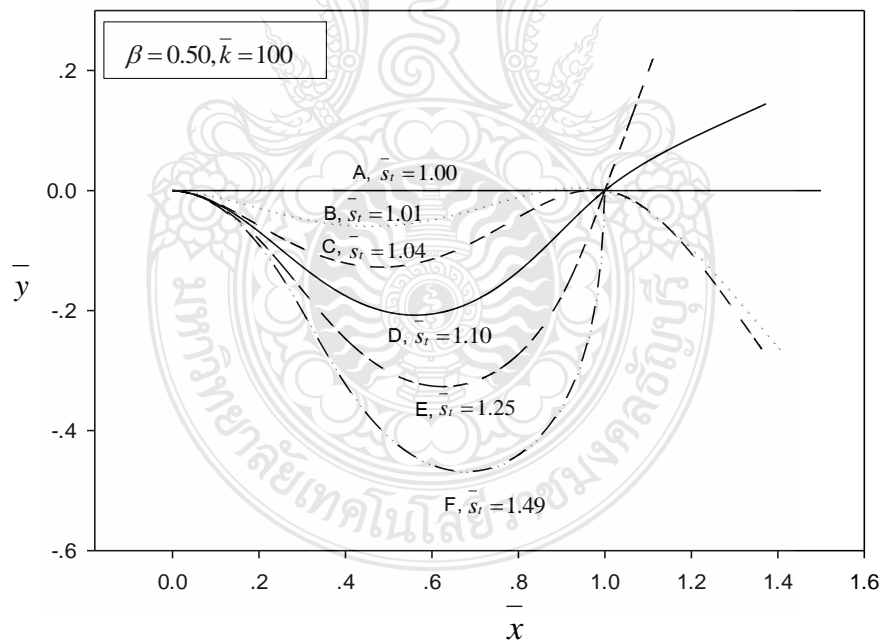
จากรูปที่ 4.17 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.16 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 6 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.04$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.10$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.25$  และที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.49$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนสของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนเกิดความต้านทานมากขึ้น

**ตารางที่ 4.9** ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.02082	32.84135	34.57497	6.5624	15.1226
1.04	-0.03942	54.59599	54.70899	6.756918	27.23532
1.10	-0.03772	21.40528	21.23873	-10.2005	14.1723
1.15	-0.03781	14.50156	15.28645	-10.608	11.58675
1.20	-0.03888	11.6343	13.02513	-10.4121	10.60769
1.25	-0.03981	9.845213	11.7286	-10.1202	9.97085
1.30	-0.04049	8.537428	10.8418	-9.79607	9.455354
1.35	-0.04092	7.499702	10.16942	-9.45849	8.995931
1.40	-0.04114	6.634767	9.624328	-9.11615	8.568049
1.45	-0.04119	5.88973	9.162061	-8.77404	8.160688
1.49	-0.04111	5.357826	8.834886	-8.50268	7.84547



รูปที่ 4.18 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 100$



รูปที่ 4.19 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้อจากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 100$

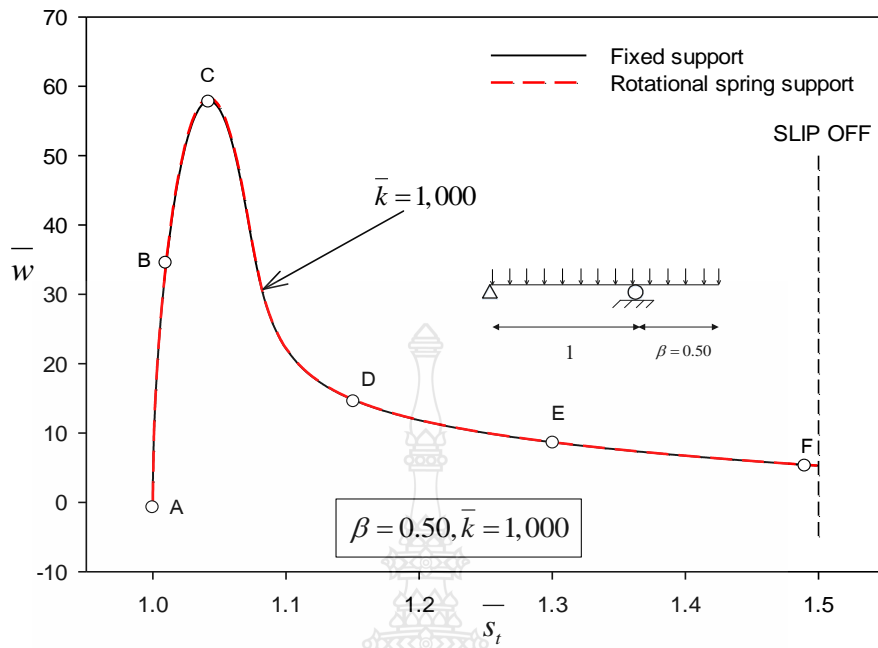


จากรูปที่ 4.18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสติเฟนซ์ของสปริง  $\bar{k} = 100$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.04$  และ  $\bar{w}_{cri} = 54.595$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

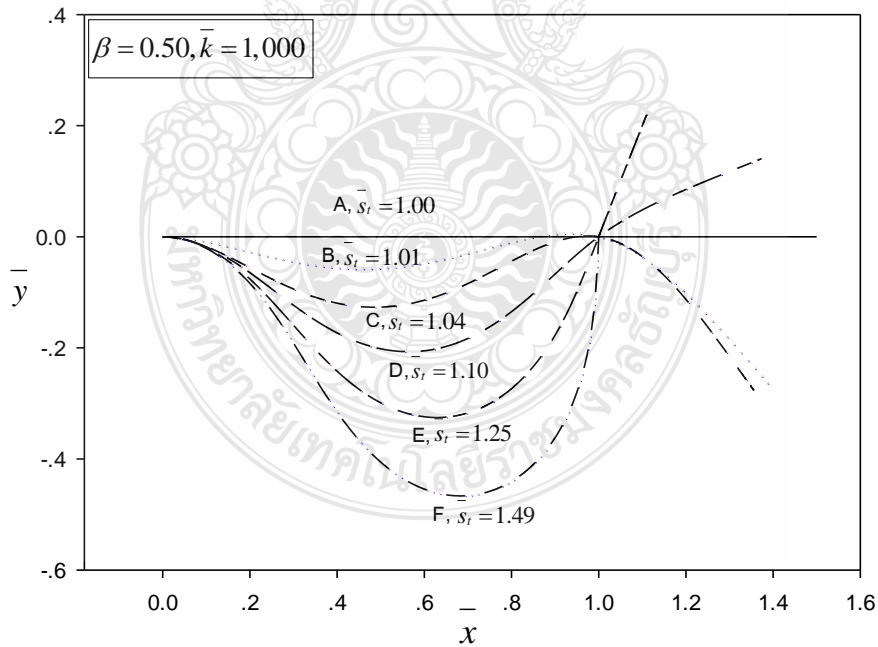
จากรูปที่ 4.19 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.18 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 6 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.04$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.10$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.25$  และที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.49$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติเฟนซ์ของสปริงเพิ่มขึ้น จุดรองรับแบบสปริงหมุนเกิดความต้านทานมากขึ้น

**ตารางที่ 4.10** ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.00225	34.31884	36.08063	6.878612	16.03699
1.04	-0.00428	57.82499	57.84391	6.863793	29.25838
1.10	-0.00395	22.15678	21.89287	-10.9336	14.34406
1.15	-0.00392	14.81344	15.58095	-11.235	11.51604
1.20	-0.00402	11.84628	13.24731	-10.989	10.47823
1.25	-0.00411	10.00671	11.91842	-10.6637	9.812218
1.30	-0.00417	8.665414	11.01209	-10.3111	9.279607
1.35	-0.00421	7.602398	10.32584	-9.94686	8.809936
1.40	-0.00422	6.71697	9.769882	-9.57846	8.376305
1.45	-0.00422	5.954551	9.298584	-9.21062	7.966309
1.49	-0.00421	5.410311	8.965112	-8.91889	7.650589



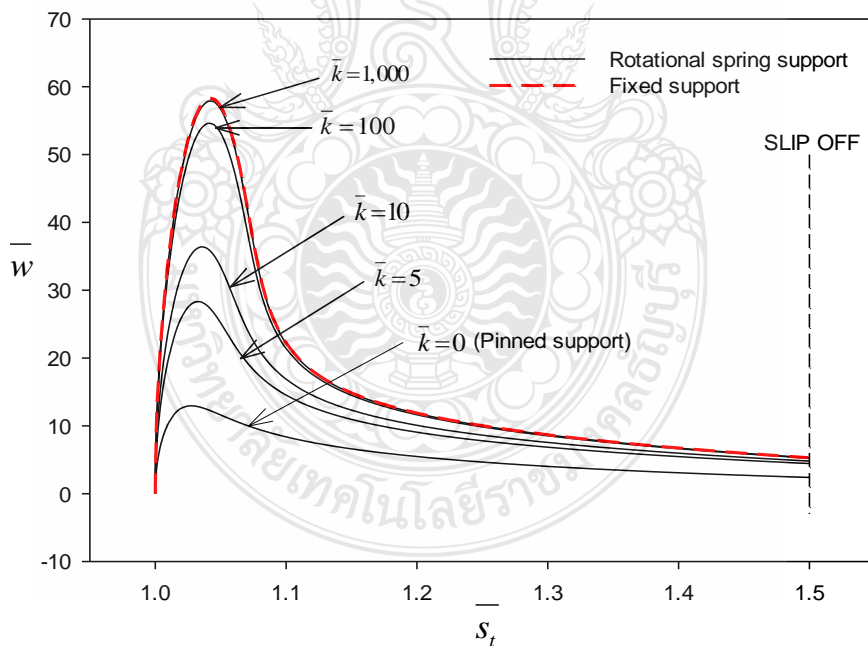
รูปที่ 4.20 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 1,000$   
 $\bar{k}$  =อนันต์



รูปที่ 4.21 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ไดจากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 1,000$

จากรูปที่ 4.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสติฟเนสของสปริง  $\bar{k} = 100$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 57.843$  และ  $\bar{k} = \infty$  (Fixed support)  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 58.210$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคานี้เริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

จากรูปที่ 4.21 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคานี้ ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.20 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคานี้ จำนวน 6 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.04$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.10$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.25$  และที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.49$  (จุดที่อิลาสติกคานี้หลุดจากจากรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติฟเนสของสปริงเพิ่มขึ้น จุดรองรับแบบสปริงหมุนเกิดความต้านทานมากขึ้น



รูปที่ 4.22 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.50$

ผลการศึกษากรณีที่มีค่า  $\beta = 0.50$  และทำการแปรผันค่า  $\bar{k}$  ตั้งแต่ค่า 0 5 10 100 1,000 และ อนันต์ จากรูปที่ 4.22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  จากกราฟเห็นได้ว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนกระทั่งถึงจุดที่อิลาสติกคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด กรณี  $\bar{k} = 0$ ,  $\bar{s}_t = 1.03$ ,  $\bar{w}_{cri} = 12.925$  กรณี  $\bar{k} = 5$ ,  $\bar{s}_t = 1.03$ ,  $\bar{w}_{cri} = 28.240$  กรณี  $\bar{k} = 10$ ,  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 36.129$  กรณี  $\bar{k} = 100$ ,  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 54.595$  กรณี  $\bar{k} = 1,000$ ,  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 57.824$  และ  $\bar{k} =$  อนันต์ (Fixed support)  $\bar{s}_t = 1.04$ ,  $\bar{w}_{cri} = 58.21$  จากผลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าสตีเฟนสของสปริง มีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้อิลาสติกคาน มีสตีเฟนสเพิ่มขึ้นและมีน้ำหนักบรรทุกวิกฤติเพิ่มขึ้นเช่นกัน หลังจากจุดที่ได้รับหนักสูงสุดแล้ว น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.50$  นั้นทำให้อิลาสติกคานเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

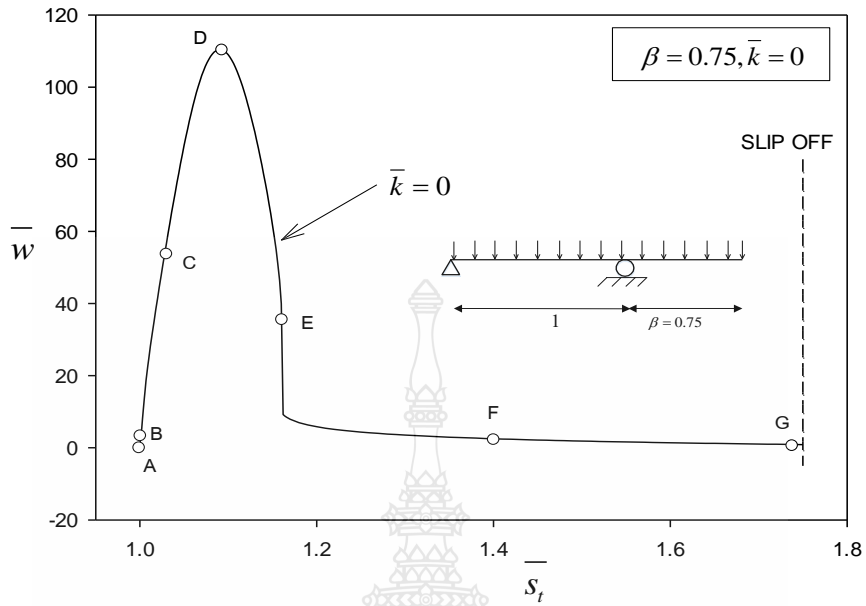
ส่วนรูปร่างสมมูล ในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  (จตุรรองรับแบบหมุน) แสดงในรูปที่ 4.13 และเมื่อแปรผันค่า  $\bar{k}$  ไปที่ 5 10 100 1,000 และ อนันต์ ทำให้จุดหมุนนั้นเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม จากจตุรรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระไปจนกระทั่งเป็นจตุรรองรับแบบยึดแน่น (ผลการคำนวณ Fixed support ภาคผนวก ค) ที่มีค่าน้ำหนักบรรทุกใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือมีสตีเฟนสของสปริงเข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้จุดหมุนด้านจตุรรองรับ A นั้นมีความต้านทานในการรับแรงดัดเพิ่มมากขึ้น ทำให้ระบบมีสตีเฟนสสูงขึ้น เมื่ออิลาสติกคานเกิดการเสียรูปจำเป็นต้องใช้น้ำหนักบรรทุกที่มากขึ้นตามไปด้วย รูปร่างของอิลาสติกคานเปลี่ยนไปตามค่าสตีเฟนสของสปริง แสดงในรูปที่ 4.15 4.17 4.19 และ 4.21

### 4.3 ผลจากค่านวนค่า $\beta = 0.75$

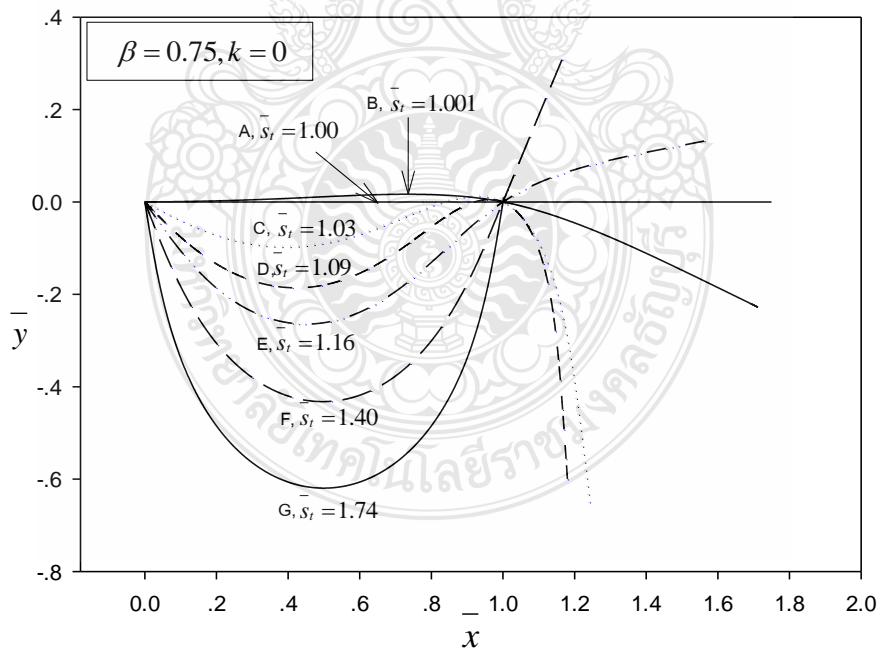
เริ่มต้นการคำนวณหาผลเฉลยและวิเคราะห์รูปร่างของอิลาสติกคา โดยกำหนดค่า  $\beta = 0.75$  แปรผันค่า  $\bar{k} = 0.5, 10, 100, 1,000$  และอนันต์ กำหนดค่าความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เป็นค่าที่กำหนด โดยเริ่มจากค่าที่  $1.01 - 1.7499$  (ค่าใกล้เคียง  $1.75$ ) เนื่องจากที่ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t = 1.75$  นั้นเป็นจุดที่อิลาสติกคานั้นหลุดจากจุดรองรับ หากทำการคำนวณความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  ที่มากกว่า  $1 + \beta$  จะไม่สามารถคำนวณได้ด้วยสาเหตุเดียวกันกับในกรณีที่  $\beta = 0.25$  และ  $\beta = 0.50$  ส่วนที่เหลืออีก 5 ค่าทำการป้อนค่าที่ใกล้เคียง ได้แก่ มุมลาดที่จุดรองรับ  $A$  ( $\theta_A$ ) น้ำหนักแบบบรทุกตัวเองแผ่กระจายสม่ำเสมอ ( $\bar{w}$ ) แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ  $B$  ( $\bar{R}_B$ ) แรงตามแนวแกน ( $\bar{N}_A$ ) และแรงเฉือน ( $\bar{Q}_A$ ) โดยตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน (สมการที่ 3.19) ที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

ตารางที่ 4.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.19557	24.63776	37.38946	15.07516	5.509215
1.05	-0.51472	83.77474	117.9731	54.0302	11.04063
1.09	-0.67757	110.4272	148.3672	67.02009	12.4173
1.10	-0.71083	108.9485	144.9712	64.73165	12.36285
1.15	-0.86293	61.83503	79.26843	29.86385	10.83767
1.20	-0.87637	5.843458	9.672104	-1.81397	6.604471
1.30	-1.00155	3.531515	6.941054	-1.26104	5.85318
1.40	-1.09908	2.598323	5.908199	-0.81892	5.412274
1.50	-1.1993	1.874519	5.118852	-0.43511	4.933871
1.60	-1.27624	1.409722	4.600325	-0.20223	4.536425
1.70	-1.34265	1.052079	4.185443	-0.05124	4.173421
1.74	-1.36675	0.930226	4.039764	-0.00911	4.037876



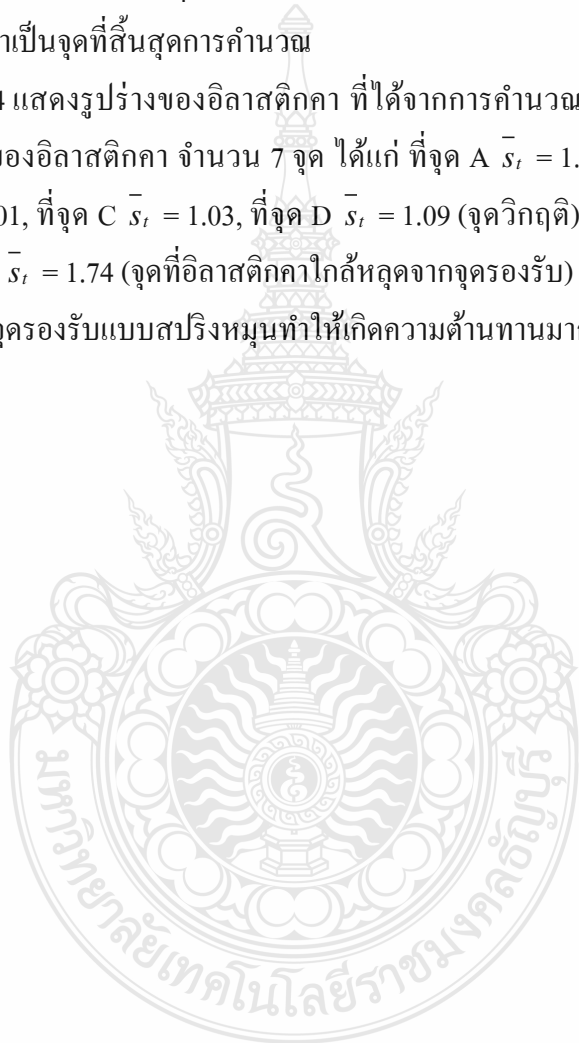
รูปที่ 4.23 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 0$



รูปที่ 4.24 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ไดจากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 0$

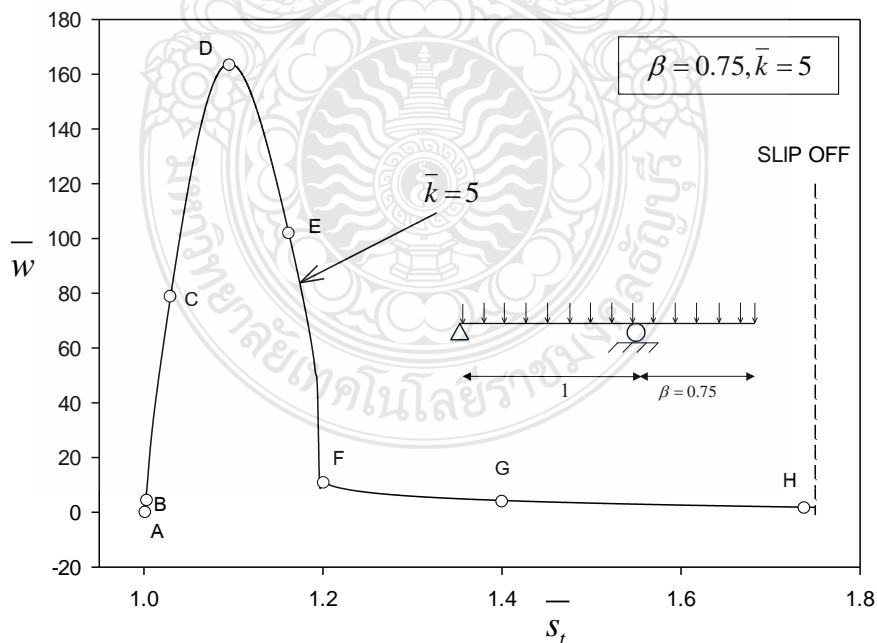
จากรูปที่ 4.23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสติฟเนสของสปริง  $\bar{k} = 0$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.09$  และ  $\bar{w}_{cri} = 110.427$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุดน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมดุลไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.75$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

จากรูปที่ 4.24 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.23 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 7 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.001$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.03$ , ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.09$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.16$ , ที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.40$  และที่จุด G  $\bar{s}_t = 1.74$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติฟเนสของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนทำให้เกิดความต้านทานมากขึ้น



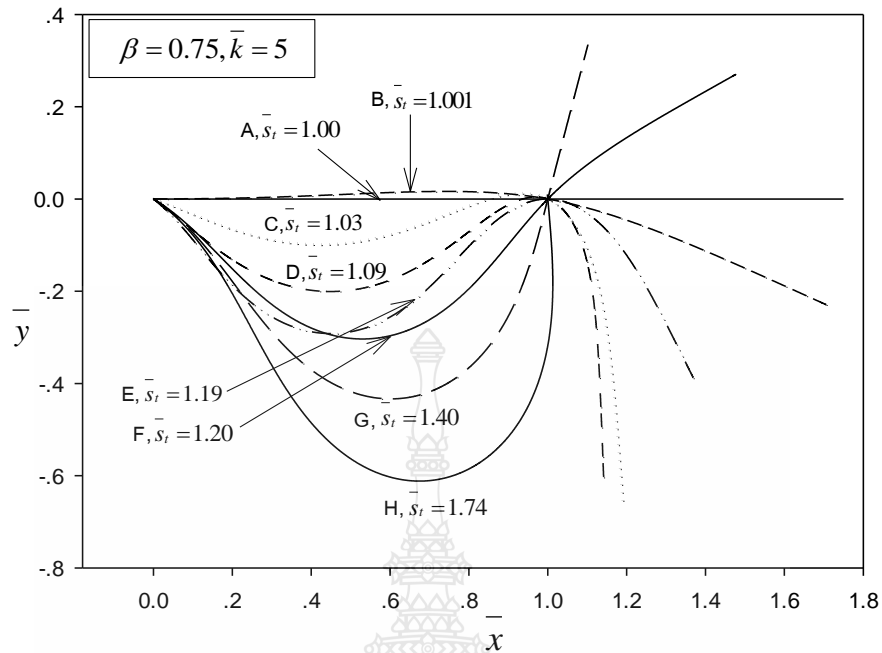
ตารางที่ 4.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.13349	32.48774	48.54207	20.66604	9.606418
1.05	-0.37146	119.3023	165.3435	76.69118	29.19929
1.10	-0.51262	163.54	214.1765	96.13918	39.8483
1.15	-0.58162	118.3622	147.9081	59.09613	35.65365
1.19	-0.59216	55.53163	66.99325	17.29353	24.75096
1.20	-0.47075	10.98075	15.59934	-5.73891	11.26064
1.30	-0.47877	5.879765	9.912495	-5.17224	9.133405
1.40	-0.49847	4.326672	8.358214	-4.55474	8.392394
1.50	-0.51121	3.358847	7.45896	-4.09703	7.775546
1.60	-0.51749	2.644031	6.816119	-3.74381	7.19371
1.74	-0.51756	1.867849	6.131286	-3.36698	6.411344



รูปที่ 4.25 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวมและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 5$





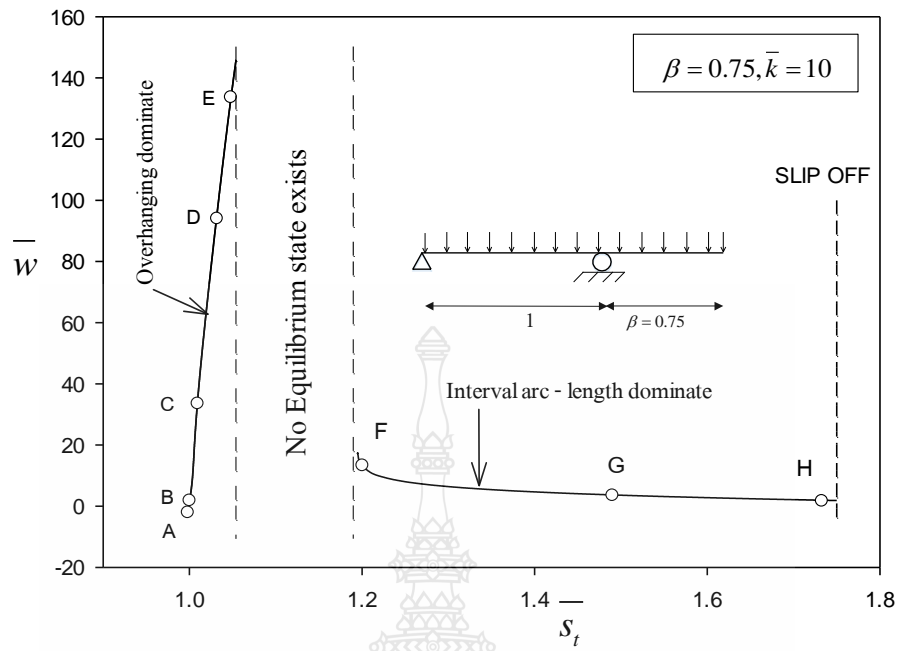
รูปที่ 4.26 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 5$

จากรูปที่ 4.25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรวม  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสตีเฟนของสปริง  $\bar{k} = 5$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักรวม  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมคูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_t = 1.10$  และ  $\bar{w}_{cri} = 163.54$  หลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักรวม  $\bar{w}$  ลดลงในขณะที่มีการแอนตัวเพิ่มขึ้น ซึ่งความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นสมคูลไร้เสถียรภาพ จนกระทั่งถึงจุดความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_t = 1.75$  นั้นทำให้อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ถือว่าเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ

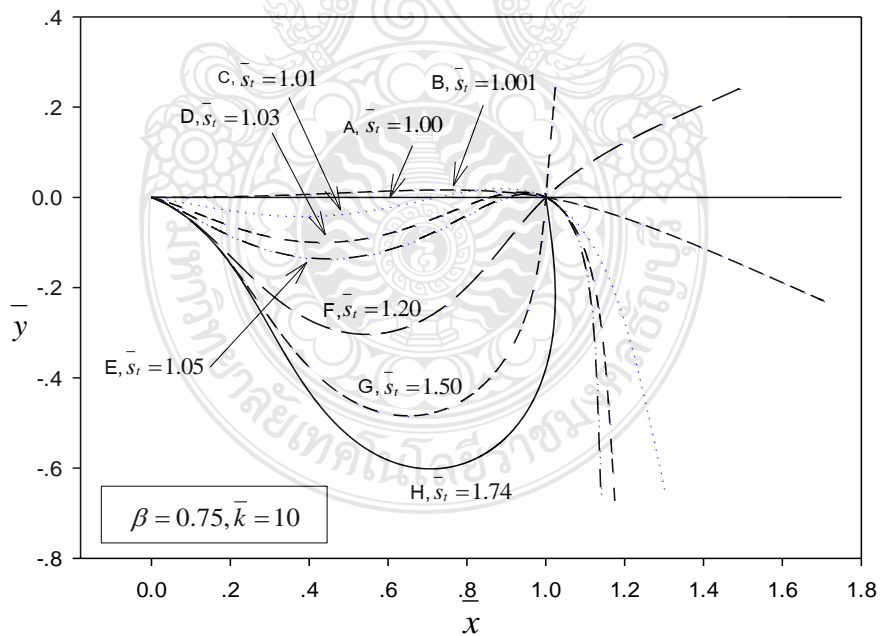
จากรูปที่ 4.26 แสดงรูปร่างของอิลาสติกคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.25 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกคา จำนวน 8 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอนตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.001$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.03$ , ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.010$  (จุดวิกฤติ), ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.19$ , ที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.20$ , ที่จุด G  $\bar{s}_t = 1.40$  และที่จุด H  $\bar{s}_t = 1.74$  (จุดที่อิลาสติกคาใกล้หลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสตีเฟนของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนทำให้เกิดความต้านทานมากขึ้น

ตารางที่ 4.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	-0.00188	3.2957574	5.0818534	0.7639962	0.745137
1.01	-0.10198	36.3224	53.93501	23.19583	11.95772
1.05	-0.29505	137.5875	189.5426	86.61482	41.55895
1.20	-0.31754	13.09244	18.03544	-8.19922	12.30244
1.25	-0.30368	8.007492	12.44355	-7.78065	9.97539
1.30	-0.30682	6.405107	10.75291	-7.27625	9.287963
1.35	-0.31087	5.407086	9.76406	-6.86791	8.825449
1.40	-0.31423	4.671215	9.073238	-6.52231	8.437534
1.45	-0.3166	4.082738	8.542459	-6.21967	8.082028
1.50	-0.31797	3.589304	8.109387	-5.94843	7.743688
1.55	-0.31841	3.16248	7.741415	-5.70138	7.416226
1.65	-0.31681	2.444868	7.133341	-5.26228	6.783678
1.70	-0.31492	2.13416	6.874622	-5.06457	6.475983
1.74	-0.31293	1.902425	6.684432	-4.91514	6.233094



รูปที่ 4.27 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 10$



รูปที่ 4.28 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ไ้จากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 10$

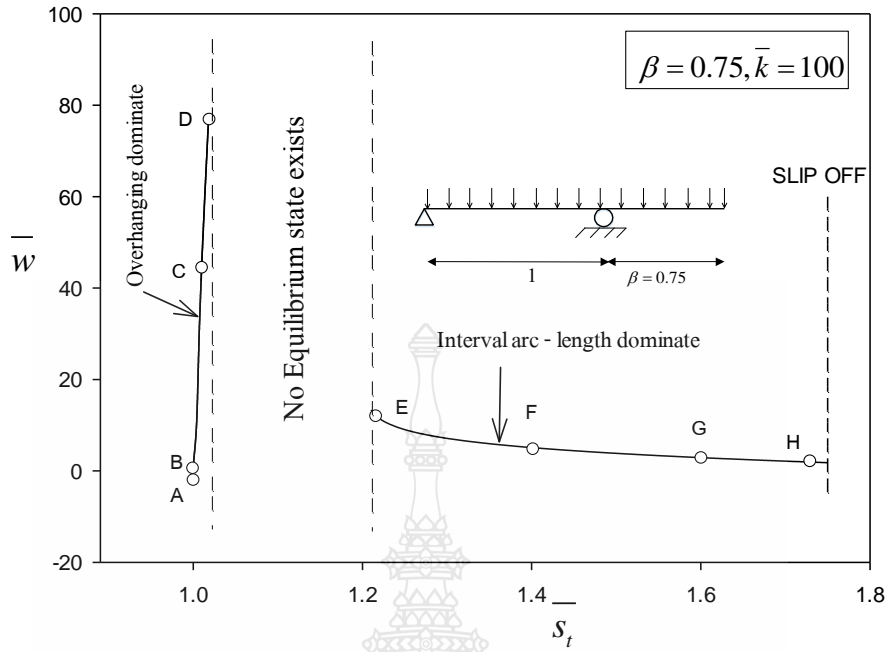
จากรูปที่ 4.27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  โดยมีค่าสลิปเนสของสปริง  $\bar{k} = 10$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกานั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้ จะอยู่ที่  $\bar{s}_t = 1.05$  และ  $\bar{w} = 137.587$  หลังจากจุดนี้ไปไม่สามารถหาค่าได้ และสามารถหาค่าได้อีก ในช่วง  $\bar{s}_t = 1.20 - 1.7499$  ช่วงที่อิลาสติกามีสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ

จากรูปที่ 4.28 แสดงรูปร่างของอิลาสติกา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.27 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอิลาสติกา จำนวน 8 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_t = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_t = 1.001$ , ที่จุด C  $\bar{s}_t = 1.01$ , ที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.03$ , ที่จุด E  $\bar{s}_t = 1.05$ , ที่จุด F  $\bar{s}_t = 1.20$ , ที่จุด G  $\bar{s}_t = 1.50$  และที่จุด D  $\bar{s}_t = 1.744$  (จุดที่อิลาสติกากลับหลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสลิปเนสของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น

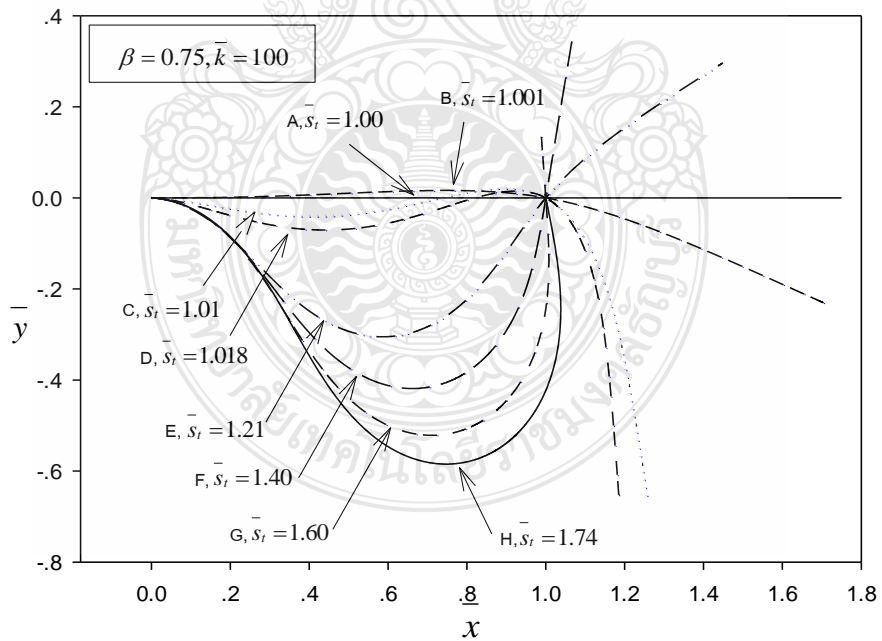


ตารางที่ 4.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	-0.00024	3.320359	5.124708	0.772795	0.744737
1.005	-0.00527	16.69066	25.29043	9.448265	5.687591
1.01	-0.01948	45.4431	66.62605	28.51913	18.58696
1.018	-0.03192	76.96926	110.2199	47.45757	33.20876
1.21	-0.04237	13.31819	18.59364	-12.9238	10.94862
1.25	-0.04003	9.02838	14.00997	-11.6867	9.114444
1.30	-0.03978	7.115113	12.04522	-10.8354	8.354405
1.35	-0.03983	5.951538	10.92988	-10.2136	7.857187
1.40	-0.03986	5.096817	10.15689	-9.69513	7.446427
1.45	-0.0398	4.412858	9.563707	-9.235	7.076092
1.50	-0.03963	3.838294	9.079071	-8.81291	6.729423
1.55	-0.03937	3.340131	8.666436	-8.41837	6.398961
1.60	-0.03902	2.898212	8.305215	-8.0454	6.080713
1.65	-0.03858	2.499013	7.983069	-7.6903	5.772078
1.70	-0.03807	2.132783	7.692307	-7.35057	5.471029
1.74	-0.0376	1.858484	7.478931	-7.0886	5.234442



รูปที่ 4.29 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 100$



รูปที่ 4.30 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 100$

จากรูปที่ 4.29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสถิติเบสของสปริง  $\bar{k} = 100$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อีลาสติคคา สามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.018$  และ  $\bar{w} = 76.969$  หลังจากจุดนี้ไปไม่สามารถหาค่าได้ และสามารถหาค่าได้อีก ในช่วง  $\bar{s}_r = 1.21 - 1.7499$  ช่วงที่อีลาสติคคาไม่มีสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ

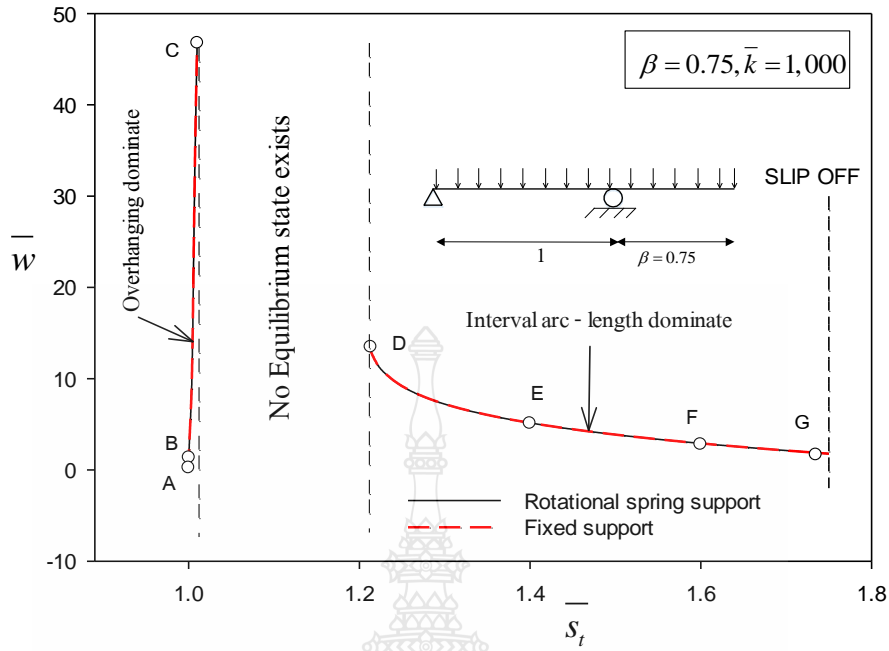
จากรูปที่ 4.30 แสดงรูปร่างของอีลาสติคคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.29 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอีลาสติคคา จำนวน 8 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.001$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.01$ , ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.018$ , ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.21$ , ที่จุด F  $\bar{s}_r = 1.40$ , ที่จุด G  $\bar{s}_r = 1.60$  และที่จุด H  $\bar{s}_r = 1.74$  (จุดที่อีลาสติคคาใกล้หลุดจากจตุรรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสถิติเบสของสปริงเพิ่มขึ้นจตุรรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น



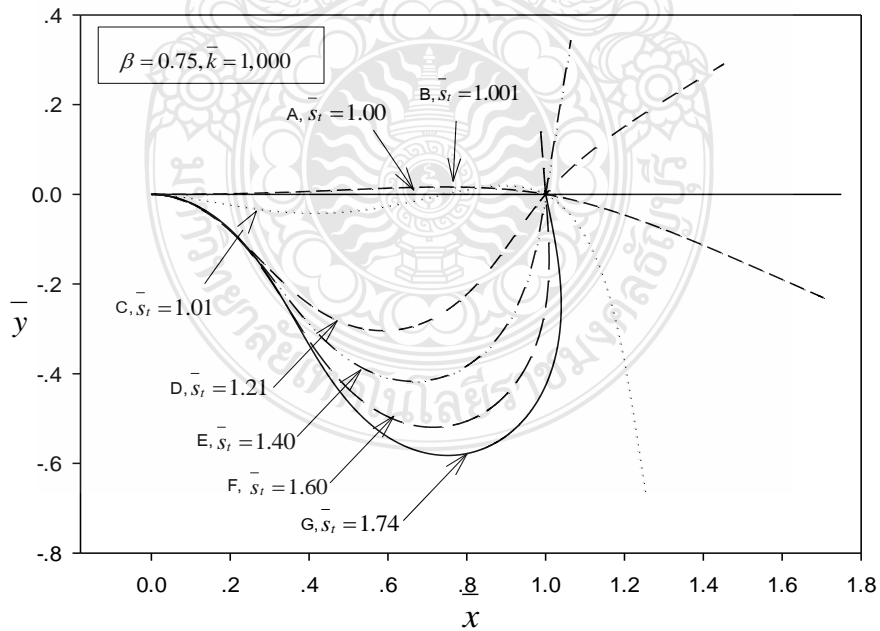
ตารางที่ 4.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	2.47E-05	3.323514	5.130216	0.773919	0.744666
1.005	-0.00055	16.78672	25.41791	9.509085	5.798032
1.01	-0.00214	47.16615	69.00173	29.38649	20.02632
1.21	-0.00439	13.72839	19.08459	-13.6317	10.7764
1.25	-0.00412	9.164955	14.22746	-12.2245	8.8717
1.30	-0.00409	7.206108	12.22118	-11.3135	8.116862
1.35	-0.00409	6.019187	11.08696	-10.6555	7.624423
1.40	-0.00408	5.147991	10.30164	-10.108	7.218304
1.45	-0.00407	4.450973	9.699082	-9.62208	6.853002
1.50	-0.00405	3.865449	9.2067	-9.17583	6.511897
1.55	-0.00402	3.357752	8.787386	-8.75824	6.187484
1.60	-0.00398	2.907319	8.420269	-8.36307	5.875652
1.65	-0.00393	2.500345	8.092868	-7.98648	5.573665
1.70	-0.00388	2.126868	7.797415	-7.62587	5.279362
1.74	-0.00383	1.847035	7.580673	-7.3476	5.048157





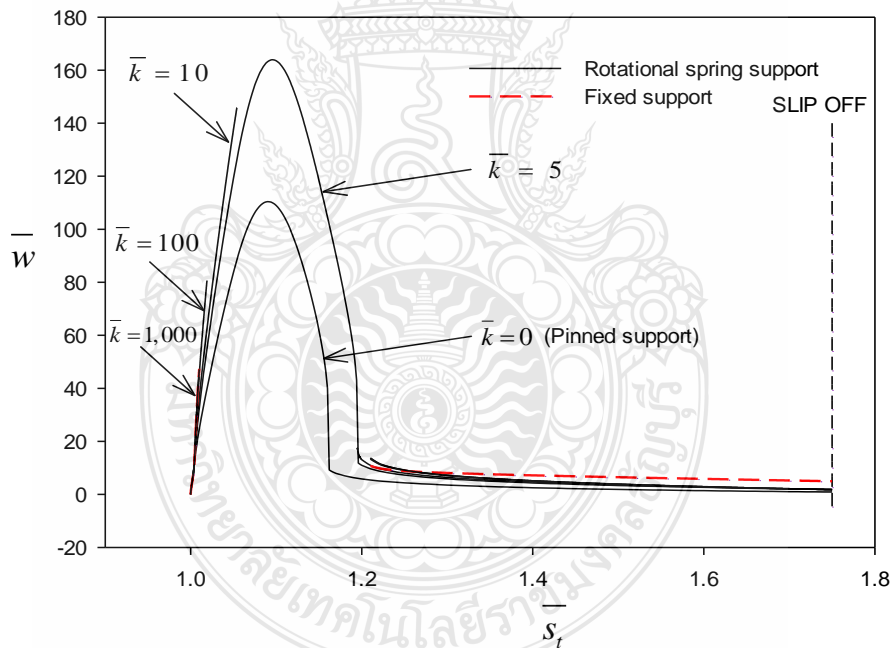
รูปที่ 4.31 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 1,000$   
 $\bar{k}$  = อนันต์



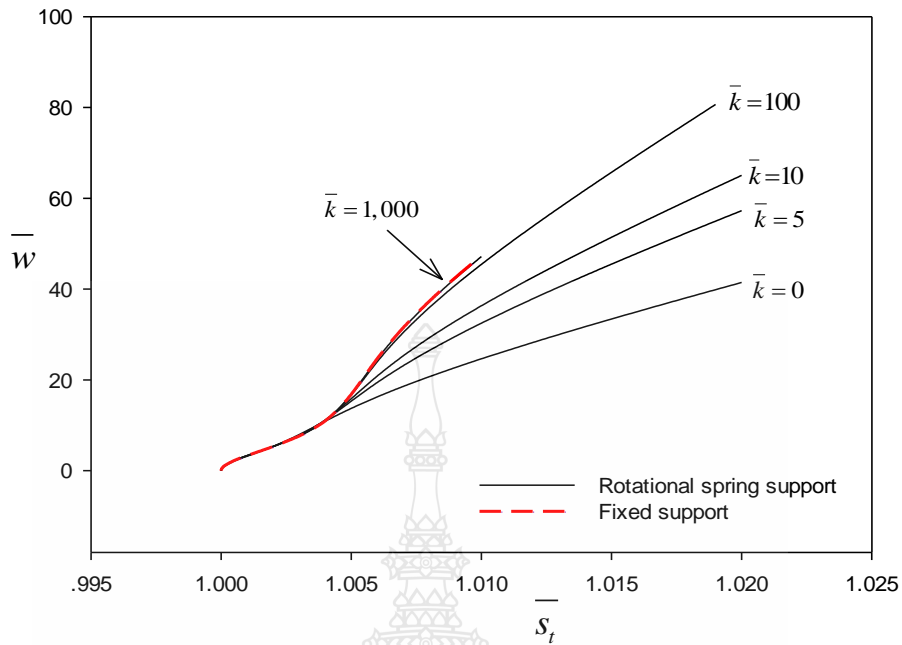
รูปที่ 4.32 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 1,000$

จากรูปที่ 4.31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  โดยมีค่าสติฟเนสของสปริง  $\bar{k} = 100$  จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_r$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อีลาสติคคา สามารถรับได้สูงสุด ในกรณีนี้  $\bar{s}_r = 1.01$ ,  $\bar{w} = 47.166$  และ  $\bar{k} =$  อนันต์ (Fixed support)  $\bar{s}_r = 1.01$ ,  $\bar{w} = 47.374$  หลังจากจุดนี้ไปไม่สามารถหาค่าได้ และสามารถหาค่าได้ในช่วง  $= 1.21 - 1.7499$  ช่วงที่อีลาสติคคา มีสมมูลแบบไร้เสถียรภาพ

จากรูปที่ 4.32 แสดงรูปร่างของอีลาสติคคา ที่ได้จากการคำนวณดังแสดงจากรูปที่ 4.31 ได้เลือกมาแสดงรูปร่างของอีลาสติคคา จำนวน 7 จุด ได้แก่ ที่จุด A  $\bar{s}_r = 1.00$  (จุดที่ยังไม่เกิดการแอ่นตัว), ที่จุด B  $\bar{s}_r = 1.001$ , ที่จุด C  $\bar{s}_r = 1.01$  (จุดที่น้ำหนักได้สูงสุด), ที่จุด D  $\bar{s}_r = 1.21$ , ที่จุด E  $\bar{s}_r = 1.40$ , ที่จุด F  $\bar{s}_r = 1.60$  และที่จุด G  $\bar{s}_r = 1.74$  (จุดที่อีลาสติคคาไถลหลุดจากจุดรองรับ) รูปร่างที่แสดงเมื่อมีค่าสติฟเนสของสปริงเพิ่มขึ้นจุดรองรับแบบสปริงหมุนจะเกิดความต้านทานมากขึ้น



รูปที่ 4.33 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$



รูปที่ 4.34 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.75$  ความยาว  $\bar{s}_t = 1.00 - 1.02$

ผลการศึกษารูปร่างที่ค่า  $\beta = 0.75$  และทำการแปรผันค่า  $\bar{k}$  ตั้งแต่ค่า 0 5 10 100 1,000 และอนันต์ จากรูปที่ 4.33 – 4.34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรบรรทุก  $\bar{w}$  และ ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  จากกราฟจะเห็นได้ว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักรบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มเช่นกัน (สมมูลแบบมีเสถียรภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณี ที่  $\bar{k} = 0$ ,  $\bar{s}_t = 1.09$  และ  $\bar{w}_{cri} = 110.427$ , ในกรณี  $\bar{k} = 5$ ,  $\bar{s}_t = 1.10$  และ  $\bar{w}_{cri} = 163.539$  ในขณะที่เมื่อ  $\bar{k} = 10$  100 1,000 และอนันต์ ไม่สามารถหาค่าน้ำหนักรบรรทุกสูงสุดได้ ในกรณีที่  $\bar{k} = 10$  100 1000 และอนันต์ จะมีลักษณะใกล้เคียงกันคือไม่สามารถหาสถานะสมมูลได้ในบางช่วงของความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$

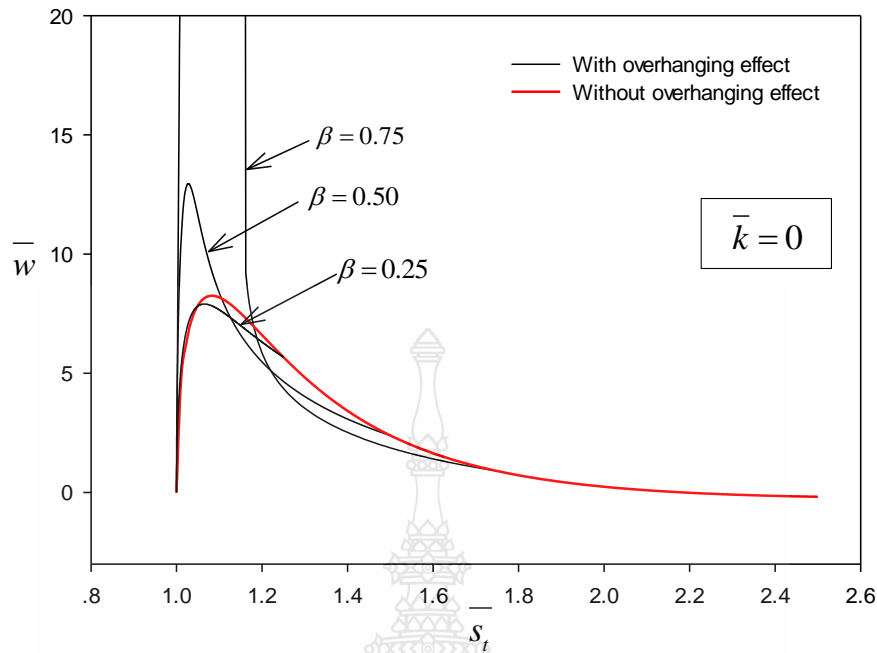
ส่วนรูปร่างสมมูล ในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  (จตุรรองรับแบบหมุน) แสดงในรูปที่ 4.24 และเมื่อแปรผันค่า  $\bar{k}$  ไปที่ 5 10 100 1,000 และอนันต์ ทำให้จุดหมุนนั้นเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม กล่าวคือมีสติฟเนสของสปริง เข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้จุดหมุนด้านจตุรรองรับ A นั้นมีความต้านทานในการรับแรงดัดเพิ่มมากขึ้น เมื่อจะทำให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น จะต้องใช้น้ำหนักรบรรทุกที่มากขึ้นตามไปด้วย ทำให้เกิดสถานะยืดรั้ง อิลาสติกคานจึงไม่สามารถเลื่อนเข้าในช่วงจตุรรองรับได้ จึงทำไม่สามารถหาค่าได้ทั้งหมดตั้งแต่  $\bar{k} = 10$  – อนันต์ รูปร่างของอิลาสติกคานเปลี่ยนไปตามค่าสติฟเนสของสปริง แสดงในรูปที่ 4.26 4.28 4.30 และ 4.32

#### 4.4 ผลจากการคำนวณเปรียบเทียบระหว่าง ผลของปลายยื่นและไม่มีปลายยื่น

การคำนวณหาผลเฉลยและวิเคราะห์รูปร่างของอิลาสติกคา จากหัวข้อ 4.1 4.2 และ 4.3 เรียบร้อย จะนำผลเฉลยที่ได้มาเปรียบเทียบกับ ผลเฉลยอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ที่ไม่ได้พิจารณาผลกระทบของปลายยื่น จะทำการเปรียบเทียบที่ผลของสปริงหมุนที่เท่ากัน ได้แก่  $\bar{k} = 0.5, 10, 100, 1,000$  และอนันต์ โดยตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  นั้นเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

ตารางที่ 4.16 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\bar{w}$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$
1.00	0	0	0	0
1.01	4.552206	5.133468	10.360257	24.637755
1.10	8.184023	7.660350	8.373230	108.948461
1.20	6.601887	6.308773	5.476304	5.843458
1.25	5.676740	5.677935	4.659272	4.362359
1.40	3.424476	-	3.079758	2.518803
1.50	2.392680	-	2.398662	1.874518
1.60	1.647176	-	-	1.409722
1.75	0.901316	-	-	0.901602
2.00	0.241769	-	-	-
2.50	0.178511	-	-	-

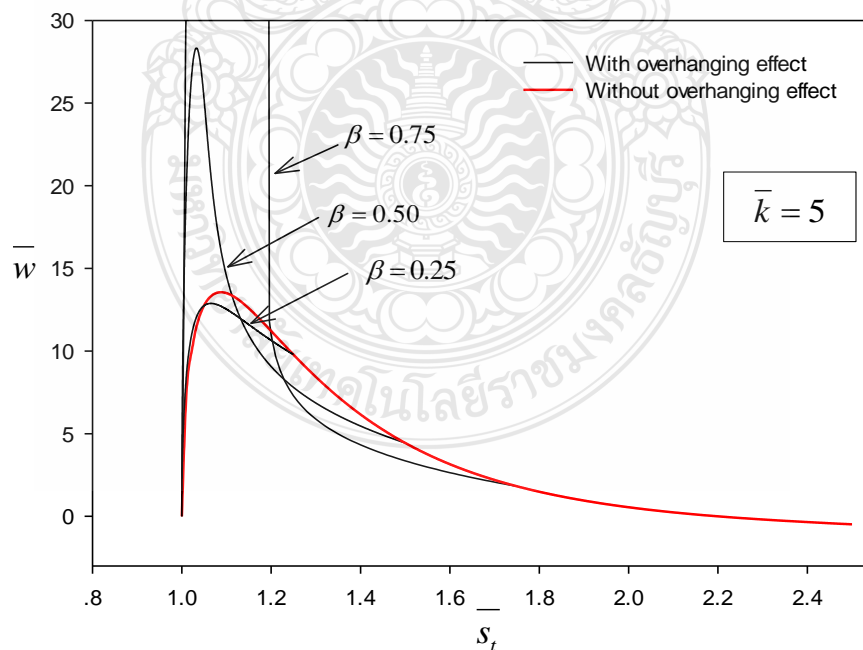


รูปที่ 4.35 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 0$

จากรูปที่ 4.35 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  กรณีที่มีค่าสปริงหมุน  $\bar{k} = 0$  เมื่อไม่มีผลกระทบของปลายยื่นมาเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ที่รวมผลกระทบของปลายยื่นที่  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  กรณีที่ไม่มีปลายยื่น สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.08$  และ  $\bar{w}_{cri} = 8.25$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.25$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.07$  และ  $\bar{w}_{cri} = 7.89$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.50$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.03$  และ  $\bar{w}_{cri} = 12.92$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.75$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.09$  และ  $\bar{w}_{cri} = 110.42$  เมื่อสังเกตกราฟความสัมพันธ์แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่มีปลายยื่นที่มีค่าน้อย เช่นที่  $\beta = 0.25$  จุดวิกฤติจะมีค่าที่ต่ำกว่าในกรณีที่ไม่พิจารณาผลกระทบของปลายยื่น เมื่อทำการเพิ่มค่า  $\beta$  ผลกระทบของปลายยื่นจะเห็นชัดเจนมากขึ้น ทั้งในความชันของกราฟ (สตีเฟนส) และน้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจนเมื่อผ่านจุดน้ำหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว จะมีความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้น จนกระทั่งเข้าใกล้จุดที่ปลายยื่นจะหลุดจากจตุรองรับ (Slip off) กราฟความสัมพันธ์จะลู่เข้าหากราฟความสัมพันธ์ในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นเนื่องจากเมื่อหลุดจากจตุรองรับแล้วจะไม่มีส่วนของปลายยื่นเหลืออยู่ ซึ่งสอดคล้องกับกรณีที่ไม่มีปลายยื่น

ตารางที่ 4.17 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\bar{w}$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$
1.00	0	0	0	0
1.01	7.32132	8.44636	19.8211	32.4877
1.10	13.5042	12.5302	14.5336	163.54
1.20	11.2109	10.6461	9.06112	10.9808
1.25	9.77994	9.79631	7.80031	7.28971
1.40	6.16438	-	5.46377	4.32667
1.50	4.43947	-	4.44852	3.35885
1.60	3.15484	-	-	2.64403
1.75	1.81903	-	-	1.81951
2.00	0.5506	-	-	-
2.50	0.483515	-	-	-



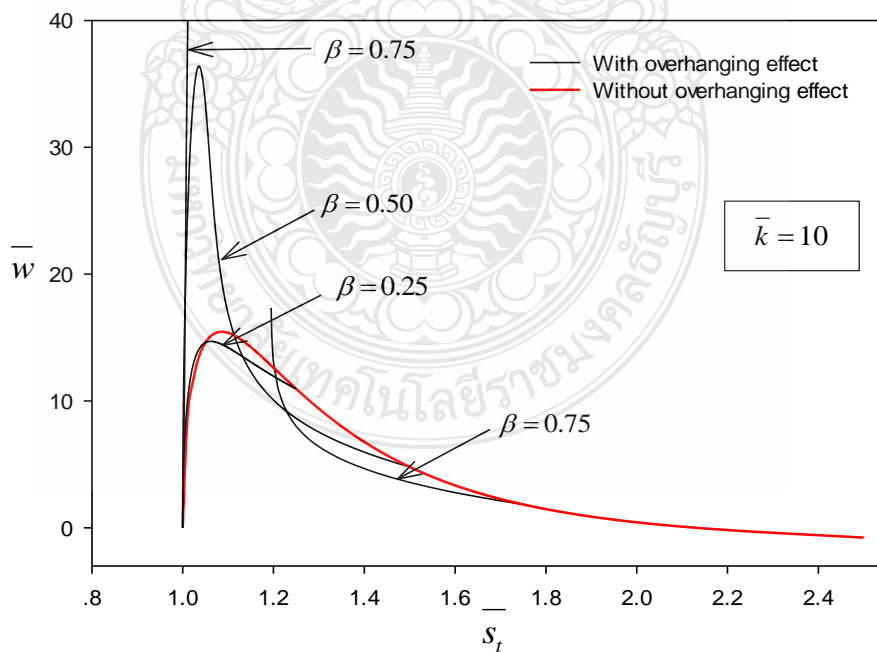
รูปที่ 4.36 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 5$

จากรูปที่ 4.36 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  กรณีที่มีค่าสปริงหมุน  $\bar{k} = 5$  เมื่อไม่มีผลกระทบของปลายยื่นมาเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ที่รวมผลกระทบของปลายยื่นที่  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  กรณีที่ไม่มีปลายยื่น สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.09$  และ  $\bar{w}_{cri} = 13.55$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.25$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.07$  และ  $\bar{w}_{cri} = 12.87$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.50$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.03$  และ  $\bar{w}_{cri} = 28.24$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.75$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.10$  และ  $\bar{w}_{cri} = 163.53$  เมื่อสังเกตกราฟความสัมพันธ์แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่มีปลายยื่นที่มีค่าน้อย เช่นที่  $\beta = 0.25$  จุดวิกฤติจะมีค่าที่ต่ำกว่าในกรณีที่ไม่พิจารณาผลกระทบของปลายยื่น เมื่อทำการเพิ่มค่า  $\beta$  ผลกระทบของปลายยื่นจะเห็นชัดเจนมากขึ้น ทั้งในความชันของกราฟ (สติฟเนส) และน้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน เมื่อผ่านจุดน้ำหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว จะมีความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้น จนกระทั่งเข้าใกล้จุดที่ปลายยื่นจะหลุดจากจตุรองรับ (Slip off) กราฟความสัมพันธ์จะลู่เข้าหากกราฟความสัมพันธ์ในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นเนื่องจากเมื่อหลุดจากจตุรองรับแล้วจะไม่มีส่วนของปลายยื่นเหลืออยู่



ตารางที่ 4.18 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\bar{w}$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$
1.00	0	0	0	0
1.01	8.41782	9.81102	24.0774	36.3224
1.10	15.3744	14.2063	16.8847	-
1.20	12.6265	11.959	10.0818	13.0924
1.25	10.9529	10.9719	8.63085	8.00749
1.40	6.77414	-	5.97131	4.67121
1.50	4.80343	-	4.81378	3.5893
1.60	3.34723	-	-	2.78487
1.75	1.84648	-	-	1.84703
2.00	0.43802	-	-	-
2.50	0.767341	-	-	-



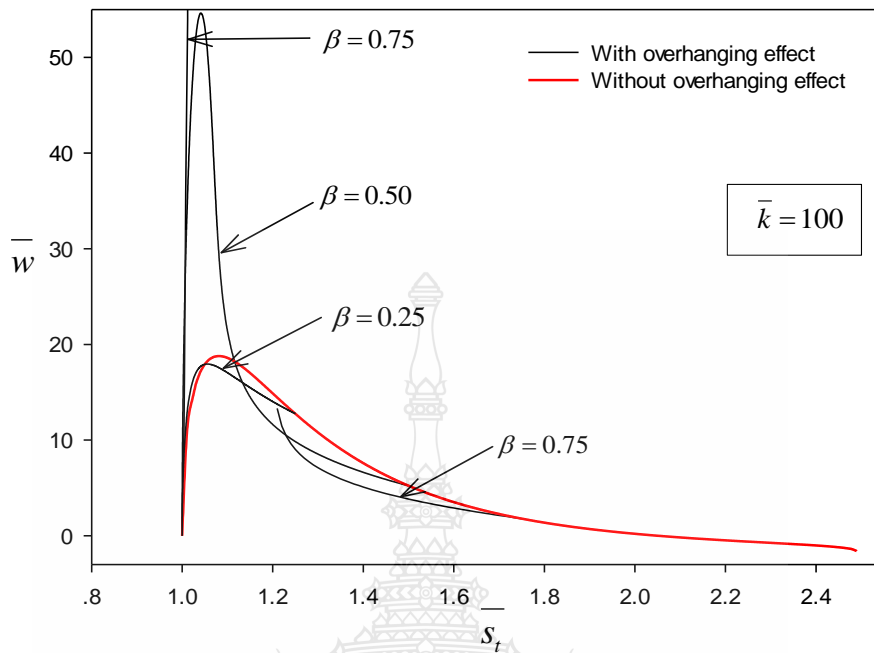
รูปที่ 4.37 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 10$



จากรูปที่ 4.37 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  กรณีที่มีค่าสปริงหมุม  $\bar{k} = 10$  เมื่อไม่มีผลกระทบของปลายยื่นมาเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ที่รวมผลกระทบของปลายยื่นที่  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  กรณีที่ไม่มีปลายยื่น สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.09$  และ  $\bar{w}_{cri} = 15.45$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.25$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.06$  และ  $\bar{w}_{cri} = 14.69$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.50$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.04$  และ  $\bar{w}_{cri} = 36.70$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.75$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่ (น้ำหนักสุดท้ายที่สามารถหาค่าได้)  $\bar{s}_t = 1.05$  และ  $\bar{w} = 137.587$  เมื่อสังเกตกราฟความสัมพันธ์แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่มีปลายยื่นที่มีค่าน้อย เช่น ที่  $\beta = 0.25$  จุดวิกฤติจะมีค่าที่ต่ำกว่าในกรณีที่ไม่พิจารณาผลกระทบของปลายยื่น เมื่อทำการเพิ่มค่า  $\beta$  ผลกระทบของปลายยื่นจะเห็นชัดเจนมากขึ้น ทั้งในความสัมพันธ์ของกราฟ (สติเฟนส) และน้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน เมื่อผ่านจุดน้ำหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว จะมีความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้น จนกระทั่งเข้าใกล้จุดที่ปลายยื่นจะหลุดจากจตุรองรับ (Slip off) กราฟความสัมพันธ์จะคู่เข้าหากราฟความสัมพันธ์ในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นเนื่องจากเมื่อหลุดจากจตุรองรับแล้วจะไม่มีส่วนของปลายยื่นเหลืออยู่ซึ่งสอดคล้องกับกรณีที่ไม่มีปลายยื่น

ตารางที่ 4.19 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\bar{w}$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$
1.00	0	0	0	0
1.01	10.4585	12.4435	32.8413	45.4431
1.10	18.5964	17.045	21.4053	-
1.20	14.8824	14.0294	11.6343	-
1.25	12.7513	12.7752	9.84521	9.02838
1.40	7.59306	-	6.63477	5.09682
1.50	5.23215	-	5.2446	3.83829
1.60	3.52053	-	-	2.89821
1.75	1.79209	-	-	1.79275
2.00	0.20966	-	-	-
2.50	1.597491	-	-	-

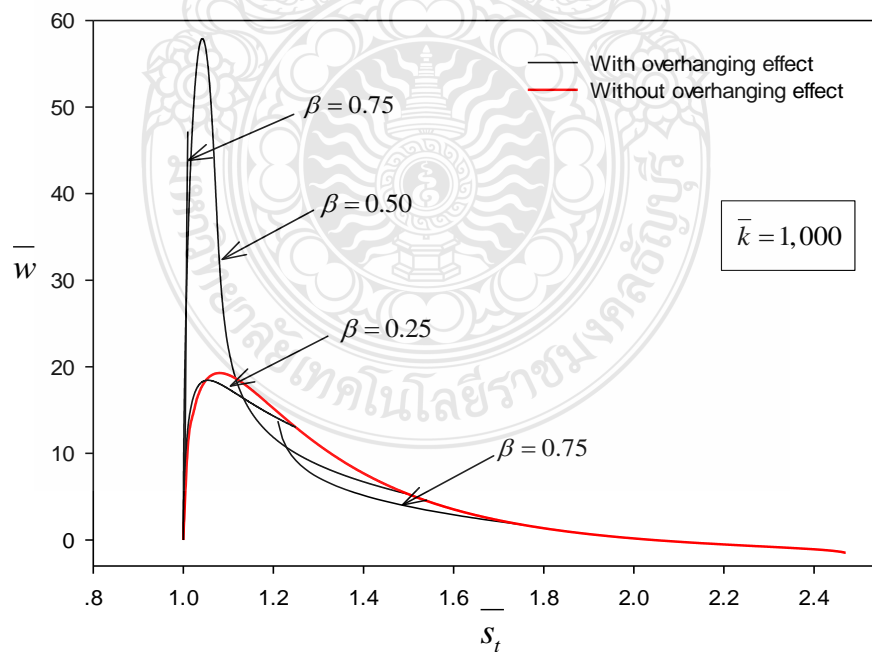


รูปที่ 4.38 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 100$

จากรูปที่ 4.38 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักรบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_t$  กรณีที่มีค่าสปริงหุ้ม  $\bar{k} = 100$  เมื่อไม่มีผลกระทบของปลายยื่นมาเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ที่รวมผลกระทบของปลายยื่นที่  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  กรณีที่ไม่มีปลายยื่น สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.08$  และ  $\bar{w}_{cri} = 18.78$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.25$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.06$  และ  $\bar{w}_{cri} = 17.93$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.50$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.04$  และ  $\bar{w}_{cri} = 54.59$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.75$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่ (น้ำหนักสุดท้ายที่สามารถหาค่าได้)  $\bar{s}_t = 1.018$  และ  $\bar{w} = 76.96$  เมื่อสังเกตกราฟความสัมพันธ์แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่มีปลายยื่นที่มีค่าน้อย เช่นที่  $\beta = 0.25$  จุดวิกฤติจะมีค่าที่ต่ำกว่าในกรณีที่ไม่มีพิจารณาผลกระทบของปลายยื่น เมื่อทำการเพิ่มค่า  $\beta$  ผลกระทบของปลายยื่นจะเห็นชัดเจนมากขึ้น ทั้งในความชันของกราฟ (สติเฟเนส) และน้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน เมื่อผ่านจุดน้ำหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว จะมีความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้น จนกระทั่งเข้าใกล้จุดที่ปลายยื่นจะหลุดจากจตุรองรับ (Slip off) กราฟความสัมพันธ์จะดูเข้าหากกราฟความสัมพันธ์ในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นเนื่องจากเมื่อหลุดจากจตุรองรับแล้วจะไม่มีส่วนของปลายยื่นเหลืออยู่ ซึ่งสอดคล้องกับกรณีไม่มีปลายยื่น

ตารางที่ 4.20 ผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\bar{w}$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$
1.00	0	0	0	0
1.01	10.7741	12.8623	34.3188	47.1662
1.10	19.0706	17.4581	22.1568	-
1.20	15.1985	14.3174	11.8463	-
1.25	12.9973	13.022	10.0067	9.16496
1.40	7.6963	-	6.71697	5.14799
1.50	5.28173	-	5.29446	3.86545
1.60	3.53638	-	-	2.90732
1.75	1.77928	-	-	1.77995
2.00	0.17632	-	-	-
2.40	1.077991	-	-	-



รูปที่ 4.39 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t$  และ  $\bar{w}$  กรณีที่  $\bar{k} = 1,000$

จากรูปที่ 4.39 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}$  กรณีที่มีค่าสปริงหมุน  $\bar{k} = 1,000$  เมื่อไม่มีผลกระทบของปลายยื่นมาเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ที่รวมผลกระทบของปลายยื่นที่  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  กรณีที่ไม่มีปลายยื่น สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.08$  และ  $\bar{w}_{cri} = 19.28$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.25$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.08$  และ  $\bar{w}_{cri} = 18.04$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.50$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่  $\bar{s}_t = 1.04$  และ  $\bar{w}_{cri} = 57.82$  กรณีปลายยื่น  $\beta = 0.75$  สามารถรับน้ำหนักสูงสุดที่ (น้ำหนักสุดท้ายที่สามารถหาค่าได้)  $\bar{s}_t = 1.01$  และ  $\bar{w} = 47.16$  เมื่อสังเกตกราฟความสัมพันธ์แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นที่มีค่าน้อย เช่นที่  $\beta = 0.25$  จุดวิกฤติที่มีค่าต่ำกว่าในกรณีที่ไม่มีพิจารณาผลกระทบของปลายยื่น เมื่อทำการเพิ่มค่า  $\beta$  ผลกระทบของปลายยื่นจะเห็นชัดเจนมากขึ้น ทั้งในความชันของกราฟ (สติเฟนส) และน้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน เมื่อผ่านจุดน้ำหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว จะมีความยาวส่วนโค้งเพิ่มมากขึ้น จนกระทั่งเข้าใกล้จุดที่ปลายยื่นจะหลุดจากจากรองรับ (Slip off) กราฟความสัมพันธ์จะคู่เข้าหากราฟความสัมพันธ์ในกรณีที่ไม่มีปลายยื่นเนื่องจากเมื่อหลุดจากจากรองรับแล้วจะไม่มีส่วนของปลายยื่นเหลืออยู่

จากรูปที่ 4.35 – 4.39 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}$  กรณีที่มีการแปรผันค่าของปลายยื่น  $\beta$  เปรียบเทียบให้เห็นถึงกรณีที่ไม่มีปลายยื่นและการแปรผันปลายยื่นจาก  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  แสดงให้เห็นถึงผลกระทบที่เกิดขึ้น กรณีปลายยื่นที่  $\beta = 0.25$  จากรูปที่ 4.35 – 4.39 พบว่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติ มีค่าต่ำกว่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติในกรณีที่ไม่มีพิจารณาผลของปลายยื่น ในกรณีที่ปลายยื่น  $\beta = 0.50$  และ  $0.75$  ผลกระทบของปลายยื่นส่งผลให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤติที่มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อเทียบกับกรณีที่ไม่มีพิจารณาผลกระทบของปลายยื่น และเมื่อความยาวส่วนโค้งของอิลาสติกามีค่าเท่ากับ  $1 + \beta$  น้ำหนักบรรทุกจะมีค่าเท่ากับกรณีที่ไม่มีพิจารณาผลของปลายยื่น พฤติกรรมดังกล่าวมีความคล้ายคลึงกันเมื่อแปรผันค่าสติเฟนสของสปริงหมุน

## บทที่ 5

### สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

การศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจตุรรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจตุรรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยที่ปลายยื่นกำหนดให้เป็นสัดส่วนกับความยาวช่วงของอิลาสติกคา  $\beta L$  มีกรณีที่ค่าปลายยื่น  $\beta = 0.25$   $0.50$  และ  $0.75$  โดยทำการแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงหมุน  $k = 0$   $5$   $10$   $100$   $1,000$  และ อนันต์ สามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

#### 5.1 ผลของปลายยื่นของอิลาสติกคา

ผลของปลายยื่นของอิลาสติกคามีอิทธิพลเพิ่มมากขึ้น เมื่อปลายยื่นมีค่าที่เพิ่มขึ้น เป็นผลให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤติเพิ่มขึ้น และทำให้ระบบเกิดการตั้งรูกันระหว่างส่วนที่เป็นปลายยื่นและส่วนที่อยู่ด้านในของจตุรรองรับ เมื่อปลายยื่นมีความยาวมากขึ้นจนกระทั่งอิทธิพลของส่วนที่เป็นปลายยื่นมีมากกว่าส่วนของอิลาสติกคาที่อยู่ภายในจตุรรองรับเป็นผลให้ในบางกรณีอิลาสติกคาไม่สามารถหาภาวะสมดุลได้

#### 5.2 ผลกระทบของสปริงหมุน

ในส่วน of ผลกระทบของสปริงหมุนนั้น พบว่าสติฟเนสของสปริงหมุนที่เพิ่มขึ้นทำให้ระบบมีสติฟเนสที่เพิ่มขึ้น และเป็นผลให้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤติมีค่าที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยที่เมื่อสติฟเนสมีค่าเป็นศูนย์เปรียบเสมือนจตุรรองรับเป็นแบบหมุนไร้แรงเสียดทาน ในขณะที่สติฟเนสที่มีค่าเป็นอนันต์เปรียบเสมือนจตุรรองรับแบบยึดแน่น ในกรณีที่  $\beta = 0.75$  การเพิ่มขึ้นของค่าสติฟเนสของสปริงหมุนทำให้ต้องอาศัยน้ำหนักบรรทุกที่มากขึ้นในการทำให้เกิดการแอ่นตัว ซึ่งเป็นการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกของปลายยื่นเช่นเดียวกัน เป็นผลให้อิทธิพลของปลายยื่นเพิ่มขึ้นจนกระทั่งไม่สามารถหาภาวะสมดุลได้ในบางกรณี

### 5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 จากการศึกษาครั้งนี้พบว่า ระเบียบวิธียิงเป้า สามารถนำมาใช้ประยุกต์ นำมาใช้แก้ปัญหาอุตสาหกรรม ที่มีการการแอ่นตัวมากและมีปลายยื่นได้ แต่มีบางกรณีที่ไม่สามารถหาสถานะสมดุลของระบบได้ ซึ่งอาจเป็นเพราะการขาดแรงเสียดทานในการทำให้ระบบเกิดสถานะสมดุล ดังนั้นอาจเพิ่มแรงเสียดทานไปที่จุดรองรับแบบเลื่อนได้เพื่อให้มีแรงที่กระทำให้ระบบเกิดสถานะสมดุล

5.3.2 การศึกษาที่น่าสนใจทำการศึกษาต่อจากการศึกษาครั้งนี้ เช่น การหาข้อเท็จจริงของผลเฉลยในช่วงที่ไม่สามารถหาค่าได้ การศึกษาผลกระทบของวัสดุที่เป็นแบบไร้เชิงเส้น การศึกษาผลกระทบของจุดรองรับแบบอื่นๆ เป็นต้น



## บรรณานุกรม

- [1] S. Chucheepsakul and T. Huang, "Finite element solution of large deflection analysis of a class of beam," *Computational Method in Engineering. Advances & Applications*, Vol 1, pp. 45-50, 1992
- [2] สมเจตน์ อยู่สนิท. (2536). การใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายข้างหนึ่งเลื่อนได้อย่างอิสระ. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [3] สุรพันธ์ บุญเจริญ. (2536). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเลื่อนได้อย่างอิสระ โดยวิธีอิลิปติกอินทีกรัล. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์. (2538). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [5] X. Q. He, C. M. Wang and K. Y. Lam, "Analytical bending solutions of elastica with one end held while the other end portion slides on a friction support." *Archive of Applied Mechanics*, Vol.67, No.8, pp. 543-554, 1997
- [6] C.M. Wang, K.Y. Lain and X.Q. He, "Instability of variable-arc-length elastica under follower force," *Mechanics Research Communication*, Vol. 25, No.2, pp.189-194, 1997
- [7] สุนิสา รอดสังวาลย์. (2541). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [8] กอปรชัย ศิริตระกูลมั่งคั่ง. (2545). การหาคำตอบทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรางจ์. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [9] S. Chucheepsakul and B. Phungpaingam, "Elliptic integral solution of variable-arc-length elastica under an inclined follower force," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 84, No.1, pp. 29-38, 2004

## บรรณานุกรม (ต่อ)

- [10] X. Zhang and J. Yang, "Inverse problem of elastica of a variable-arc-length beam subjected to a concentrated load," *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 21, No. 5, pp. 444-450, 2005
- [11] นฤพนธ์ ศีลาภากุล. (2548). การแอ่นตัวมากของคานที่ทำจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).
- [12] C.Athisakul and S. Chucheepsakul, "Effect of inclination on bending of variable-arc-length beams subjected to uniform self-weight," *Engineering Structures*, Vol. 30(2008), No. 4, pp. 902-908, 2007
- [13] R.H. Plaut, D.A. Dillard and A.D. Borum, "Collapse of heavy cantilevered elastica with frictional internal support," *Journal of Applied Mechanics.*, Vol.78, No.4, 041011 (5 pages), 2011
- [14] C. Athisakul, B. Phungpaingam ,G. Juntarakong, and S. Chucheepsakul," Effect of Material Nonlinearity on Large Deflection of Variable-Arc-Length Beams Subjected to Uniform Self-Weight.," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2012, Article ID 345461, 9 pages, 2012
- [15] A. Humer, "Elliptic integral solution of the extensible elastica with a variable length under a concentrated force," *Acta Mechanica*, Vol. 222, No. 3, pp. 209-223, 2011
- [16] T. Pulngern, T. Sudsanguan, C. Athisakul and S. Chucheepsakul, "Elastica of a variable-arc-length circular curved beam subjected to an end follower force," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.49, pp. 129-136, 2013
- [17] B. Phungpaingam, C. Athisakul and S. Chucheepsakul, "Instability of variable-arc-length elastica subject to end moment," *The IES Journal Part A : Civil & Structure Engineering*, Vol.5, No.2, pp. 85-89, 2012
- [18] ณัฐภัฏ พิชัยยุทธ์ และบุญชัย ผึ้งไผ่งาม. (2558). พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอิลาสติคคา. การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 20, 8 – 10 กรกฎาคม 2558, ชลบุรี



## บรรณานุกรม (ต่อ)

- [19] B. Phungpaingam and S. Chucheepsakul, "Postbuckling behavior of variable-arc-length elastica connected with a rotational spring joint including the effect of configurational force," *Meccanica.*, <http://doi.org/10.1007/s11012-018-0847-x>, In Press
- [20] T. Pulngern, S. Chucheepsakul and M. W. Halling, "Vibrations of a Slightly Inclined Variable-Arc-Length Beam," Analytical and Experimental. Conference: 2004 IMAC-XXII: Conference & Exposition on Structural Dynamics., Dearborn, Michigan, USA, Paper No. 159, January 26 – 29 2004
- [21] S. Chucheepsakul and T. Monprapussorn, "Divergence instability of variable-arc-length elastica pipes transported fluid," *Journal of Fluids and structures* (2000), Vol.14, No.6, pp.895 - 916, 2000
- [22] C. Athisakul, B. Phungpaingam, W. Chatanin and S. Chucheepsakul, "Critical weight of flexible pipe conveying fluid subjected to end moments," *The IES Journal Part A : Civil & Structure Engineering.*, Vol.5, No.2, pp 90-94, 2012
- [23] ปราโมทย์ เตชะอำไพ และนิพนธ์ วรรณโสภากย์. (2557). *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในทางวิศวกรรม*. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [24] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. (2557). *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [25] อัมพล ชรรณเจริญ. (2551). *วิธีการคำนวณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์
- [26] ธนาวุฒิ ประกอบผล. (2555). *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข*. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์ท็อป จำกัด

ภาคผนวก

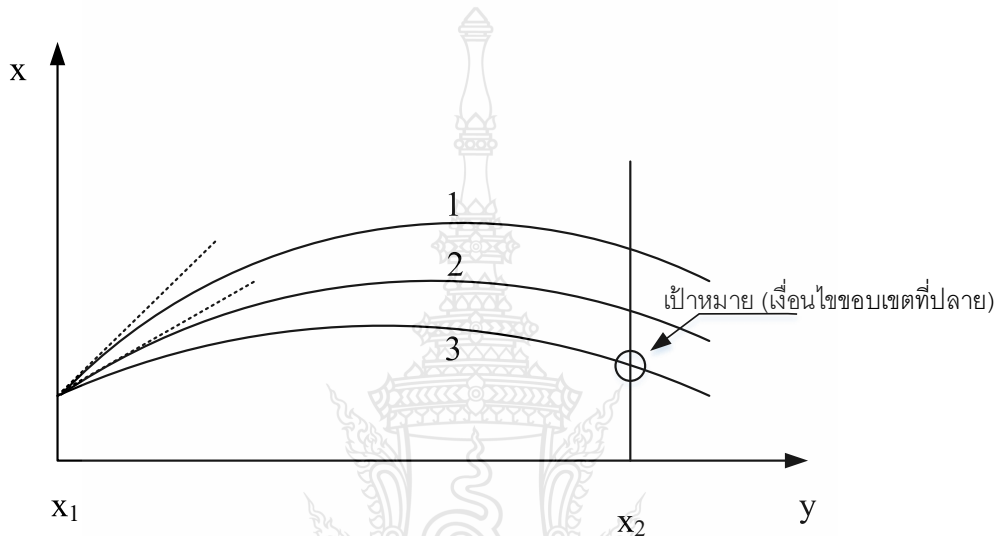


ภาคผนวก ก

วิธียิงเป้า



วิธียิงเป้า เป็นกระบวนการที่เหมาะสมในการแก้ไขปัญหาค่าขอบเขตสองจุด กำหนดโดยเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขที่ปลาย เมื่อเริ่มกระบวนการยิงเป้า จะมีการสมมติค่าเริ่มต้น และทำการยิงไปยังเป้าหมาย การปรับปรุงค่าเริ่มต้นจะเกิดขึ้นเมื่อผลลัพธ์การยิงเป้าไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยเงื่อนไขในแต่ละจุดจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ค่าเริ่มต้นจะถูกปรับปรุงจนกระทั่งผลลัพธ์ของการยิงเป้าสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต



### รูปที่ ก.1 กระบวนการยิงเป้า

กระบวนการยิงเป้า ประกอบด้วย

1. สมการครอบคลุมปัญหา ในการศึกษาครั้งนี้ประกอบด้วย 6 สมการ (3.1 - 3.6)
2. เงื่อนไขขอบเขต โดยแบ่งเป็น 2 ช่วงดังนี้

#### 2.1. ระหว่างจุด A และ B

ที่จุด A มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 0$ )

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_A, \theta = \theta_A, \bar{Q} = \bar{Q}_A, \bar{N} = \bar{N}_A$$

ที่จุด B<sup>-</sup> มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_t$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \theta = \theta_B, \bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)}, \bar{N} = \bar{N}_B$$

#### 2.2. ระหว่างจุด B และ C

ที่จุด B<sup>+</sup> มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_t$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \theta = \theta_B, \bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)} + \bar{R}_B, \bar{N} = \bar{N}_B$$

ที่จุด  $C$  มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 1 + \beta$ )

$$\bar{x} = \bar{x}_C, \bar{y} = \bar{y}_C, \bar{M} = 0, \theta = \theta_C, \bar{Q} = 0, \bar{N} = 0$$

3. วิธีการยิงเป้า

- 3.1. ทำการป้อนค่าความยาวส่วนโค้ง ( $\bar{s}_r$ ), ค่าสถิติเพศของสปริง ( $\bar{k}$ ) และค่าสัดส่วนที่สัมพันธ์กับความยาวช่วง ( $\beta$ )
- 3.2. ทำการประมาณค่าเริ่มต้นให้แก่ค่า  $\theta, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A$  และ  $\bar{Q}_A$
- 3.3. โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข สมการที่ 3.1 – 3.6 ด้วยระเบียบวิธีรุงเง คูดตา โดยจะต้องสอดคล้อง กับเงื่อนไขในสมการที่ (3.19)
- 3.4. ปรับแก้ค่าที่ได้ทำการประมาณไว้ในขั้นตอนที่ โดยกระบวนการทำซ้ำ 2 ด้วยระเบียบวิธีนิวตัน ราบสัน (ในโปรแกรม MATLAB ใช้คำสั่ง “fsolve”) จนกว่าจะมีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

สำหรับรายละเอียด วิธียิงเป้า สามารถศึกษาได้จาก [24] และ [25]





ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณ วิธียิงเป้า โดยใช้ MATLAB กรณีจตุรกรรับแบบสปริงหมุน

หาผลเฉลย ปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเองปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจตุรกรรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจตุรกรรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยกำหนดค่าเริ่มต้น  $\bar{s}_t$ ,  $\bar{k}$  และ  $\beta L$  สำหรับหาค่าผลเฉลยของ  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A$  และ  $\bar{Q}_A$

**function VAL\_self**

% overhanging beam with self-weight

clear

global st pl beta k

format long

st=input('length of curve (st)');

k=input('Rotation spring stiffness (k spring)');

v(1)=input('approximate Angle (ceta0) ');

v(2)=input('approximate Distributed load (w)');

v(3)=input('approximate reaction at support B (Rb)');

v(4)=input('approximate Normal force (N)');

v(5)=input('approximate Shear force (QA)');

beta=input('Beta L (Beta)');

pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');

lim=input('Limitation= ');

inc=input('Increment= ');

fid=fopen('Output\_overhang.txt','wt');

fprintf(fid,'Output of overhang\n');

fprintf(fid,'st        ceta0        w        Rb        Nb        Q\n');

```

i=0;

dv=0.0001;

while (st<lim)
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5)];
    options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',1000,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_VAL',v0,options);
    test=max(abs(fval));

while (test>1.0e-7&&i<25)
    i=i+1;
    v(1)=v(1)+dv;v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;v(5)=v(5)+dv;
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5)];
    [v fval]=fsolve('score_VAL',v0,options);
end

fprintf(fid,'%12.9f %12.9f %12.9f %12.9f %12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4));
st=st+inc ;
end

fclose(fid)

end

function r=score_VAL(v)
global st pl beta w k
b=zeros(2,1);

```



```

r=zeros(5,1);
c=zeros(6,1);

ceta0=v(1);
w=v(2);
RB=v(3);
N=v(4);
Q=v(5);

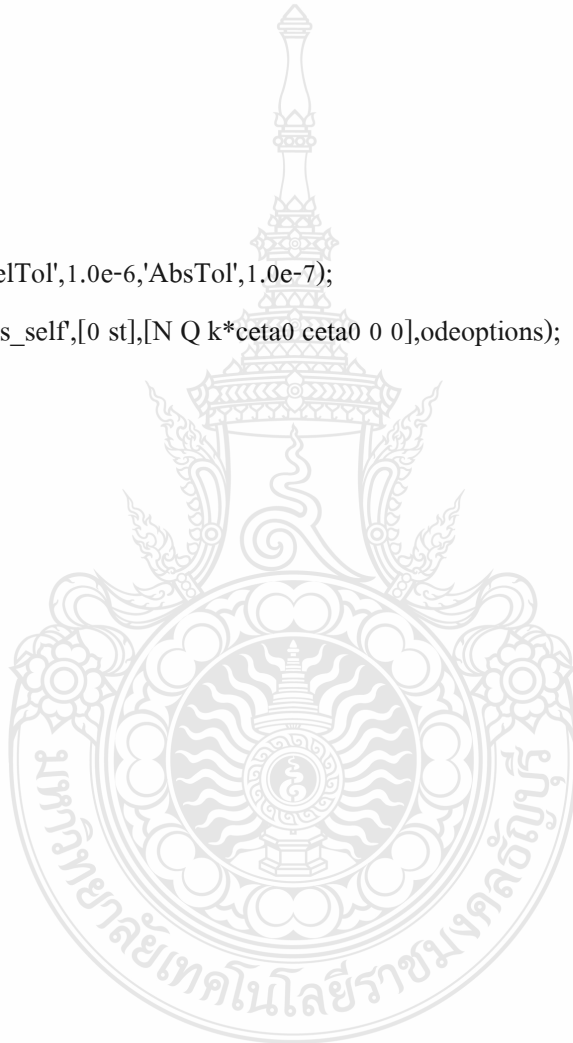
odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);
[x1 y1]=ode45('goveqs_self',[0 st],[N Q k*ceta0 ceta0 0 0],odeoptions);

lastrow1=size(y1,1);

b(1)=y1(lastrow1,1);
b(2)=y1(lastrow1,2);
b(3)=y1(lastrow1,3);
b(4)=y1(lastrow1,4);
b(5)=y1(lastrow1,5);
b(6)=y1(lastrow1,6);

Nb=b(1);
Qb=b(2);
Mb=b(3);
cetab=b(4);
xb=b(5);
yb=b(6);

```



```
st2=(1+beta);
```

```
[x2 y2]=ode45('goveqs_self',[st st2],[Nb RB+Qb Mb cetab xb yb],odeoptions);
```

```
lastrow2=size(y2,1);
```

```
c(1)=y2(lastrow2,1);
```

```
c(2)=y2(lastrow2,2);
```

```
c(3)=y2(lastrow2,3);
```

```
%c(4)=y2(lastrow2,4);
```

```
%c(5)=y2(lastrow2,5);
```

```
%c(6)=y2(lastrow2,6);
```

```
if (pl==1)
```

```
    figure(1)
```

```
    hold on;
```

```
    title ('Equilibrium shape');
```

```
    plot(y1(:,5),y1(:,6));
```

```
    plot(y2(:,5),y2(:,6));
```

```
    axis on;
```

```
    axis equal;
```

```
    grid on;
```

```
end
```

```
r(1)=y1(lastrow1,5)-1;
```

```
r(2)=y1(lastrow1,6);
```

```
r(3)=y2(lastrow2,1);
```



```
r(4)=y2(lastrow2,2);
```

```
r(5)=y2(lastrow2,3);
```

```
end
```

```
function dydx=goveqs_self(x,y)
```

```
global w
```

```
dydx=zeros(6,1);
```

```
dydx(1)=-y(2)*y(3)+w*sin(y(4));    % Normal force (N)
```

```
dydx(2)=((y(1)*y(3))-w*cos(y(4)));  % Shear force (Q)
```

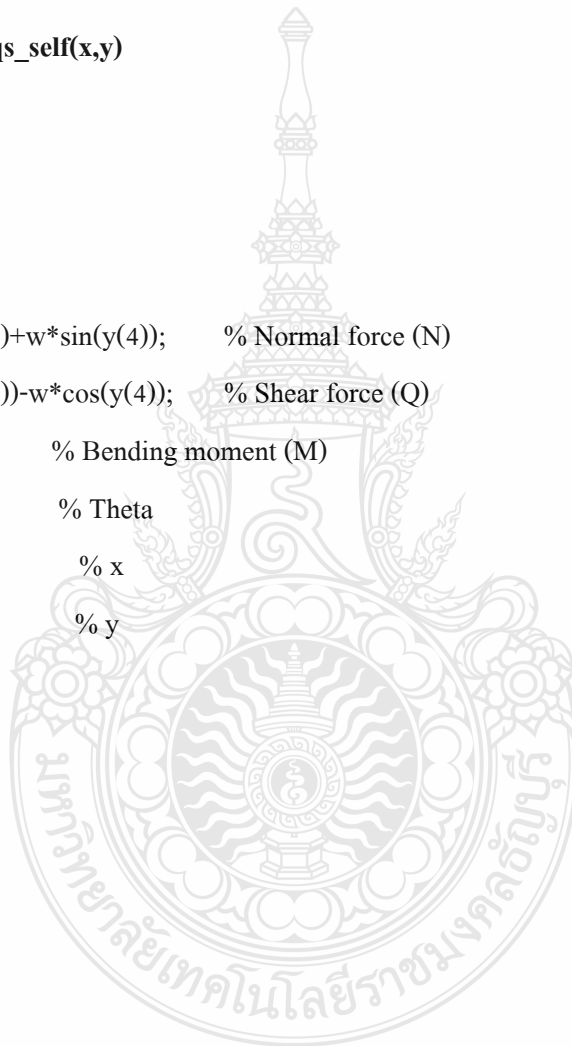
```
dydx(3)=y(2);                        % Bending moment (M)
```

```
dydx(4)=y(3);                        % Theta
```

```
dydx(5)=cos(y(4));                  % x
```

```
dydx(6)=sin(y(4));                  % y
```

```
end
```



ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณ วิธียิงเป้า โดยใช้ MATLAB กรณีจตุรรองรับแบบยึดแน่น

หาผลเฉลย ปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำ ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเองปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจตุรรองรับแบบยึดแน่น ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจตุรรองรับแบบไร้แรงเสียดทานโดยกำหนดค่าเริ่มต้น  $\bar{s}_i$  และ  $\beta$  สำหรับหาค่าผลเฉลยของ  $\bar{s}_i, \bar{M}_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A$  และ  $\bar{Q}_A$

```
function VALFIX_self
% overhanging beam with self-weight
clear
global st pl beta

format long

st=input('length of curve (st)');
k=input('Rotation spring stiffness (k spring)');
v(1)=input('approximate Moment (Ma) ');
v(2)=input('approximate Distributed load (w)');
v(3)=input('approximate reaction at support B (Rb)');
v(4)=input('approximate Normal force (N)');
v(5)=input('approximate Shear force (QA)');

beta=input('Beta L (Beta)');
pl=0;
%pl=input('Plot configuration shapes (yes (1), no (0))= ');

lim=input('Limitation= ');
inc=input('Increment= ');
fid=fopen('Output_overhang.txt','wt');
fprintf(fid,'Output of overhang\n');
```

```

fprintf(fid,'st      ceta0      w      Rb      Nb      Q\n');
i=0;

dv=0.01;

while (st<lim)
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5)];
    options=optimset(optimset('fsolve'),'MaxFunEvals',1000,'TolFun',1e-15,'TolX',1.0e-15);
    [v fval]=fsolve('score_VALFIX',v0,options);
    test=max(abs(fval));

while (test>1.0e-7&& i<25)
    i=i+1;
    v(1)=v(1)+dv;v(2)=v(2)+dv;v(3)=v(3)+dv;v(4)=v(4)+dv;v(5)=v(5)+dv;
    v0=[v(1) v(2) v(3) v(4) v(5)];
    [v fval]=fsolve('score_VALFIX',v0,options);
end

fprintf(fid,'%12.9f      %12.9f      %12.9f      %12.9f      %12.9f
%12.9f\n',st,v(1),v(2),v(3),v(4));
st=st+inc ;
end

fclose(fid)
end

```

```

function r=score_VALFIX(v)

global st pl beta w

b=zeros(2,1);

r=zeros(5,1);

c=zeros(6,1);

M=v(1);

w=v(2);

RB=v(3);

N=v(4);

Q=v(5);

odeoptions=odeset('RelTol',1.0e-6,'AbsTol',1.0e-7);

[x1 y1]=ode45('goveqs_self',[0 st],[N Q M 0 0 0],odeoptions);

lastrow1=size(y1,1);

b(1)=y1(lastrow1,1);

b(2)=y1(lastrow1,2);

b(3)=y1(lastrow1,3);

b(4)=y1(lastrow1,4);

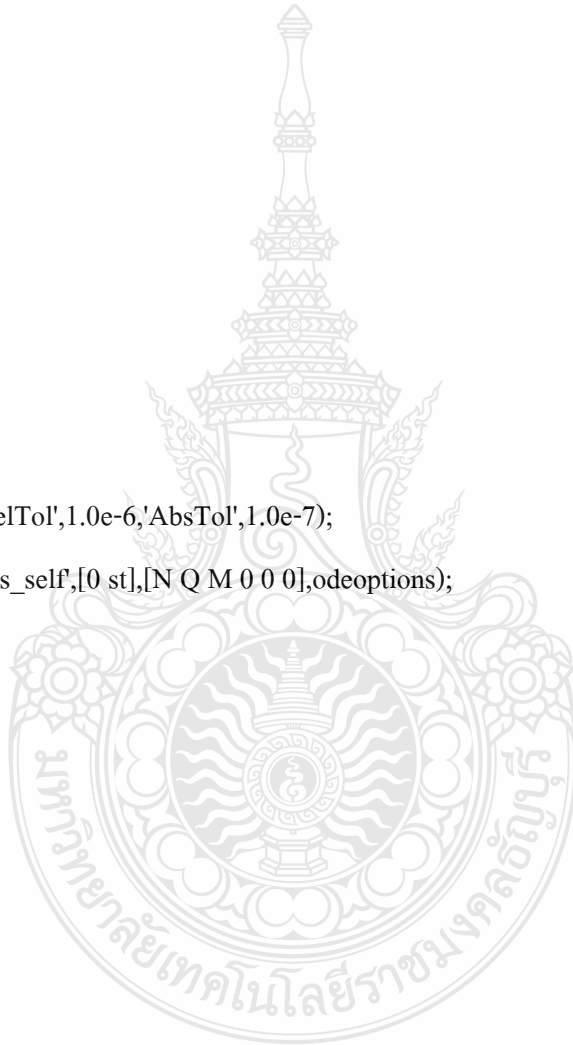
b(5)=y1(lastrow1,5);

b(6)=y1(lastrow1,6);

Nb=b(1);

Qb=b(2);

```



```

Mb=b(3);
cetab=b(4);
xb=b(5);
yb=b(6);

st2=(1+beta);

[x2 y2]=ode45('goveqs_self',[st st2],[Nb RB+Qb Mb cetab xb yb],odeoptions);

lastrow2=size(y2,1);

c(1)=y2(lastrow2,1);
c(2)=y2(lastrow2,2);
c(3)=y2(lastrow2,3);
%c(4)=y2(lastrow2,4);
%c(5)=y2(lastrow2,5);
%c(6)=y2(lastrow2,6);

if (pl==1)
    figure(1)
    hold on;
    title ('Equilibrium shape');
    plot(y1(:,5),y1(:,6));
    plot(y2(:,5),y2(:,6));
    axis on;

```



```

axis equal;

grid on;

end

r(1)=y1(lastrow1,5)-1;
r(2)=y1(lastrow1,6);
r(3)=y2(lastrow2,1);
r(4)=y2(lastrow2,2);
r(5)=y2(lastrow2,3);

```

```
end
```

```

function dydx=goveqs_self(x,y)
global w
dydx=zeros(6,1);

dydx(1)=-y(2)*y(3)+w*sin(y(4)); % Normal force (N)
dydx(2)=(y(1)*y(3))-w*cos(y(4)); % Shear force (Q)
dydx(3)=y(2); % Bending moment (M)
dydx(4)=y(3); % Theta
dydx(5)=cos(y(4)); % x
dydx(6)=sin(y(4)); % y

```

```
end
```



ภาคผนวก ค

ผลการคำนวณเชิงตัวเลข



ตารางที่ ค.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.20757	5.133468	4.036279	-0.21329	2.54637
1.02	-0.29083	6.530333	5.173756	-0.37458	3.416142
1.03	-0.35318	7.245918	5.789908	-0.49284	3.984184
1.04	-0.40464	7.62885	6.152682	-0.57617	4.395283
1.05	-0.44915	7.821492	6.370504	-0.63139	4.707994
1.06	-0.48871	7.896924	6.498599	-0.66411	4.952957
1.07	-0.52455	7.897066	6.568442	-0.67885	5.148449
1.08	-0.55743	7.847622	6.59924	-0.67925	5.3063
1.09	-0.58792	7.765075	6.603273	-0.66824	5.434617
1.10	-0.61641	7.660351	6.588664	-0.64817	5.539197
1.11	-0.64319	7.54087	6.560935	-0.62095	5.62433
1.12	-0.66849	7.411771	6.523916	-0.58809	5.69328
1.13	-0.6925	7.276668	6.480316	-0.55086	5.748585
1.14	-0.71536	7.138127	6.432072	-0.51026	5.792261
1.15	-0.73721	6.99799	6.380589	-0.46712	5.825936
1.16	-0.75812	6.857582	6.326898	-0.42212	5.850944
1.17	-0.7782	6.717861	6.271755	-0.37583	5.868391
1.18	-0.79752	6.579514	6.215724	-0.3287	5.879206
1.19	-0.81613	6.443035	6.159224	-0.2811	5.884176
1.20	-0.83409	6.308774	6.102567	-0.23336	5.883976
1.21	-0.85145	6.17697	6.045988	-0.18573	5.879186
1.22	-0.86826	6.047786	5.989661	-0.13842	5.870311
1.23	-0.88454	5.921321	5.933714	-0.0916	5.857791
1.24	-0.90033	5.797632	5.878244	-0.04542	5.842013
1.249	-0.91551	5.677936	5.823866	-0.00045	5.82352

ตารางที่ ค.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.12666	8.446363	6.01511	-0.56298	4.765123
1.02	-0.17509	10.70977	7.632533	-1.02861	6.32964
1.03	-0.20997	11.85132	8.464277	-1.40875	7.317636
1.04	-0.23779	12.45305	8.923445	-1.7168	8.011691
1.05	-0.26109	12.75197	9.176343	-1.96523	8.526568
1.06	-0.28122	12.86851	9.306365	-2.16479	8.921911
1.07	-0.29897	12.87067	9.359976	-2.32439	9.232762
1.08	-0.31487	12.79939	9.364763	-2.4513	9.481334
1.09	-0.32926	12.68036	9.337821	-2.5514	9.682476
1.10	-0.34241	12.53024	9.290091	-2.62945	9.846529
1.11	-0.35451	12.3601	9.228738	-2.68928	9.980933
1.12	-0.36571	12.17742	9.158548	-2.73401	10.09119
1.13	-0.37612	11.98732	9.082761	-2.76619	10.18147
1.14	-0.38584	11.79335	9.003592	-2.78789	10.255
1.15	-0.39494	11.59802	8.92257	-2.80084	10.3143
1.16	-0.40349	11.40304	8.840747	-2.80644	10.3614
1.17	-0.41153	11.20965	8.758854	-2.80587	10.39796
1.18	-0.41912	11.01868	8.677389	-2.80012	10.42532
1.19	-0.42629	10.83072	8.596691	-2.79001	10.4446
1.20	-0.43308	10.64614	8.516984	-2.77622	10.45677
1.21	-0.43951	10.46522	8.438413	-2.75936	10.46261
1.22	-0.44562	10.28808	8.361063	-2.7399	10.46281
1.23	-0.45141	10.11482	8.284977	-2.71828	10.45797
1.24	-0.45692	9.945442	8.210173	-2.69485	10.44859
1.249	-0.46165	9.796314	8.143939	-2.67247	10.43666

ตารางที่ ค.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.09026	9.811022	6.823304	-0.83056	5.670954
1.02	-0.12391	12.38846	8.612984	-1.52346	7.469529
1.03	-0.14768	13.65705	9.507527	-2.09566	8.56908
1.04	-0.1663	14.30227	9.983227	-2.56639	9.31675
1.05	-0.18167	14.60252	10.23099	-2.95351	9.853744
1.06	-0.19476	14.69823	10.34564	-3.27228	10.25303
1.07	-0.20617	14.66792	10.37934	-3.53523	10.55702
1.08	-0.21628	14.55827	10.36261	-3.75248	10.79225
1.09	-0.22535	14.39823	10.31407	-3.93214	10.97617
1.10	-0.23355	14.2063	10.24541	-4.08072	11.12074
1.11	-0.24104	13.99458	10.16415	-4.20345	11.23443
1.12	-0.24791	13.77115	10.07522	-4.30456	11.32339
1.13	-0.25425	13.54144	9.981873	-4.38747	11.39221
1.14	-0.26012	13.30915	9.886281	-4.45499	11.44438
1.15	-0.26558	13.07683	9.789896	-4.50943	11.4826
1.16	-0.27067	12.84619	9.693684	-4.55268	11.50901
1.17	-0.27542	12.61843	9.598286	-4.58635	11.52531
1.18	-0.27987	12.39434	9.504114	-4.61174	11.5329
1.19	-0.28405	12.17442	9.411425	-4.62999	11.5329
1.20	-0.28798	11.959	9.32037	-4.64204	11.52627
1.21	-0.29167	11.74827	9.231026	-4.64869	11.5138
1.22	-0.29514	11.54231	9.143417	-4.65062	11.49617
1.23	-0.29842	11.34114	9.057535	-4.64844	11.47395
1.24	-0.30151	11.1447	8.973347	-4.64264	11.44764
1.249	-0.30414	10.97191	8.898988	-4.63469	11.42082

ตารางที่ ค.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25, \bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.01435	12.44354	8.367664	-1.5632	7.378072
1.02	-0.0194	15.56124	10.44987	-2.8387	9.505207
1.03	-0.02281	17.00565	11.42767	-3.87392	10.68776
1.04	-0.02537	17.67282	11.90376	-4.71528	11.4131
1.05	-0.02742	17.92355	12.11682	-5.40227	11.87844
1.06	-0.02911	17.93644	12.18279	-5.96659	12.18334
1.07	-0.03055	17.80896	12.16362	-6.43294	12.38375
1.08	-0.0318	17.59745	12.09443	-6.82047	12.51328
1.09	-0.0329	17.3358	11.99588	-7.14398	12.59315
1.10	-0.03388	17.04501	11.88049	-7.41502	12.63723
1.11	-0.03476	16.73835	11.75595	-7.64262	12.65491
1.12	-0.03555	16.42433	11.62709	-7.83394	12.65272
1.13	-0.03627	16.10846	11.49692	-7.99471	12.63529
1.14	-0.03693	15.79432	11.36732	-8.12954	12.60599
1.15	-0.03753	15.48422	11.23945	-8.24219	12.56733
1.16	-0.03809	15.17963	11.11399	-8.33573	12.52119
1.17	-0.0386	14.88146	10.99133	-8.41272	12.46902
1.18	-0.03908	14.59021	10.87166	-8.47529	12.41194
1.19	-0.03951	14.30615	10.75502	-8.52523	12.35085
1.20	-0.03992	14.02938	10.64138	-8.56406	12.28646
1.21	-0.0403	13.75985	10.53068	-8.59307	12.21933
1.22	-0.04064	13.49746	10.42279	-8.61336	12.14994
1.23	-0.04097	13.24204	10.3176	-8.62589	12.07866
1.24	-0.04127	12.99339	10.21496	-8.6315	12.00582
1.249	-0.04152	12.77521	10.12465	-8.63122	11.93915

ตารางที่ ค.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.00152	12.86228	8.611168	-1.70677	7.642492
1.02	-0.00205	16.05887	10.73551	-3.09001	9.804806
1.03	-0.00241	17.52397	11.72248	-4.20615	10.98341
1.04	-0.00267	18.18833	12.19535	-5.10883	11.68987
1.05	-0.00288	18.42607	12.40038	-5.84293	12.13068
1.06	-0.00305	18.42179	12.45671	-6.44391	12.40948
1.07	-0.0032	18.27575	12.42773	-6.93916	12.58413
1.08	-0.00333	18.04565	12.34916	-7.34972	12.68908
1.09	-0.00344	17.76603	12.24189	-7.69174	12.74588
1.10	-0.00354	17.45814	12.11848	-7.97774	12.7685
1.11	-0.00363	17.13534	11.98662	-8.21748	12.7663
1.12	-0.0037	16.80614	11.85108	-8.41866	12.74571
1.13	-0.00378	16.47602	11.71479	-8.5874	12.71129
1.14	-0.00384	16.14848	11.57959	-8.72862	12.66628
1.15	-0.0039	15.82577	11.44656	-8.84633	12.61309
1.16	-0.00396	15.50928	11.31634	-8.94381	12.5535
1.17	-0.00401	15.19985	11.18925	-9.02377	12.48887
1.18	-0.00406	14.89795	11.06545	-9.08846	12.42024
1.19	-0.0041	14.60379	10.94495	-9.13978	12.34842
1.20	-0.00414	14.3174	10.82768	-9.17934	12.27406
1.21	-0.00418	14.03871	10.71355	-9.2085	12.19767
1.22	-0.00421	13.76757	10.60242	-9.22844	12.11967
1.23	-0.00424	13.50377	10.49414	-9.24017	12.04037
1.24	-0.00427	13.2471	10.38856	-9.24455	11.96007
1.249	-0.0043	13.02197	10.29573	-9.24286	11.88713

ตารางที่ ค.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.23765	10.36026	11.53752	0.615858	3.974517
1.02	-0.32974	12.60089	13.93917	0.556788	5.102252
1.03	-0.39525	12.92558	14.26609	0.14538	5.648532
1.04	-0.44636	12.40077	13.71675	-0.336	5.908465
1.05	-0.48862	11.6062	12.91138	-0.74015	6.029925
1.06	-0.5252	10.8006	12.11339	-1.03474	6.088211
1.07	-0.5579	10.06884	11.40311	-1.23474	6.117693
1.08	-0.58779	9.426001	10.79083	-1.36355	6.133125
1.09	-0.6155	8.86488	10.26589	-1.44095	6.140778
1.10	-0.64147	8.373231	9.813784	-1.48151	6.143364
1.15	-0.75286	6.606788	8.258007	-1.40518	6.107114
1.20	-0.84382	5.476305	7.324453	-1.16601	6.009576
1.25	-0.92137	4.659272	6.677885	-0.90671	5.868332
1.30	-0.98911	4.025044	6.187091	-0.66605	5.698101
1.35	-1.04925	3.510258	5.791019	-0.4548	5.510226
1.40	-1.10325	3.079758	5.457563	-0.2746	5.312953
1.45	-1.15217	2.711987	5.168285	-0.12386	5.112134
1.49	-1.18819	2.453191	4.960915	-0.02276	4.951726
1.499	-1.19594	2.398662	4.916726	-0.00223	4.915848

ตารางที่ ค.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.15959	19.82112	21.23599	3.000215	8.18802
1.02	-0.22173	25.94854	27.39697	4.036719	10.9489
1.03	-0.26508	28.24032	29.40207	3.640222	12.44035
1.04	-0.29636	27.68208	28.48067	2.192849	13.0208
1.05	-0.31776	25.17933	25.71371	0.258424	12.90052
1.06	-0.33182	22.0691	22.50688	-1.4635	12.41515
1.07	-0.34216	19.37926	19.83388	-2.6431	11.90113
1.08	-0.35114	17.31959	17.83703	-3.37622	11.48802
1.09	-0.3596	15.75442	16.34897	-3.83034	11.1768
1.10	-0.36776	14.5336	15.20845	-4.11692	10.94167
1.15	-0.40439	10.9499	12.00561	-4.54658	10.31105
1.20	-0.43404	9.06112	10.45174	-4.46867	9.982948
1.25	-0.45772	7.800309	9.485954	-4.28317	9.71394
1.30	-0.47659	6.854859	8.799903	-4.07732	9.450562
1.35	-0.49154	6.097144	8.269652	-3.87713	9.180528
1.40	-0.50328	5.463773	7.835627	-3.69102	8.902499
1.45	-0.51233	4.918746	7.465787	-3.52135	8.61803
1.49	-0.51791	4.530877	7.203359	-3.39758	8.387161
1.499	-0.51898	4.44852	7.147656	-3.37116	8.334918



ตารางที่ ค.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.11864	24.07742	25.60424	4.24308	10.25802
1.02	-0.16537	32.16641	33.68564	5.833755	13.97184
1.03	-0.19785	35.86659	36.98242	5.643862	16.09816
1.04	-0.22112	36.129	36.70662	4.040832	17.01554
1.05	-0.2363	33.44728	33.56625	1.422142	16.83733
1.06	-0.24383	28.85382	28.77187	-1.4457	15.80244
1.07	-0.24659	24.31705	24.28474	-3.59071	14.54821
1.08	-0.2485	20.95869	21.06747	-4.83693	13.56505
1.09	-0.25093	18.60236	18.85814	-5.53501	12.87735
1.10	-0.25389	16.88471	17.27571	-5.94407	12.38979
1.15	-0.27091	12.31022	13.24	-6.54038	11.199
1.20	-0.28614	10.08182	11.4382	-6.50059	10.65289
1.25	-0.2983	8.630851	10.35345	-6.32914	10.25388
1.30	-0.30768	7.552784	9.595169	-6.12178	9.896059
1.35	-0.31473	6.691354	9.014117	-5.90706	9.549791
1.40	-0.31984	5.971306	8.54066	-5.69539	9.20633
1.45	-0.32333	5.350685	8.138129	-5.49095	8.863427
1.49	-0.32512	4.907941	7.852813	-5.33382	8.589294
1.499	-0.32541	4.813777	7.792279	-5.2993	8.527643

ตารางที่ ค.9 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50, \bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.02082	32.84135	34.57497	6.5624	15.1226
1.02	-0.02941	45.20039	46.82134	8.758005	21.44112
1.03	-0.03531	52.0492	53.02888	8.616488	25.32105
1.04	-0.03942	54.59599	54.70899	6.756918	27.23532
1.05	-0.04198	53.19284	52.43876	3.536714	27.28056
1.06	-0.04289	47.87585	46.49645	-0.71997	25.40676
1.07	-0.04188	39.00628	37.55236	-5.29856	21.71379
1.08	-0.03977	30.14574	29.16515	-8.40286	17.85981
1.09	-0.03837	24.67851	24.17133	-9.68037	15.51885
1.10	-0.03772	21.40528	21.23873	-10.2005	14.1723
1.15	-0.03781	14.50156	15.28645	-10.608	11.58675
1.20	-0.03888	11.6343	13.02513	-10.4121	10.60769
1.25	-0.03981	9.845213	11.7286	-10.1202	9.97085
1.30	-0.04049	8.537428	10.8418	-9.79607	9.455354
1.35	-0.04092	7.499702	10.16942	-9.45849	8.995931
1.40	-0.04114	6.634767	9.624328	-9.11615	8.568049
1.45	-0.04119	5.88973	9.162061	-8.77404	8.160688
1.49	-0.04111	5.357826	8.834886	-8.50268	7.84547
1.499	-0.04108	5.244601	8.765524	-8.44206	7.775599

ตารางที่ ค.10 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.00225	34.31884	36.08063	6.878612	16.03699
1.02	-0.00319	47.44551	49.07067	9.061206	22.89904
1.03	-0.00383	54.86161	55.80168	8.826818	27.14313
1.04	-0.00428	57.82499	57.84391	6.863793	29.25838
1.05	-0.00455	56.70869	55.79765	3.562639	29.35497
1.06	-0.00464	51.53068	49.91954	-0.76085	27.38821
1.07	-0.00452	42.32824	40.5723	-5.5416	23.34028
1.08	-0.00424	32.16133	30.93572	-9.03361	18.71748
1.09	-0.00405	25.80316	25.14642	-10.4238	15.89223
1.10	-0.00395	22.15678	21.89287	-10.9336	14.34406
1.15	-0.00392	14.81344	15.58095	-11.235	11.51604
1.20	-0.00402	11.84628	13.24731	-10.989	10.47823
1.25	-0.00411	10.00671	11.91842	-10.6637	9.812218
1.30	-0.00417	8.665414	11.01209	-10.3111	9.279607
1.35	-0.00421	7.602398	10.32584	-9.94686	8.809936
1.40	-0.00422	6.71697	9.769882	-9.57846	8.376305
1.45	-0.00422	5.954551	9.298584	-9.21062	7.966309
1.49	-0.00421	5.410311	8.965112	-8.91889	7.650589
1.499	-0.00421	5.294462	8.894427	-8.8537	7.580759

ตารางที่ ค.11 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 0$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.19557	24.63776	37.38946	15.07516	5.509215
1.02	-0.31569	41.45322	61.40138	26.76223	7.703318
1.03	-0.39683	56.62398	82.26595	36.9088	9.137234
1.04	-0.46085	70.8454	101.239	46.06332	10.21373
1.05	-0.51472	83.77474	117.9731	54.0302	11.04063
1.06	-0.56174	94.78426	131.7192	60.42922	11.6576
1.07	-0.6038	103.2093	141.697	64.87757	12.0831
1.08	-0.64212	108.5179	147.3253	67.1044	12.33096
1.09	-0.67757	110.4272	148.3672	67.02009	12.4173
1.10	-0.71083	108.9485	144.9712	64.73165	12.36285
1.11	-0.74245	104.3497	137.6065	60.5039	12.19238
1.12	-0.77292	97.05227	126.9168	54.68074	11.93254
1.13	-0.80274	87.48332	113.5265	47.58484	11.60888
1.14	-0.83246	75.87755	97.79324	39.39282	11.24192
1.15	-0.86293	61.83503	79.26843	29.86385	10.83767
1.16	-0.89667	39.94876	51.32466	15.62829	10.26169
1.17	-0.84341	7.936277	12.24771	-1.70241	7.190637
1.20	-0.87637	5.843458	9.672104	-1.81397	6.604471
1.30	-1.00155	3.531515	6.941054	-1.26104	5.85318
1.40	-1.09908	2.598323	5.908199	-0.81892	5.412274
1.50	-1.1993	1.874519	5.118852	-0.43511	4.933871
1.60	-1.27624	1.409722	4.600325	-0.20223	4.536425
1.70	-1.34265	1.052079	4.185443	-0.05124	4.173421
1.7499	-1.37252	0.901603	4.005192	-8.79E-05	4.005175

ตารางที่ ค.12 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 5$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.13349	32.48774	48.54207	20.66604	9.606418
1.03	-0.28176	79.37029	113.3308	52.03224	20.88653
1.05	-0.37146	119.3023	165.3435	76.69118	29.19929
1.07	-0.43897	149.2348	201.7941	93.11631	35.39999
1.09	-0.49124	163.2125	215.9348	98.0808	39.04507
1.10	-0.51262	163.54	214.1765	96.13918	39.8483
1.11	-0.53118	159.8186	207.2575	91.67402	40.00916
1.12	-0.54716	152.6964	196.1423	85.20573	39.59209
1.13	-0.56078	142.9389	181.906	77.29626	38.67631
1.14	-0.57222	131.2895	165.5572	68.45912	37.34146
1.15	-0.58162	118.3622	147.9081	59.09613	35.65365
1.16	-0.58898	104.5658	129.4917	49.45859	33.65114
1.17	-0.59414	90.0275	110.4823	39.61032	31.32283
1.18	-0.59633	74.38956	90.47082	29.3158	28.5488
1.19	-0.59216	55.53163	66.99325	17.29353	24.75096
1.20	-0.47075	10.98075	15.59934	-5.73891	11.26064
1.21	-0.46633	9.676749	14.1237	-5.79834	10.69981
1.30	-0.47877	5.879765	9.912495	-5.17224	9.133405
1.40	-0.49847	4.326672	8.358214	-4.55474	8.392394
1.50	-0.51121	3.358847	7.45896	-4.09703	7.775546
1.60	-0.51749	2.644031	6.816119	-3.74381	7.19371
1.70	-0.51846	2.070624	6.308462	-3.46328	6.63171
1.74	-0.51756	1.867849	6.131286	-3.36698	6.411344
1.7499	-0.51724	1.819515	6.089336	-3.34437	6.357147

ตารางที่ ค.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75, \bar{k} = 10$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-0.10198	36.3224	53.93501	23.19583	11.95772
1.02	-0.1718	65.04597	94.01775	42.29897	20.95306
1.03	-0.22062	90.73045	128.7047	58.62504	28.45968
1.04	-0.26064	115.0591	160.7	73.47868	35.30974
1.05	-0.29505	137.5875	189.5426	86.61482	41.55895
1.20	-0.31754	13.09244	18.03544	-8.19922	12.30244
1.25	-0.30368	8.007492	12.44355	-7.78065	9.97539
1.30	-0.30682	6.405107	10.75291	-7.27625	9.287963
1.35	-0.31087	5.407086	9.76406	-6.86791	8.825449
1.40	-0.31423	4.671215	9.073238	-6.52231	8.437534
1.45	-0.3166	4.082738	8.542459	-6.21967	8.082028
1.50	-0.31797	3.589304	8.109387	-5.94843	7.743688
1.55	-0.31841	3.16248	7.741415	-5.70138	7.416226
1.60	-0.318	2.784873	7.419861	-5.47376	7.096742
1.65	-0.31681	2.444868	7.133341	-5.26228	6.783678
1.70	-0.31492	2.13416	6.874622	-5.06457	6.475983
1.74	-0.31293	1.902425	6.684432	-4.91514	6.233094
1.7499	-0.31238	1.847034	6.639432	-4.87925	6.173369

ตารางที่ ค.14 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75$ ,  $\bar{k} = 100$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	-0.00024	3.320359	5.124708	0.772795	0.744737
1.005	-0.00527	16.69066	25.29043	9.448265	5.687591
1.01	-0.01948	45.4431	66.62605	28.51913	18.58696
1.018	-0.03192	76.96926	110.2199	47.45757	33.20876
1.21	-0.04237	13.31819	18.59364	-12.9238	10.94862
1.25	-0.04003	9.02838	14.00997	-11.6867	9.114444
1.30	-0.03978	7.115113	12.04522	-10.8354	8.354405
1.35	-0.03983	5.951538	10.92988	-10.2136	7.857187
1.40	-0.03986	5.096817	10.15689	-9.69513	7.446427
1.45	-0.0398	4.412858	9.563707	-9.235	7.076092
1.50	-0.03963	3.838294	9.079071	-8.81291	6.729423
1.55	-0.03937	3.340131	8.666436	-8.41837	6.398961
1.60	-0.03902	2.898212	8.305215	-8.0454	6.080713
1.65	-0.03858	2.499013	7.983069	-7.6903	5.772078
1.70	-0.03807	2.132783	7.692307	-7.35057	5.471029
1.71	-0.03796	2.062809	7.637453	-7.28429	5.411569
1.72	-0.03784	1.9938	7.583623	-7.21855	5.352328
1.73	-0.03772	1.925708	7.530791	-7.15332	5.29329
1.74	-0.0376	1.858484	7.478931	-7.0886	5.234442
1.7499	-0.03748	1.792746	7.428527	-7.02500	5.176355

ตารางที่ ค.15 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \theta_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$  โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75$ ,  $\bar{k} = 1,000$

$\bar{s}_t$	$\theta_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	2.47E-05	3.323514	5.130216	0.773919	0.744666
1.005	-0.00055	16.78672	25.41791	9.509085	5.798032
1.01	-0.00214	47.16615	69.00173	29.38649	20.02632
1.21	-0.00439	13.72839	19.08459	-13.6317	10.7764
1.25	-0.00412	9.164955	14.22746	-12.2245	8.8717
1.30	-0.00409	7.206108	12.22118	-11.3135	8.116862
1.35	-0.00409	6.019187	11.08696	-10.6555	7.624423
1.40	-0.00408	5.147991	10.30164	-10.108	7.218304
1.45	-0.00407	4.450973	9.699082	-9.62208	6.853002
1.50	-0.00405	3.865449	9.2067	-9.17583	6.511897
1.55	-0.00402	3.357752	8.787386	-8.75824	6.187484
1.60	-0.00398	2.907319	8.420269	-8.36307	5.875652
1.65	-0.00393	2.500345	8.092868	-7.98648	5.573665
1.70	-0.00388	2.126868	7.797415	-7.62587	5.279362
1.74	-0.00383	1.847035	7.580673	-7.3476	5.048157
1.7499	-0.00382	1.779952	7.529487	-7.28002	4.991394



ตารางที่ ค.16 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \bar{M}_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ , โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.25$

$\bar{k}$  = อนันต์ (Fixed support)

$\bar{s}_t$	$\bar{M}_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-1.53139	12.91146	8.639721	-1.72413	7.673386
1.02	-2.06414	16.1172	10.76894	-3.12026	9.839503
1.03	-2.42017	17.58461	11.75692	-4.24597	11.01733
1.04	-2.68616	18.24855	12.22936	-5.15585	11.72131
1.05	-2.89696	18.48469	12.43341	-5.89542	12.15902
1.06	-3.07057	18.47833	12.48858	-6.50062	12.43459
1.07	-3.21748	18.33007	12.45843	-6.99916	12.60607
1.08	-3.34432	18.09776	12.37874	-7.41232	12.70803
1.09	-3.45551	17.816	12.27043	-7.75642	12.76203
1.10	-3.55414	17.50608	12.14607	-8.04407	12.78206
1.11	-3.64245	17.18137	12.01335	-8.28514	12.77747
1.12	-3.72209	16.85039	11.87701	-8.48738	12.75468
1.13	-3.79434	16.51859	11.74001	-8.65696	12.71823
1.14	-3.8602	16.18947	11.60415	-8.79885	12.67136
1.15	-3.92045	15.86527	11.47051	-8.91707	12.61644
1.16	-3.97574	15.54739	11.33972	-9.01494	12.55526
1.17	-4.02661	15.23664	11.21212	-9.09517	12.48916
1.18	-4.07349	14.9335	11.08783	-9.16004	12.41917
1.19	-4.11676	14.63815	10.96687	-9.21146	12.3461
1.20	-4.15674	14.35063	10.84918	-9.25104	12.27058
1.21	-4.19371	14.07087	10.73465	-9.28016	12.19311
1.22	-4.22791	13.79871	10.62313	-9.30001	12.1141
1.23	-4.25955	13.53394	10.51449	-9.31159	12.03388
1.249	-4.31326	13.05039	10.31543	-9.31388	11.87904

ตารางที่ ค.17 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \bar{M}_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ , โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.50$ ,  $\bar{k} = \text{อนันต์ (Fixed support)}$

$\bar{s}_t$	$\bar{M}_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.01	-2.26817	34.49398	36.25893	6.914065	16.14737
1.02	-3.21631	47.71284	49.33816	9.092178	23.07611
1.03	-3.8663	55.19722	56.13213	8.844112	27.36483
1.04	-4.31588	58.2107	58.21796	6.866982	29.50453
1.05	-4.59134	57.12897	56.19888	3.555714	29.60718
1.06	-4.68569	51.96942	50.33055	-0.77385	27.62953
1.07	-4.56241	42.73784	40.94519	-5.57211	23.54249
1.08	-4.27647	32.41476	31.15834	-9.10854	18.82489
1.09	-4.07335	25.93994	25.26483	-10.5125	15.93604
1.10	-3.97569	22.24621	21.97059	-11.0204	14.36252
1.15	-3.93954	14.84958	15.61509	-11.3079	11.50577
1.20	-4.03372	11.87069	13.27295	-11.0556	10.46134
1.25	-4.11934	10.02525	11.94028	-10.7262	9.792093
1.30	-4.18093	8.680067	11.03166	-10.3702	9.257637
1.35	-4.21865	7.614125	10.34379	-10.0027	8.786912
1.40	-4.2354	6.72633	9.786567	-9.63123	8.352744
1.45	-4.23414	5.961907	9.314218	-9.26035	7.942567
1.49	-4.22188	5.416248	8.980014	-8.96623	7.626886
1.499	-4.21787	5.300097	8.909175	-8.9005	7.557083

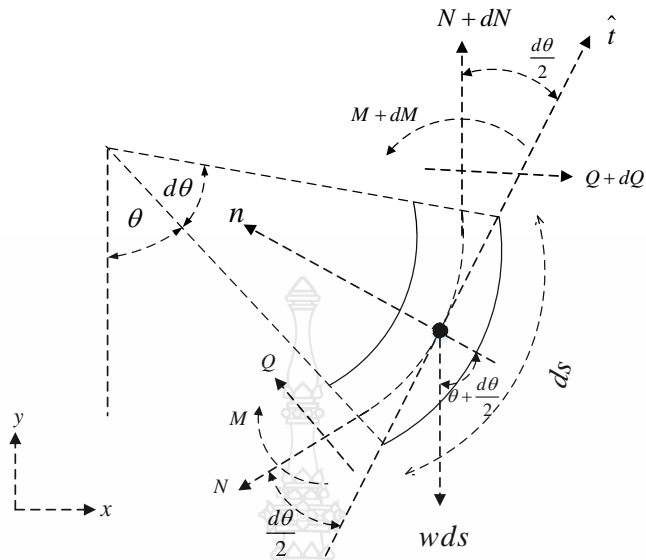
ตารางที่ ค.18 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{s}_t, \bar{M}_A, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A, \bar{Q}_A$ , โดยพิจารณาค่าคงที่  $\beta = 0.75$ ,  
 $\bar{k} = \text{อนันต์ (Fixed support)}$

$\bar{s}_t$	$\bar{M}_A$	$\bar{w}$	$\bar{R}_B$	$\bar{N}_A$	$\bar{Q}_A$
1.00	0	0	0	0	0
1.001	0.02479	3.323874	5.130846	0.774048	0.744658
1.002	-0.0068	5.318948	8.189853	1.781506	1.314417
1.003	-0.08281	7.629354	11.70854	3.196663	2.087652
1.004	-0.23766	10.9693	16.75072	5.447657	3.35616
1.005	-0.55782	16.79715	25.4316	9.51557	5.810694
1.006	-1.00182	24.64683	36.92276	14.90966	9.353384
1.007	-1.37433	31.50489	46.81042	19.46487	12.56205
1.008	-1.67616	37.33423	55.12511	23.22437	15.34085
1.009	-1.93495	42.54713	62.50142	26.50749	17.85554
1.01	-2.16595	47.374	69.28781	29.48749	20.20453
1.21	-4.40824	13.77849	19.14405	-13.7142	10.75509
1.25	-4.13214	9.18069	14.25256	-12.286	8.841938
1.30	-4.09731	7.216523	12.24141	-11.368	8.087966
1.35	-4.09647	6.0269	11.10498	-10.7058	7.596246
1.40	-4.09422	5.153802	10.31823	-10.155	7.190796
1.45	-4.08321	4.455282	9.714577	-9.66598	6.826195
1.50	-4.06208	3.868498	9.221295	-9.21692	6.485842
1.55	-4.03115	3.359707	8.801204	-8.79667	6.16223
1.60	-3.99111	2.9083	8.433403	-8.39894	5.851235
1.65	-3.94271	2.500437	8.105393	-8.01987	5.550106
1.70	-3.88655	2.126131	7.809398	-7.65687	5.256668
1.74	-3.83635	1.845665	7.592266	-7.37673	5.026149
1.7499	-3.82322	1.778429	7.54099	-7.30869	4.969554

ภาคผนวก ง

สมการของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติคคาที่รับแรงกระทำ





รูปที่ ๑.1 สมดุลของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา

ผลรวมของแรงในแนวแกนสะเทินของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ( $\sum F_t = 0$ ) เป็นดังนี้

$$(N + dN) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - N \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (Q + dQ) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + Q \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - wds \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (๑.1)$$

เนื่องจาก

$$\sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = \sin\theta \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \cos\theta \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \quad (๑.2)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = \cos\theta \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sin\theta \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \quad (๑.3)$$

$$\text{และเมื่อ } \left(\frac{d\theta}{2}\right) \rightarrow 0, \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \left(\frac{d\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1, \left(\frac{ds}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (๑.4 \text{ a-d})$$

แทนค่าสมการที่ (๑.2) ในสมการที่ (๑.1) จะได้

$$dN \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + 2Q \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dQ \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - wds \left(\sin\theta \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \cos\theta \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\right) = 0$$

และเมื่อพิจารณา  $\frac{d\theta}{2} \rightarrow 0$  จะได้

$$dN + Qd\theta - wds \sin \theta = 0 \quad (ง.5)$$

จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dN}{ds} = -Q \frac{d\theta}{ds} + w \sin \theta \quad (ง.6)$$

ผลรวมของแรงในแนวตั้งฉากกับแกนสะเทินของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ( $\sum F_n = 0$ ) เป็นดังนี้

$$Q \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (Q + dQ) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + N \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (N + dN) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - wds \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (ง.7)$$

แทนค่าสมการที่ (ง.3) ในสมการที่ (ง.7) จะได้

$$-dQ \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + 2N \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dN \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - wds \left( \cos \theta \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sin \theta \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right) = 0 \quad (ง.8)$$

และเมื่อพิจารณา  $\frac{d\theta}{2} \rightarrow 0$  จะได้

$$-dQ + Nd\theta - wds \cos \theta = 0 \quad (ง.9)$$

จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dQ}{ds} = N \frac{d\theta}{ds} - w \cos \theta \quad (ง.10)$$

ผลรวมของโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา ( $\sum M = 0$ ) เป็นดังนี้

$$M - (M + dM) + Q \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \left(\frac{ds}{2}\right) + (Q + dQ) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \left(\frac{ds}{2}\right) = 0 \quad (ง.11)$$

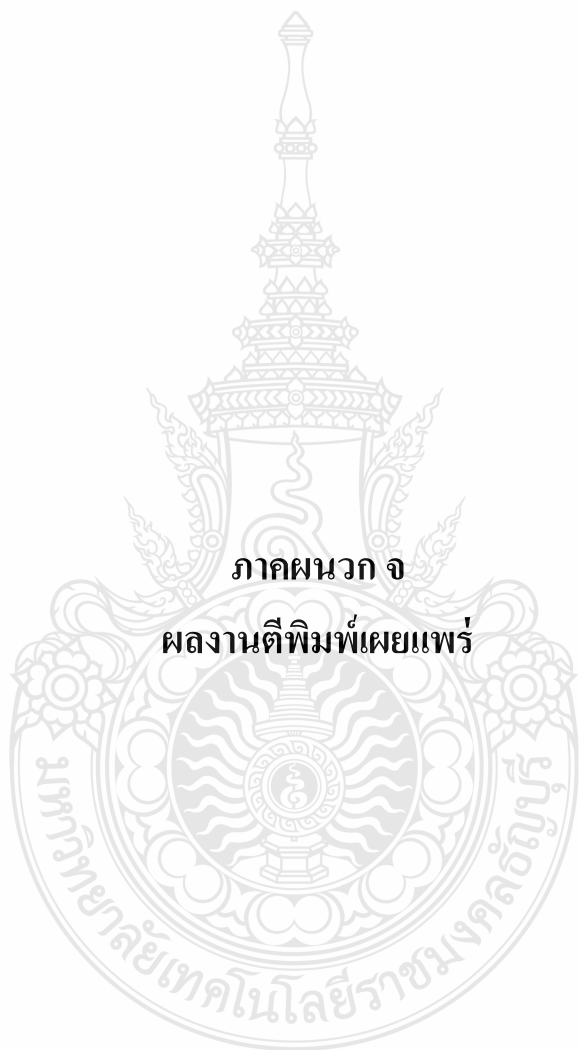
แทนค่าสมการที่ (ง.4 a-d) ในสมการที่ (ง.11) จะได้

$$-dM + Qds = 0 \quad (ง.12)$$

จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (ง.13)$$

สมการที่ ง.6 ง.10 และง.13 เป็นสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยของอิลาสติกคา





การประชุมวิชาการ  
วิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 22 (NCCE22)



เอกสารประกอบการประชุมวิชาการ  
วิศวกรรมโยธาแห่งชาติครั้งที่ 22

Proceedings of the 22<sup>nd</sup> National Convention on Civil Engineering  
NCCE 22



ภายใต้ชื่อการประชุม

เทคโนโลยีสีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน

GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT



18 - 20 กรกฎาคม 2560  
ณ โรงแรมแอมบาสซอร์ กรุงเทพฯ  
สาทรพลาซ่า กรุงเทพมหานคร

จัดโดย สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี  
สาขาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
และสมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (วสท.)

ISBN : 978 - 616 - 396 - 009 - 2





เอกสารประกอบการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22  
PROCEEDINGS OF THE 22<sup>nd</sup> NATIONAL CONVENTION ON CIVIL ENGINEERING

“เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”  
GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT

VOLUME 1:

วิศวกรรมโครงสร้างและวิศวกรรมการบริหารงานก่อสร้าง  
(Structural Engineering & Construction Engineering and Management)

18-20 กรกฎาคม 2560  
ณ เดอะกรีนเนอริ รีสอร์ท เขาใหญ่  
อำเภอปากช่อง จังหวัดนครราชสีมา

จัดโดย

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี  
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
และสมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ผู้สนับสนุนหลักอย่างเป็นทางการ

บริษัท ปูนซีเมนต์นครหลวง จำกัด (มหาชน)

เอกสารประกอบการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22  
Proceedings of the 22<sup>nd</sup> National Convention on Civil Engineering

“เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”

GREEN TECHNOLOGY FOR SUSTAINABLE INFRASTRUCTURE DEVELOPMENT

ISBN 978-616-396-009-2

พิมพ์ครั้งที่ 1                      กรกฎาคม พ.ศ. 2560

จำนวนพิมพ์                      550 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ ©ตามพ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521

สมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี  
และสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

All right reserved. No part of this book may not be reproduced, in any forms or by any means, without permission.

The Engineering Institute of Thailand under H.M. the King's Patronage, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Architecture, Rajamangala University of Technology Isan and School of Civil Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology

กองบรรณาธิการ	ศาสตราจารย์ ดร.สุชนัดดี หอพิบูลสุข	ที่ปรึกษา
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิระยุทธ สืบสุข	ประธาน
	อาจารย์ ดร.วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา	รองประธาน
	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เกียรติสุลา สมณา	
	อาจารย์ ดร.จักษดา ช้างวงษ์	
	อาจารย์ ดร.ชนากร กุเงินชา	
	อาจารย์ ดร.เชิดศักดิ์ สุขศิริพัฒน์พงศ์	
	อาจารย์ ดร.ชยภักดิ์ เพชรช่วย	
	อาจารย์คมกร ไชยเดชาธร	เลขาธิการ

จัดทำโดย                      สมาคมวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
พิมพ์ที่                              บริษัท โซลเจริยมาร์เก็ตติ้ง จำกัด 505-507 ถนนมิตรภาพ ตำบลในเมือง  
   อำเภอเมือง นครราชสีมา 30000

การนำข้อมูลทางทฤษฎี หรือส่วนใดส่วนหนึ่งที่ปรากฏอยู่ในบทความนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับความเห็นชอบจากผู้นิพนธ์หรือเจ้าของลิขสิทธิ์ หรือการนำข้อมูลไปใช้โดยไม่ได้รับความเห็นชอบจากผู้นิพนธ์หรือเจ้าของลิขสิทธิ์ อาจก่อให้เกิดความเสียหายได้ ผู้ใช้ควรพิจารณาความเหมาะสมก่อนนำไปใช้

## คณะกรรมการกลางจัดการประชุมวิชาการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22

### ที่ปรึกษา

1. ดร.ชเนต วีระศิริ
2. ศ.ดร.สมชาย ชูชีพสกุล
3. ศ.ดร.ปริญญา จินดาประเสริฐ
4. ศ.ดร.ปิติ สุกนธสุขกุล
5. ศ.ดร.พานิช วุฒิพฤกษ์

### ประธานคณะกรรมการ

รศ.เอนก ศิริพานิชกร

### คณะกรรมการ

1. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยมหาวินิจฉัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา
2. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
3. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยบูรพา
4. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
5. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธนบุรี
6. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
7. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
8. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
9. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
10. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
11. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยรามคำแหง
12. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา
13. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
14. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ ศาลายา
15. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
16. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กำแพงแสน
17. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
18. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเอเชียอาคเนย์
19. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
20. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์
21. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
22. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยภาคตะวันออกเฉียงเหนือ
23. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยมหิดล
24. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยขอนแก่น
25. ผู้อำนวยการกองวิศวกรรมโยธาส่วนการศึกษา โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า
26. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตศรีราชา

27. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา กองวิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและโยธา กองการศึกษา  
โรงเรียนนายเรืออากาศนวมินทราชภัฏวชิรราช
28. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์
29. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยศรีปทุม
30. หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยรังสิต
31. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยสยาม
32. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยนครสวรรค์
33. หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตบางเขน
34. หัวหน้าภาควิชาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



## กำหนดการประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22

ณ โรงแรม เดอะกรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่ จังหวัดนครราชสีมา  
18 - 20 กรกฎาคม 2560

วันจันทร์ ที่ 17 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
17.00 – 20.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1

วันอังคาร ที่ 18 กรกฎาคม 2560

เวลา	รายละเอียด
8.00 – 10.00 น.	ลงทะเบียนการประชุม ณ ห้องประชุม Falcon 1
10.00 – 10.15 น.	<b>พิธีถวายราชสักการะและน้อมรำลึกในพระมหากรุณาธิคุณพระบารมี พระบาทสมเด็จพระปรมินทรมหาภูมิพลอดุลยเดชฯ**</b>
10.15 – 11.00 น.	พิธีเปิด ณ ห้อง Falcon 1 - กล่าวรายงาน โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิระยุทธ สืบสุข (ประธานคณะกรรมการจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์เอก ศิริพานิชกร (ประธานคณะกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 22 และประธานคณะกรรมการสาขาวิศวกรรมโยธา วสท.) - กล่าวต้อนรับโดย รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ศักดิ์ ชวรมโชติ (คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี) - กล่าวเปิดการประชุมฯ โดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี) - พิธีมอบโล่ให้ผู้สนับสนุนการประชุมโดยประธานพิธี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มไขแสง (อธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี)
11.00 – 12.00 น.	การบรรยายพิเศษ เรื่อง “วิศวกรรมโยธามาตามแนวทางพระราชดำริ” โดย รองศาสตราจารย์ ดร.กาญจนา จันทร์หาญ
12.00 – 13.00 น.	พักรับประทานอาหารกลางวัน
13.00 – 13.45 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.เป็นหนึ่ง วานิชชัย (สถาบันเทคโนโลยีแห่งเอเชีย) ณ ห้องประชุม Falcon 1
13.00 – 15.00 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ ช่วงที่ 1
15.00 – 15.15 น.	พักรับประทานอาหารว่าง
15.15 – 16.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย ศาสตราจารย์ ดร.สมนึก ดั่งเดิมสิริกุล (สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์) ณ ห้องประชุม Falcon 1
15.15 – 16.00 น.	การบรรยายพิเศษ โดย รองศาสตราจารย์ เกษม เพชรเกตุ (บริษัท เกษมดีไซน์ จำกัด) ณ ห้องประชุม Falcon 2
15.15 – 17.15 น.	การนำเสนอบทความวิชาการ ช่วงที่ 2
18.00 – 22.00 น.	งานเลี้ยงต้อนรับ ณ ห้องเลี้ยงรับรอง KYCC Grand Ballroom

\*\* ในพิธีถวายราชสักการะฯ ขอความร่วมมือในการแต่งกาย

สุภาพบุรุษ : ขอความกรุณาสวมเสื้อมีปกสีขาวหรือดำ กางเกงขายาวสีด้า (งดเว้นกางเกงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีด้า

สุภาพสตรี : ขอความกรุณาสวมชุดสุภาพสีด้า มีแขน ไม่รัดรูป กระโปรงยาวคลุมเข่าหรือผ้าถุง (งดเว้นกระโปรงยีนส์) รองเท้าหุ้มส้นสีด้า

## สารบัญบทความ

หน้า

### STR บทความสาขาวิศวกรรมโครงสร้าง

STR002	การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดสำหรับบรรจุของเหลวชนิดบีบอัดตัวไม่ได้ Free Vibration of Incompressible Fluid-Filled Membrane Shell ชำนาญกิจ ศิริยานนท์, วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา, จักรชดา ชำรงวุฒิ, เสริมศักดิ์ ดิยะแสงทอง, คมกร ไชยเดชาธร และ กมล ตรีเมือง	1
STR029	การวิเคราะห์แรงลมและการตอบสนองของอาคารสูงที่มีรูปแบบการสั่นไหวร่วมกันใน 3 ทิศทาง โดยการ ทดสอบในอุโมงค์ลม Wind Load and Response Analysis for High-Rise Buildings with 3D Coupled Modes by Wind Tunnel Test ภาณุญา ลีละเศรษฐกุล และ วิโรจน์ บุญญิกัญญู	7
STR038	ผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติคคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายใต้ น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง Effect of Overhanging Portion on the Variable-Arc-Length Elastic Subjected to Uniform Self-Weight ศรินทร์ ชุ่มกลัด และ บุญชัย นิ่งไผ่งาม	17
STR040	การเสริมความแข็งแรงของเสาโทรคมนาคม ชนิดเสาเหล็กฉากขาหา โดยวิธี การเพิ่มหน้าตัด และการเสริมค้ำ ยื่น Compressive Strength of Self Support Tower Type Equal Angle of Communication Towers Reinforced with Additional Section Areas and Bracing Members ชนิกานต์ พูลพิพัฒน์, สันติสุข เข้มชัยตระกูล และ จตุพล ตั้งปภาภิต	24
STR048	ผลกระทบจากวัตถุที่ไหลมากับสึนามิที่กระทำต่อโครงสร้างอาคาร Effect of Tsunami Debris Impact on Buildings ชัชชัย จริยาพันธ์ และ อานัติ เรืองวิทย์	33
STR051	อิทธิพลของสารเคลือบผิวอะคริลิคต่อการเสื่อมสภาพของวัสดุอุดรอยต่อโพลียูรีเทน Effects of acrylic coating on degradation of polyurethane joint sealant ภาณุณา สุริยะวงศ์, วิฑิต ปานสุข และ พรรณี ไชยมงคล	43
STR057	ศึกษาค่าตัวประกอบปรับผลตอบสนองที่เหมาะสม สำหรับหอถังสูงคอนกรีตเสริมเหล็กในประเทศไทย Evaluation of Response Modification Factor of Elevated RC Tank in Thailand ณัฐพล กองสุข และ ณัฐวุฒิ ธนศรีสถิตย์	50
STR058	การพัฒนาส่วนผสมคอนกรีตสมรรถนะสูงมากเสริมเส้นใยจากส่วนผสมอัดแน่นของมวลรวม Development of Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete Mixtures from Packing Density of the Granular Skeleton จิตราภรณ์ จิตตานรักษ์ และ วิฑิต ปานสุข	57
STR059	การวิเคราะห์พฤติกรรมของกระจกลามิเนตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Finite Element Analysis of Structural Behavior of Laminated Glass วีระยา ปัญญาสรเสริญ และ วิฑิต ปานสุข	63
STR062	ศึกษาค่าตัวประกอบปรับผลตอบสนองที่เหมาะสมของโครงต้านแรงดัดคอนกรีตเสริมเหล็กสำหรับ อาคารในประเทศไทย Evaluation of Response Modification Factor of Concrete Moment Resisting Frames in Thailand ธนวัฒน์ วัฒนเจริญ และ ณัฐวุฒิ ธนศรีสถิตย์	69





ผลกระทบของปลายยื่นของอีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้  
โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง  
Effect of Overhanging Portion on the Variable-Arc-Length Elastica  
Subjected to Uniform Self-Weight.

ศรันย์ ชุ่มกัต<sup>1\*</sup> และ บุญชัย ฝั่งไผ่งาม<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

\*Corresponding author; E-mail address: sarun@mail.mutt.ac.th

**บทคัดย่อ**

บทความนี้ศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ปลายด้านหนึ่งของอีลาสติกาวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยที่ปลายยื่นกำหนดให้เป็นสัดส่วนกับความยาวของช่วงของอีลาสติกา สมการครอบคลุมปัญหาสามารถสร้างได้จาก ชุดสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยของอีลาสติกา ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์คดและความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต หลังจากนั้นระเบียบวิธียิงเป้าจะถูกนำมาใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหา ผลจากการคำนวณพบพฤติกรรมที่น่าสนใจได้แก่ น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ เสถียรภาพของอีลาสติกา ผลกระทบของปลายยื่น ผลกระทบของจุดรองรับแบบสปริงหมุน และรูปร่างสมดุลของอีลาสติกา

คำสำคัญ: อีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้, การแอ่นตัวมาก, น้ำหนักบรรทุกตัวเอง, ระเบียบวิธียิงเป้า

**Abstract**

This paper presents the effect of overhanging portion on the variable-arc-length elastica subjected to uniform self-weight. One end of the elastica is attached on the rotational spring support, while the other end is placed on the frictionless support. The overhanging portion is proportional to the span-length of the elastica. The set of governing differential equations can be established by considering the equilibrium of the elastica, the moment-curvature expression, and the geometric relation. The shooting method is utilized to compute the numerical results of the problem. From the results, there are several interesting features such as critical loads, stability, effect of the overhanging portion and rotational spring joint, and the equilibrium shapes.

Keywords: variable-arc-length elastica, large deflection, uniform self-weight, shooting method

**1. คำนำ**

ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการแอ่นตัวมากของกานในขณะที่มีความเครียดมีค่าน้อยเป็นปัญหาอีลาสติกาซึ่งมีลักษณะที่สำคัญคือความสามารถในการมีรูปร่างสมดุลได้หลายรูปร่างในสภาวะใดสภาวะหนึ่ง (Multiple equilibrium configurations) โดยทั่วไปแล้วการศึกษารูปร่างสมดุลของอีลาสติกาอาจแบ่งออกได้เป็น 1) อีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งคงที่ซึ่งมีการศึกษาอย่างกว้างขวาง 2) อีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ซึ่งแบบจำลองนี้นำเสนอเป็นครั้งแรกโดย Chucheepsakul and Huang [1] ซึ่งแบบจำลองนี้ในลักษณะพิเศษคือที่ปลายยื่นหนึ่งอนุญาตให้เกิดการเลื่อนไหลของอีลาสติกาได้อย่างอิสระ ทำให้ความยาวส่วนโค้งภายในช่วงของอีลาสติกาเพิ่มขึ้น โดยแบบจำลองนี้เหมาะกับการนำไปประยุกต์ใช้ในงานของท่อลำเลียงยืดหยุ่นได้ทะเล ภายหลังจากการนำเสนอแบบจำลองของอีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ก็มีการพัฒนาแบบจำลองดังกล่าวอย่างต่อเนื่อง เช่น การพิจารณาที่แรงกระทำต่ออีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ในรูปแบบต่าง ๆ [2-16] การศึกษาผลของการสั่นที่มีต่อโครงสร้างอีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ การศึกษาผลกระทบของวัสดุแบบไร้เชิงเส้น [17] และการศึกษาผลกระทบของไหลภายในท่อ [18-20] การศึกษาพฤติกรรมของอีลาสติกาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ จะเป็นการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความไม่เชิงเส้นสูง โดยมีวิธีหลัก ๆ ที่พบได้บ่อยอยู่ 3 วิธีด้วยกันคือ 1) วิธีอินทิกรัลอีลิปติก (Elliptic Integral Method) 2) วิธียิงเป้า (Shooting Method) และ 3) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) โดยที่วิธีอินทิกรัลอีลิปติกเป็นวิธีที่ให้ผลในรูปแบบปิด (Closed-form Solution) และผลที่ได้เป็นผลแบบแม่นยำตรง (Exact Solution) แต่ทั้งนี้ปัญหาที่สามารถใช้วิธีการนี้ได้มีค่อนข้างจำกัด ในขณะที่อีกสองวิธีคือวิธียิงเป้าและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขสามารถจัดการกับปัญหาได้หลากหลายกว่า อาทิเช่นในกรณีที่เป็นแรงแบบแผ่กระจาย เป็นต้น

จากการทบทวนวรรณกรรมในอดีตพบว่าการศึกษาพฤติกรรมของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ มีการคำนึงถึงผลกระทบของส่วนปลายของอิลาสติกคาที่ยื่นออกมาค่อนข้างน้อยมาก โดยพบว่า มีเพียง Plaut et al. [21] ได้ทำการศึกษาถึงผลกระทบของปลายยื่นโดยกำหนดให้ความยาวทั้งหมดของอิลาสติกคามีค่าที่คงที่ แต่ช่วงความยาวระหว่างจุดรองรับสามารถปรับเปลี่ยนได้ โดยที่จุดรองรับที่ปลายด้านหนึ่งเป็นแบบหมุนได้อย่างอิสระ ในขณะที่ปลายอีกด้านวางอยู่บนจุดรองรับแบบมีแรงเสียดทาน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้นำปัญหาอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง โดยพิจารณาถึงผลกระทบของปลายยื่น นอกเหนือจากการศึกษาผลกระทบของปลายยื่นแล้วยังพิจารณาผลของสภาพการยึดรั้งของจุดหมุนซึ่งจำลองโดยใช้สปริงต้านทานการหมุนเพื่อให้อัดดล้องกับสภาพการยึดรั้งที่แท้จริงมากยิ่งขึ้น และจากที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนต้นวิธีการที่สามารถนำมาใช้ศึกษาในกรณีดังกล่าวได้โดยการใช้วิธีเชิงตัวเลข ซึ่งในที่นี้จะใช้วิธียิงเป้าซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมกับปัญหาในลักษณะที่เป็นปัญหาของค่าที่ขอบเขตสองจุด (Two-point Boundary Value Problem)

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการแอ่นตัวของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง โดยมีรูปแบบของอิลาสติกคาของงานวิจัยนี้คือ ที่ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยที่ปลายยื่นกำหนดให้เป็นสัดส่วนกับความยาวของช่วงของอิลาสติกคา โดยกำหนดปลายยื่นที่  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  และมีค่า  $k$  เป็นค่าสตีฟเนสของสปริงหมุน ซึ่งโครงสร้างในลักษณะนี้นิยมจำลองในงานวิศวกรรมนอกฝั่งที่เกี่ยวข้องกับท่อขนส่งใต้ทะเล โดยมีปลายด้านหนึ่งยึดอยู่ที่แท่นเจาะและปลายอีกด้านหนึ่งยึดกับเรือขนส่ง ซึ่งงานวิจัยนี้ใช้ชุดสมการครอบคลุมปัญหา โดยอาศัยหลักการสมดุลแรง ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อย การหาผลเฉลยโดยใช้วิธียิงเป้า ซึ่งจะทำให้การอินทิเกรตชุดระบบสมการครอบคลุมปัญหา ด้วยวิธี รุ่งง-คุดตา ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตตามจุดที่ได้กำหนดไว้ และทำการปรับค่าของผลเฉลยด้วยการทำซ้ำของ นิวตัน-ราฟสัน จนกระทั่ง ได้ผลเฉลยที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าค่าที่ยอมรับได้  $\epsilon = 10^{-10}$  จากผลที่ได้พบว่า ปลายยื่นและค่าสตีฟเนสของจุดรองรับแบบหมุนมีผลต่อพฤติกรรมโดยรวมของอิลาสติกคา เช่นน้ำหนักบรรทุกวิกฤต และรูปร่างสมดุลของอิลาสติกคา

## 2. ลักษณะของปัญหาและสมการครอบคลุมปัญหา

เมื่อพิจารณาอิลาสติกคา ซึ่งมีปลายด้านหนึ่งวางอยู่ที่จุดรองรับที่ฐาน (จุด A) ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบสปริงหมุน โดยที่ปลายอีกด้านหนึ่ง (จุด B) วางบนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน ซึ่งระยะระหว่างจุดทั้งสองห่างกันที่ระยะทาง  $L$  และมีส่วนปลายยื่นเป็นระยะ  $\beta L$  มีน้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอเท่ากับ  $w$  ดังรูปที่ 1 เมื่อมีน้ำหนักเพิ่มขึ้นทำให้อิลาสติกคา เกิดการแอ่นตัวมากขึ้น มีความยาวส่วนโค้ง ( $s_r$ ) ที่เพิ่มขึ้น

เมื่อ

$L$  คือ ความยาวช่วงจากจุดรองรับถึงจุดรองรับ

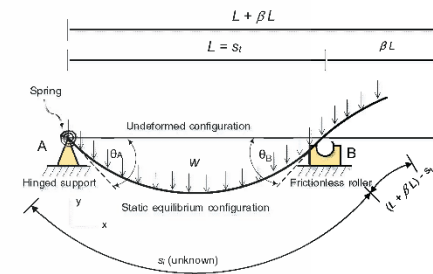
$\beta L$  คือ อัตราส่วนของปลายยื่นที่สัมพันธ์กับระยะ  $L$

$w$  คือ น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง

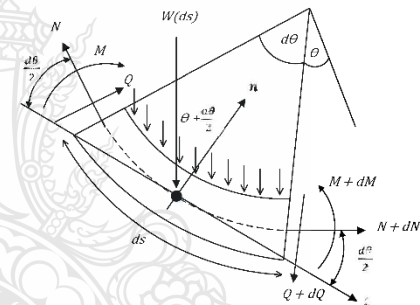
$s_r$  คือ ความยาวของอิลาสติกคาเมื่อเกิดการแอ่นตัว

$\theta_A$  คือ มุมที่เกิดขึ้นเมื่อเกิดการแอ่นตัวที่จุดรองรับ A

$\theta_B$  คือ มุมที่เกิดขึ้นเมื่อเกิดการแอ่นตัวที่จุดรองรับ B



รูปที่ 1 รูปร่างของอิลาสติกคา ก่อนและหลังการเสียรูป



รูปที่ 2 สมดุลแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของคาน

### 2.1 สมการครอบคลุมปัญหา

เมื่อคานรับน้ำหนักจะเกิดการเคลื่อนตัวของแนวแกนสะเทิน (Neutral axis) โดยที่เส้นโค้งของแนวแกนสะเทินจะเรียกว่า (Elastic Curve) เมื่อพิจารณาสมดุลในแนวเส้นสัมผัสเส้นโค้งอิลาสติกผ่านแนวแกนสะเทินของคาน (Tangential direction) และในแนวตั้งฉากกับเส้นสัมผัส (Normal direction) จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการสมดุลของชิ้นส่วนย่อยคานดัง รูปที่ 2 และเมื่อทำการสมดุลแรงภายใน จะได้สมการ

$$\frac{dN}{ds} = Q \frac{d\theta}{ds} - w \sin \theta \quad (1)$$

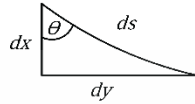
$$\frac{dQ}{ds} = -N \frac{d\theta}{ds} - w \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q \quad (3)$$



ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ตัดกับความยาวส่วนโค้ง (Moment curvature) ของชิ้นส่วนย่อย

$$\frac{d\theta}{ds} = M \quad (4)$$



รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต

ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต (Geometric relations) ดังรูปที่ 3 สามารถเขียนสมการที่อธิบายรูปร่างของอิลาสติกกาได้ดังนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (5)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (6)$$

เมื่อ

$M$  คือ โมเมนต์ตัด

$Q$  คือ แรงเฉือน

$N$  คือ แรงตามแนวแกน

$x$  คือ ระยะจากจุด A ถึงแรงกระทำ ณ ตำแหน่งใดๆ ในแกน  $x$

$y$  คือ ระยะจากจุด A ถึงแรงกระทำ ณ ตำแหน่งใดๆ ในแกน  $y$

$\theta$  คือ มุมที่เกิดจากการแอ่นตัว

หากนำสมการเหล่านี้มาหาค่าตอบเชิงตัวเลขนั้น อาจมีความผิดพลาดเกิดขึ้นได้ง่าย ดังนั้นจึงจัดให้อยู่ในรูปแบบของตัวแปรไร้มิติได้ดังนี้

$$\bar{s}_t = \frac{s_t}{L}, \quad \bar{s} = \frac{s}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \quad (7-10)$$

$$\bar{w} = \frac{wL^3}{EI}, \quad \bar{M} = \frac{ML}{EI} \quad (11-12)$$

$$\bar{N} = \frac{NL^2}{EI}, \quad \bar{Q} = \frac{QL^2}{EI} \quad (13-14)$$

จัดสมการอนุพันธ์ที่ (1-6) ให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ และทำการเปรียบเทียบกับตัวแปร  $s$  สำหรับการหาค่าตอบด้วยกระบวนการเชิงตัวเลข โดยมีสมการดลอบกลุมปัญหา ดังนี้

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{s}} = \bar{Q} \frac{d\theta}{d\bar{s}} - \bar{w} \sin \theta \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{d\bar{s}} = -\bar{N} \frac{d\theta}{d\bar{s}} - \bar{w} \cos \theta \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{M}}{d\bar{s}} = \bar{Q} \quad (17)$$

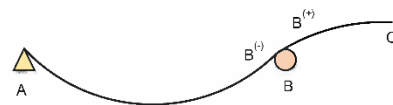
$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \bar{M} \quad (18)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos \theta \quad (19)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin \theta \quad (20)$$

สมการที่ (16-20) เป็นสมการอนุพันธ์แบบไร้หน่วยที่อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของอิลาสติกกาภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ซึ่งเป็นสมการที่อธิบายเฉพาะตำแหน่งเพียงจุดเดียวของอิลาสติกกา หากต้องการทราบถึงพฤติกรรมโดยรวมทั้งหมด จะต้องทำการอินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์ที่ (16-20) ตลอดความยาวทั้งหมดของอิลาสติกกา และจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

### 2.2 เงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 4 แสดงจุดต่าง ๆ ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

ในกระบวนการหาค่าเฉลยของวิธีอิงเป้านั้น จะต้องทราบค่าเงื่อนไขขอบเขตที่แน่นอนเสียก่อน คือ จูตรองรับด้านซ้าย จูตรองรับด้านขวา และที่จุดของปลายยื่น จึงจะสามารถหาค่าตอบของสมการครอบคลุมปัญหาได้

โดยมีเงื่อนไขที่จูตรองรับ ดังรูปที่ 4 ดังนี้

ที่จุด A มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 0$ )

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{M}_A = \bar{k} \theta_A, \quad (21 \text{ a-f})$$

$$\theta = \theta_A, \bar{Q} = \bar{Q}_A, \bar{N} = \bar{N}_A$$

ที่จุด B มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_t$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \quad (22 \text{ a-f})$$

$$\theta = \theta_B, \bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)}, \bar{N} = \bar{N}_B$$

ที่จุด B มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = \bar{s}_t$ )

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 0, \bar{M} = \bar{M}_B, \theta = \theta_B, \quad (23 \text{ a-f})$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}_B^{(-)} + \bar{R}_B, \bar{N} = \bar{N}_B$$

ที่จุด C มีเงื่อนไขดังนี้ ( $\bar{s} = 1 + \beta$ )

$$\bar{x} = \bar{x}_C, \bar{y} = \bar{y}_C, \bar{M} = 0, \quad (24 \text{ a-f})$$

$$\theta = \theta_C, \bar{Q} = 0, \bar{N} = 0$$

โดยที่  $\bar{R}_B$  คือแรงปฏิกิริยาที่จุด B

### 3. วิธีการคำนวณ

ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม MATLAB

1. ทำการป้อนค่าความยาวส่วนโค้ง ( $\bar{s}_t$ ), ค่าสถิติในสองของสปริง ( $k$ ) และค่าสัดส่วนที่สัมพันธ์กับความยาวช่วง ( $\beta$ )

- ทำการประมาณค่าเริ่มต้นให้แก่ค่า  $\theta, \bar{w}, \bar{R}_B, \bar{N}_A$  และ  $\bar{Q}_A$
- หาค่าตอบด้วยสมการครอบคลุมปัญหา(15), (16), (17), (18), (19) และ (20) โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธี รุงเง-คูดตา โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายคังสมการที่ (21)

$$Min = \left[ \begin{aligned} & |x(s_T) - 1| + |x(s_T)| + |N(1 - \beta)| + |Q(1 - \beta)| \\ & + \bar{M}(1 + \beta) \end{aligned} \right] \quad (25)$$

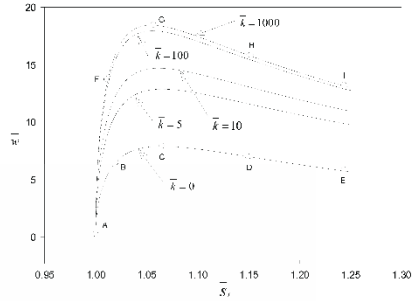
- ปรับแก้ค่าที่ได้ทำการประมาณไว้ในขั้นตอนที่ 2 โดยกระบวนการทำซ้ำ ด้วยระเบียบวิธี นิวตัน-ราฟสัน จนกว่าจะมีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่า  $\varepsilon = 10^{-10}$  ซึ่งเป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

#### 4. ผลการศึกษา

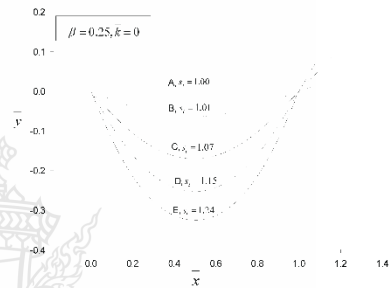
จากผลการศึกษาพฤติกรรมหลังการแอ่นตัวของอิลาสติกาคือความยาวส่วนโค้งเปลี่ยนแปลงได้โดยปลายคานหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน และปลายอีกคานหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน ซึ่งมีน้ำหนักบรรทุกตัวเอง โดยกำหนดค่า  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  และทำการแปรผันค่า  $\bar{k} = 0, 5, 10, 100$  และ  $1,000$  แสดงให้เห็นพฤติกรรมการแอ่นตัวของอิลาสติกาคือ ซึ่งสามารถแสดงรูปร่างสมมูลได้ดังนี้

##### 4.1 ผลการศึกษากรณีที่มีค่า $\beta = 0.25$ และทำการแปรผันค่า $\bar{k}$ ตั้งแต่ค่า $0, 5, 10, 100$ และ $1000$

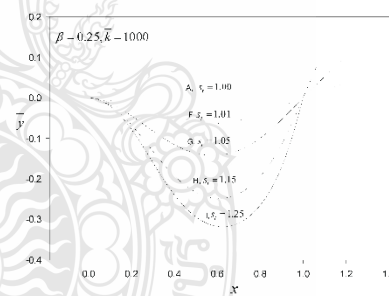
จากรูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  จากกราฟจะเห็นได้ว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน (สมมูลแบบบีเสียดียภาพ) จนถึงจุดที่อิลาสติกาคานนั้นสามารถรับได้สูงสุด ในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.06$  และ  $\bar{w} = 7.896$  และสำหรับ ส่วนในกรณีที่  $\bar{k} = 1000$  จุดที่รับน้ำหนักได้มากที่สุด จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.05$  และ  $\bar{w} = 18.426$  ซึ่งหลังจากจุดที่รับน้ำหนักได้สูงสุด น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ลดลง ในขณะที่มีการแอ่นตัวเพิ่มขึ้น ซึ่งความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นสมมูลแบบไร้เสียดียภาพ จนกระทั่งถึงจุดที่ความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_T = 1.25$  ซึ่งทำให้อิลาสติกาคานเริ่มหลุดออกจากที่รองรับ ซึ่งเป็นจุดที่สิ้นสุดการคำนวณ ส่วนรูปร่างสมมูลในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  (ไม่มีสตีฟเนสของสปริงหมุน) แสดงในรูปที่ 6 และเมื่อทำการ แปรผันค่า  $\bar{k}$  ไปที่  $5, 10, 100$  และ  $1000$  จะทำให้จุดหมุนนั้นเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม กล่าวคือมีสตีฟเนส ของสปริงเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งทำให้ทางคานจุดหมุน A นั้นมีความต้านทานในการรับแรงดัดเพิ่มมากขึ้น ซึ่งเมื่อทำให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น จะต้องใช้น้ำหนักบรรทุกที่มากขึ้นตามไปด้วย รูปร่างของอิลาสติกาคานที่มีเปลี่ยนไปจุดที่มีสปริงอยู่นั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้งที่  $\beta = 0.25$   $\bar{k} = 0 - 1000$



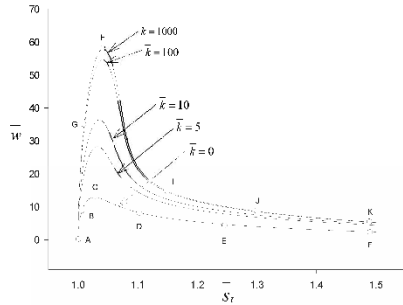
รูปที่ 6 รูปร่างของอิลาสติกาคานที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 0$



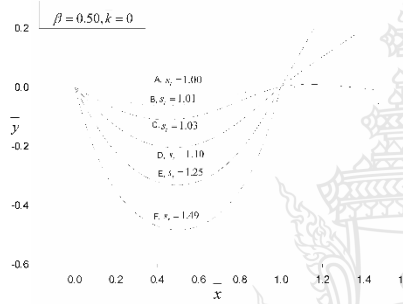
รูปที่ 7 รูปร่างของอิลาสติกาคานที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.25$  และ  $\bar{k} = 1000$

##### 4.2 ผลการศึกษากรณีที่มีค่า $\beta = 0.50$ และทำการแปรผันค่า $\bar{k}$ ตั้งแต่ค่า $0, 5, 10, 100$ และ $1000$

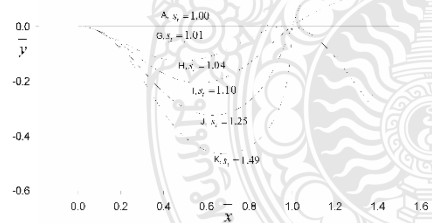
จากรูปที่ 8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  จากกราฟจะเห็นได้ว่า เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  เพิ่มขึ้น น้ำหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเป็นสมมูลแบบบีเสียดียภาพ จนถึงจุดที่อิลาสติกาคานนั้นถึงจุดบรรทุกวิกฤติในกรณีที่  $\bar{k} = 0$  จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.06$  และ  $\bar{w} = 10.800$



รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างหน้าหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  
 $\beta = 0.50 \quad \bar{k} = 0 - 1000$



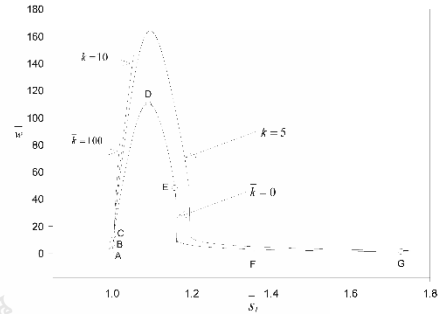
รูปที่ 9 รูปร่างของอีลาสติคคาที่ได้อากการคำนวณ  $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 0$   
 $\beta = 0.50, \bar{k} = 1000$



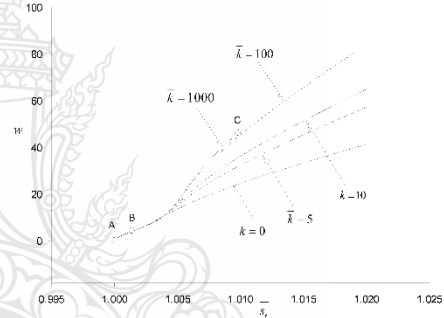
รูปที่ 10 รูปร่างของอีลาสติคคาที่ได้อากการคำนวณ  
 $\beta = 0.50$  และ  $\bar{k} = 1000$

ส่วนในกรณีนี้  $\bar{k} = 1000$  จุดบรรทุกวิกฤติ จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.04$  และ  $\bar{w} = 57.824$  ซึ่งหลังจากจุดที่รับหน้าหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว หน้าหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ก็จะลดลง ในขณะที่ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  เพิ่มขึ้น (สภาวะสมดุลแบบไร้เสถียรภาพ) จนถึงที่ความยาวส่วนโค้งที่  $\bar{s}_T = 1.50$  ซึ่งเป็นตำแหน่งที่อีลาสติคคาเริ่มหลุดออกจากจุดรองรับ แสดงในรูปที่ 7 ในส่วนของรูปร่างสมดุลที่ไม่มีสติฟเนสของสปริง ( $\bar{k} = 0$ ) ดังแสดงในรูปที่ 9 และเมื่อทำการแปรผัน

ค่า  $\bar{k}$  ไปที่ 5, 10, 100 และ 1000 ทำให้จุดหมุนนั้นมีสติฟเนสของสปริงหมุนเข้ามาเกี่ยวข้องกับ ทำให้ทางด้านจุดหมุน A นั้นมีความต้านทานในการรับแรงดัดเพิ่มมากขึ้น เมื่อจะทำให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น จะต้องใช้หน้าหนักบรรทุกที่มากขึ้นตามไปด้วย รูปร่างของอีลาสติคคาที่มีเปลี่ยนไปจุดที่มีสปริงอยู่นั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 11 ความสัมพันธ์ระหว่างหน้าหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  
 $\beta = 0.75 \quad \bar{k} = 0 - 1000$

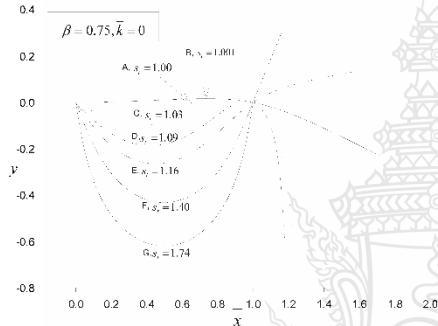


รูปที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างหน้าหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  
 $\beta = 0.75 \quad \bar{k} = 0 - 1000$  ความยาว  $\bar{s}_T = 1.00 - 1.02$

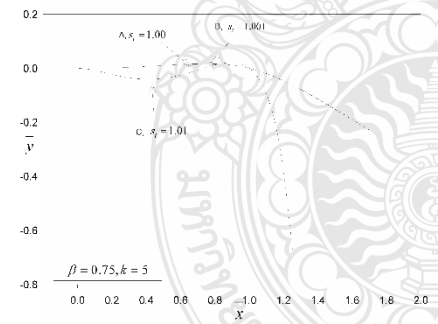
#### 4.3 ผลการศึกษากรณีนี้ที่ค่า $\beta = 0.75$ และทำการแปรผันค่า $\bar{k}$ ตั้งแต่ค่า 0, 5, 10, 100 และ 1000

จากรูปที่ 11 และรูปที่ 12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน้าหนักบรรทุก  $\bar{w}$  และความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  จากกราฟเห็นได้ว่า ในกรณีนี้ ความยาวของปลายยื่นมีอิทธิพลมากกว่าความยาวของอีลาสติคคาภายในช่วงของจุดรองรับ AB ในบางกรณี เมื่อความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  เพิ่มขึ้น หน้าหนักบรรทุก  $\bar{w}$  มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย (สมดุลแบบมีเสถียรภาพ) จนกระทั่งถึงจุดที่อีลาสติคคานั้นถึงจุดวิกฤติ ในกรณีนี้ที่  $\bar{k} = 0$  จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.09$  และ  $\bar{w} = 110.427$  หรือ ส่วนในกรณีที่  $\bar{k} = 5$  จุดบรรทุกวิกฤติ จะอยู่ที่  $\bar{s}_T = 1.10$  และ  $\bar{w} = 163.539$  ซึ่งหลังจากจุดที่รับหน้าหนักบรรทุกวิกฤติแล้ว หน้าหนักบรรทุก  $\bar{w}$  ก็จะลดลงอย่างรวดเร็ว ในขณะที่ความยาวส่วนโค้ง  $\bar{s}_T$  เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย หลังจากนั้น หน้าหนักบรรทุกมีค่าที่ลดลงอย่างช้าๆ จนถึงที่ความยาวส่วนโค้งที่

$\bar{s}_f = 1.75$  ซึ่งเป็นตำแหน่งที่อิลาสติกคาเริ่มหลุดออกจากจุดรองรับ ความสัมพันธ์ดังกล่าวแสดงในรูปที่ 11 ในขณะที่รูปร่างสมมูลในกรณีที่ไม่มียึดพลาตของสปริงดังแสดงในรูปที่ 13 และเมื่อทำการแปรผันค่า  $\bar{k}$  ไปที่ 5, 10, 100 และ 1000 จะทำให้จุดหมุนนั้นมีสติฟเนสของสปริงเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งทำให้ทางด้านจุดหมุน A นั้นมีความต้านทานในการรับแรงเพิ่มมากขึ้น เมื่อจะทำให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้น จะต้องใช้น้ำหนักบรรทุกที่มากขึ้นตามไปด้วย และเมื่อเพิ่มน้ำหนักบรรทุกเพิ่มมากขึ้น ส่วนของปลายยี่ที่มีค่าค่อนข้างมากจะมีอิทธิพลมากขึ้นทำให้ความยาวส่วนโค้งภายในจุดรองรับ AB ไม่สามารถเพิ่มขึ้นต่อไปได้ ดังแสดงในรูปที่ 11 และ 12 ในส่วนของรูปร่างของอิลาสติกคาในกรณีสปริงหมุนมีค่าสติฟเนสเท่ากับ 100 ( $\bar{k} = 100$ ) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าปลายที่ยื่นออกไปมีอิทธิพลมากขึ้นและการตั้งรั้งอิลาสติกคาทำให้ไม่สามารถเพิ่มความยาวส่วนโค้งในช่วง AB ต่อไปได้ แสดงในรูปที่ 14



รูปที่ 13 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ  $\beta = 0.75$  และ  $\bar{k} = 0$



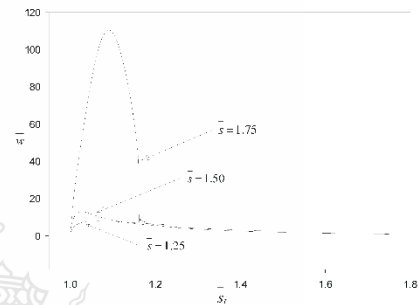
รูปที่ 14 รูปร่างของอิลาสติกคาที่ได้จากการคำนวณ

$$\beta = 0.75 \text{ และ } \bar{k} = 5$$

4.4 การศึกษากรณีค่า  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  ค่า  $\bar{k} = 0$

จากรูปที่ 15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก  $w$  และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด  $\bar{s}_f$  โดยที่แปรผันความยาวที่ปลายยื่นของอิลาสติกคา  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  โดยที่ค่าสติฟเนสของสปริงหมุน

เท่ากับ  $\bar{k} = 0$  (ไม่มีสติฟเนสของสปริงหมุน) จากรูปที่ 15 กราฟแสดงให้เห็นว่าในกรณีที่ความยาวที่ปลายแตกต่างกัน ความสามารถในการน้ำหนักบรรทุกมีแนวโน้มการเพิ่มขึ้น อย่างเห็นได้ชัดเจน ซึ่งการรับน้ำหนักได้สูงสุดของแต่ละความยาวได้ดังนี้  $\bar{s}_f = 1.25$  น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ  $w = 7.896$  ที่  $\bar{s}_f = 1.50$  น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ  $w = 10.800$  และที่  $\bar{s}_f = 1.75$  น้ำหนักบรรทุกวิกฤติ  $w = 110.427$  ซึ่งในรูปที่ 15 นี้ไม่มีค่าสติฟเนสของสปริงหมุนมาเกี่ยวข้อง ทำให้เห็นถึงผลกระทบของปลายยื่นได้อย่างชัดเจนเมื่อแปรผันค่าของปลายยื่น ความสามารถของอิลาสติกคาในการรับน้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้น ซึ่งรูปร่างสมมูลนั้น ได้แสดงในรูปที่ 6, 9 และ 13



รูปที่ 15 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและความยาวส่วนโค้ง  $\beta = 0.25, 0.50$  และ  $0.75$  ที่  $\bar{k} = 0$

## 5. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาผลกระทบของปลายยื่นของอิลาสติกคาที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีแรงกระทำภายในน้ำหนักบรรทุกของตัวเอง ปลายด้านหนึ่งของอิลาสติกคาวางอยู่บนจุดรองรับแบบสปริงหมุน ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งวางอยู่บนจุดรองรับแบบไร้แรงเสียดทาน โดยที่ปลายยื่นกำหนดให้เป็นสัดส่วนกับความยาวของช่วงของอิลาสติกคา  $\beta L$  กรณีที่ค่าปลายยื่น  $\beta = 0.25, 0.50, 0.75$  และแปรผันค่าสติฟเนสของสปริงหมุน  $\bar{k} = 0, 5, 10, 100, 1000$  สามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

### 5.1 ผลของปลายยื่นของอิลาสติกคา

ผลของปลายยื่นของอิลาสติกคามีอิทธิพลเพิ่มมากขึ้น เมื่อปลายยื่นมีค่าที่เพิ่มขึ้น เป็นผลให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤติเพิ่มขึ้น และทำให้ระบบเกิดการตั้งรั้งกันระหว่างส่วนที่เป็นปลายยื่นและส่วนที่อยู่ด้านในของจุดรองรับ เมื่อปลายยื่นมีความยาวมากขึ้นจนกระทั่งอิทธิพลของส่วนที่เป็นปลายยื่นมีมากกว่าส่วนของอิลาสติกคาที่อยู่ภายในจุดรองรับเป็นผลให้ในบางกรณีอิลาสติกคาไม่สามารถเลื่อนเข้าไปจุดรองรับได้เนื่องจากเกิดการตั้งรั้งของส่วนที่เป็นปลายยื่น

### 5.2 ผลกระทบของสปริงหมุน

ในส่วนของผลกระทบของสปริงหมุนนั้น พบว่าสติฟเนสของสปริงหมุนที่เพิ่มขึ้นทำให้ระบบมีสติฟเนสที่เพิ่มขึ้น และเป็นผลให้ค่าน้ำหนัก

บรรทุกฎกติกามีค่าที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน โดยที่เมื่อสตีฟเนสมีค่าเป็นศูนย์เปรียบเสมือนจุดรองรับเป็นแบบหมุนไร้แรงเสียดทาน ในขณะที่สตีฟเนสที่เท่ากับ 1000 เปรียบเสมือนจุดรองรับแบบยึดแน่น

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] Chucheepsakul, S. and Huang, T. (1992). Finite element solution of large deflection analysis of a class of beam. *Proceeding of the Computational Method in Engineering*, 1, pp. 45-50.
- [2] สมเจตน์ อยู่สุนิห์ และสมชาย ชูชีพสกุล (2536). การใช้วิธีไฟไนท์เอลเมนต์วิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายข้างหนึ่งเคลื่อนได้อย่างอิสระ. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [3] สุรพันธ์ บุญเจริญ และสมชาย ชูชีพสกุล (2536). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีปลายเคลื่อนได้อย่างอิสระ โดยวิธีอิลิปติกอินเทกรัล. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [4] จีระพงษ์ เทพพิทักษ์ และสมชาย ชูชีพสกุล (2538). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานช่วงเดียวที่มีความยาวส่วนโค้งโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [5] He, X.Q., Wang, C.M. and Lam, K.Y. (1997). Analytical bending solutions of elastica with one end held while the other end portion slides on a friction support. *Archive of Applied Mechanics*, Vol.67, No.8, pp. 543-554
- [6] Wang, C.M., Lain, K.Y. and He, X.Q. (1997). Instability of variable-arc-length elastica under follower force. *Mechanics Research Communication*, 25, pp. 189-194
- [7] สุนีสา รอดสังวาลย์ และสมชาย ชูชีพสกุล (2541). การวิเคราะห์การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยวิธีไฟไนท์เอลเมนต์. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [8] Chucheepsakul, S. and Phungpaingam, B. (2004). Elliptic integral solution of variable-arc-length elastica under an inclined follower force. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 84, pp. 29-38
- [9] Zhang, X. and Yang, J. (2005). Inverse problem of elastica of a variable-arc-length beam subjected to a concentrated load. *Acta Mechanica Sinica*, 21, pp. 444-450
- [10] นฤพนธ์ ศิลลาภากุล และสมชาย ชูชีพสกุล (2548). การแอ่นตัวมากของคานที่ทำจากวัสดุแบบไม่เชิงเส้น. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [11] Athisakul, C. and Chucheepsakul, C. (2007). Effect of inclination on bending of variable-arc-length beams subjected to uniform self-weight. *Engineering Structures*, 30, pp. 902-908
- [12] Athisakul, C., Phungpaingam, B., Juntarakong, G. and Chucheepsakul, S. (2012). Effect of material nonlinearity on large deflection of variable-arc-length beams subjected to uniform self-weight. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, Article ID 345461, 9 pages.
- [13] Humer, A. (2011). Elliptic integral solution of the extensible elastica with a variable length under a concentrated force. *Acta Mechanica*, 222, pp. 209-223
- [14] Pulngern, T., Sudsanguan, T., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S. (2011). Elastica of a variable-arc-length circular curved beam subjected to an end follower force. *Non-Linear Mechanics*, 49, pp. 129-136
- [15] Phungpaingam, B., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S. (2012). Instability of variable-arc-length elastica subject to end moment. *The IES Journal Part A : Civil & Structure Engineering*, 5, pp. 85-89
- [16] ณัฐภูมิ พิชัยยุทธ์ และ บุญชัย หึงไผ่งาม (2558). พฤติกรรมหลังการโค้งงอของอีลาสติคาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ โดยมีจุดหมุนแบบสปริงอยู่ภายในช่วงความยาวของอีลาสติคาคาน. *การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 20*, ชลบุรี, วันที่ 8-10 กรกฎาคม 2558
- [17] Pulngern, T., Chucheepsakul, S. and Halling, M.W. (2004). Vibrations of a slightly inclined variable-arc-length beam: analytical and experimental. *Conference: 2004 IMAC-XXII: Conference & Exposition on Structural Dynamics*, Dearborn, Michigan, USA, January 26 – 29, Paper No. 159.
- [18] Chucheepsakul, S. and Monprapussorn, T. (2000). Divergence instability of variable-arc-length elastica pipes transported fluid. *Journal of Fluids and structures*, 14, pp. 895-916.
- [19] กอปรชัย ศิริตระกูลมั่งคั่ง และ สมชาย ชูชีพสกุล (2545). การหาค่าคอบทงไฟไนท์เอลลิเมนต์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยใช้ระบบพิกัดลากรางจ์. *วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี*.
- [20] Athisakul, C., Phungpaingam, B., Chatanin, W. and Chucheepsakul, S. (2012). Critical weight of flexible pipe conveying fluid subjected to end moments. *The IES Journal Part A : Civil & Structure Engineering*, 5, pp 90-94.
- [21] Plaut, R.H., Dillard, D.A. and Borum, A.D. (2011). Collapse of heavy cantilevered elastica with frictional internal support. *Journal of Applied Mechanics*. July 2011, 78, 041011 (5 pages).





**การประชุมวิชาการวิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒**  
**“เทคโนโลยีเขียวเพื่อการพัฒนาโครงสร้างพื้นฐานอย่างยั่งยืน”**

ขอมอบเกียรติบัตรฉบับนี้เพื่อแสดงว่า

**ศรัณย์ ชุ่มกลัด และ บุญชัย ผิงไผ่งาม**

ได้เข้าร่วมประชุมและเสนอบทความ

**ผลกระทบของปลายีนของอัลลาตติคาค่าที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้**  
**โดยมีแรงกระทำภายใต้น้ำหนักบรรทุกของตัวเอง**

ระหว่างวันที่ ๑๘ - ๒๐ กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๖๐

ณ เดอะกรีนเนอริ รีสอร์ท อ.ปากช่อง จ.นครราชสีมา

ได้รับการรับรองจากสภาวิศวกรให้มีจำนวนหน่วยพัฒนา ๑๒ หน่วย รหัสกิจกรรม ๓๐๑-๐๑-๒๐๐๑-๐๐/๖๐๐๗-๐๐๔

**ศาสตราจารย์ ดร. วิระศิริ**

(ดร.ธเนศ วิระศิริ)

นายกวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปี พ.ศ. ๒๕๖๐-๒๕๖๒

**ศาสตราจารย์ เอเนก ศิริพานิชกร**

(รองศาสตราจารย์ เอเนก ศิริพานิชกร)

ประธานกรรมการกลางจัดประชุมวิชาการ

วิศวกรรมโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ ๒๒

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายศรัณย์ ชุ่มกลัด
วัน เดือน ปีเกิด	20 มกราคม 2527
ที่อยู่	163/1 ม.6 ต.ปากโทก อ.เมือง จ.พิษณุโลก 65000
การศึกษา	ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ประสบการณ์การทำงาน	ตำแหน่ง นายช่างโยธาปฏิบัติงาน สำนักงานทางหลวงที่ 5 (พิษณุโลก) กรมทางหลวง กระทรวงคมนาคม พ.ศ. 2554 – ปัจจุบัน
เบอร์โทรศัพท์	082-0705060
อีเมล	<a href="mailto:sarun@mail.rmUTT.ac.th">sarun@mail.rmUTT.ac.th</a>

