พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย
โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

POSTBUCKLING BEHAVIOR OF CANTILEVER COLUMN UNDER END LOADING USING DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD

สุรชัย ทรัพย์เพิ่ม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีการศึกษา 2559

พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย
โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

สุรชัย ทรัพย์เพิ่ม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีการศึกษา 2559

หัวข้อวิทยานิพนธ์	พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์
	Postbuckling Behavior of Cantilever Column under End Loading Using Differential Transformation Method
ชื่อ - นามสกุล	นายสุรชัย ทรัพย์เพิ่ม
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2559

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(อาจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกตุ, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์หมิง จิ้ง, D.Eng.)

.... กรรมการ
(อาจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)
วันที่ 3 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2560

หัวข้อวิทยานิพนธ์	พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์
ชื่อ-นามสกุล	นายสุรชัย ทรัพย์เพิ่ม
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.
ปีการศึกษา	2559

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เกี่ยวข้องกับการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยปลายด้านหนึ่งของเสาเป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ในขณะที่อีกปลายด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ ปัญหาหลังการโก่งเดาะของเสายื่นสามารถอธิบายได้ด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้น แม้ว่าปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้จากสมการครอบคลุมปัญหาแต่ยังต้องแสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันพิเศษ เช่น อิลิปติกฟังก์ชัน จึงทำให้ไม่สะดวกต่อการคำนวณ หนึ่งในวิธีที่น่าสนใจสำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ คือวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสามารถให้ผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดได้โดยจัดในรูปของอนุกรมเทย์-เลอร์

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นกระบวนการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต ในรูปของฟังก์ชันแปลง ผลเฉลยสามารถคำนวณโดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดยทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหาของเสายื่น ซึ่งประกอบไปด้วย สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ด้วยกระบวนการผกผันฟังก์ชันแปลงกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาไปด้วยกัน และทำการหาผลเฉลยของน้ำหนักบรรทุกวิกฤตและพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาโดยวิธี DTM

จากการศึกษาพบว่าผลเฉลยที่ได้จากกระบวนการคำนวณที่ใช้ในการศึกษานี้ มีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากการคำนวณโดยวิธียิงเป้าและวิธีอิลิปติกอินทิกรัลเป็นอย่างดี โดยพบว่าความถูกต้องของผลเฉลยขึ้นอยู่กับ 2 ปัจจัยหลัก คือ 1) จำนวนเทอมที่ใช้ในการกระจายฟังก์ชัน sine และ cosine 2) จำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณในวิธี DTM นอกจากนี้จำนวนเทอมที่เพิ่มมากขึ้นส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

คำสำคัญ: การแปลงเชิงอนุพันธ์ เสาปลายยื่น การโก่งตัวมาก

Thesis Title	Postbuckling Behavior of Cantilever Column under End Loading Using Differential Transformation Method
Name - Surname	Mr. Surachai Supperm
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Mr. Boonchai Phungpaingam, Ph.D.
Academic Year	2016

ABSTRACT

This research study is aimed at investigating the postbuckling behavior of a cantilever column under end loading by using Differential Transformation Method (DTM). One end of column is fixed while the other end is free. The problem of postbuckling of a cantilever column can be explained by a system of non-linear differential equations. Even the proposed problem can be solved for the exact by governing closed-form solutions, it needs the special functions such as elliptic integral functions. This may lead to hard inconvenience in calculation process. One of interesting method for solving system of differential equations is the Differential Transformation Method, which yields approximate closed-form solutions of the problem in terms of Taylor's series.

The DTM is methodological process that transforms the differential equations into algebraic equations in terms of transformed functions. The results of the problem can be computed by imposing the boundary conditions. The transformation technique applies to the set of governing differential equations which include moment-curvature relations and geometric relations. By applying the inverse process of the transformation together with the boundary conditions, the solutions for critical load and postbuckling behavior can be determined by using DTM.

It is found that the results obtained from using DTM are in excellent agreement with those from the shooting method and elliptic integral method. The results also show that the accuracy of the calculation depended on two major factors : 1) the number of considered terms in the Taylor's series of sine and cosine functions, and 2) the number of terms used in the computation process of DTM. In addition, the increase of the number of terms in calculation contributes to greater accuracy of the results.

Keywords: differential transformation method, cantilever column, large deflection

กิตติกรรมประกาศ

ผู้จัดทำวิทยานิพนธ์ขอขอบพระคุณ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาเสียสละเวลาส่วนตนมาให้คำแนะนำ แนะแนวทางในการแก้ปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นในระหว่างการทำวิจัยรวมทั้งตรวจทานความถูกต้องจนทำให้การทำวิทยานิพนธ์มีความก้าวหน้าและสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกต ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.หมิง จิ๋ง กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ จากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่กรุณาได้สละเวลามาดำเนินการสอบวิทยานิพนธ์นี้และขอขอบพระคุณท่าน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล จากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่กรุณารับเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และได้สละเวลามาดำเนินการสอบวิทยานิพนธ์รวมทั้งให้ความอนุเคราะห์ชี้แนะแนวทางในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์นี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่ให้การสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

สุดท้าย ขอคาราวะครูบาอาจารย์ทั้งในอดีตและปัจจุบันที่ท่านได้กรุณาประสิทธิ์ประสาทวิชาทุกท่าน และผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา พี่น้องทุกคนพร้อมครอบครัวของผู้เขียนที่คอยให้กำลังใจเสมอมา

สุรชัย ทรัพย์เพิ่ม

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

C_1	=	ค่าโมเมนต์ที่จุดรองรับ A
C_2	=	ค่าแรงเฉือนที่จุดรองรับ A
C_3	=	มุมลาดเอียงที่ปลายเสา B, θ_B
C_4	=	ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ในแนวแกน X
C_5	=	ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ในแนวแกน Y
E	=	ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น
F	=	แรงกระทำเป็นจุดที่ปลายเสา B
I	=	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่
k	=	อันดับการดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันแบบตัวแปรเดียว
L	=	ความยาวเสา
M	=	โมเมนต์ดัด
s	=	ความยาวส่วนโค้ง
$\bar{s}$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ s
x	=	ระยะการเคลื่อนตัวตามแนวแกน X ใดๆ
$\bar{x}$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ x
x_B	=	ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ตามแนวแกน X
$\bar{x}_B$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ x_B
X	=	ฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $\bar{x}$
y	=	ระยะการเคลื่อนตัวตามแนวแกน Y ใดๆ
$\bar{y}$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ y
y_B	=	ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ตามแนวแกน y
$\bar{y}_B$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ y_B
Y	=	ฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $\bar{y}$
θ	=	มุมลาดเอียง ณ ตำแหน่งใดๆ
Θ	=	ฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์ของ θ
μ	=	$\frac{F}{EI}$
$\bar{\mu}$	=	พารามิเตอร์ไร้หน่วยของ μ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะและการแอ่นตัวของโครงสร้างโดยทั่วไปนิยมใช้ทฤษฎีการดัดเบื้องต้น ที่มองโครงสร้างในลักษณะเสาหรือคานตัวหนึ่ง และเมื่อโครงสร้างนั้นมีแรงภายนอกมากระทำจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของโครงสร้าง และสมมติว่ามีการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมน้อยมาก ทำให้ในสมการของรัศมีความโค้งที่มีตัวหารเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งยกกำลังสองมีค่าน้อยมากด้วยเช่นกันจนสามารถตัดทิ้งได้ แต่ในบางกรณี เช่น คานที่พาดวางบนจุดรองรับไร้แรงเสียดทานเมื่อมีน้ำหนักมากระทำ ตัวคานเองสามารถแอ่นตัวได้มากกว่าปกติทั้งที่คานยังมีคุณสมบัติอยู่ในช่วงอิลาสติก จึงทำให้สมการทฤษฎีการดัดเบื้องต้นไม่สามารถให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับความจริงได้ ปัญหาการแอ่นตัวมากได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวางซึ่งเห็นได้จากงานวิศวกรรมนอกฝั่ง (Offshore Engineering) ในงานขุดเจาะน้ำมันตามแหล่งปิโตรเลียมต่างๆ ปัญหาของท่อลำเลียงน้ำมันระหว่างพื้นทะเลกับแท่นเจาะ จะถูกมองว่าเป็นปัญหาแบบอิลาสติกคา (Elastica) หรือการแอ่นตัวมาก ในทำนองเดียวกันการศึกษาปัญหาการโก่งเดาะมักถูกนำมาพิจารณาเกี่ยวกับเสาทั้งการหาน้ำหนักวิกฤต (Buckling load) และพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ (Postbuckling behavior) เช่น งานวิจัยของ Chai and Wang [1], Lingfeng and Shiyuan [2] ในปัจจุบันวิธีการแก้ปัญหาเหล่านี้มักนิยมกระทำใน 3 วิธีหลักๆ คือ วิธีอิลิปติกอินทิกรัล (Elliptic-Integral Method), วิธียิงเป้า (Shooting Method) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) โดยวิธีการแรกได้ให้คำตอบในรูปแบบปิด ในส่วนของสองวิธีการหลังให้คำตอบในเชิงตัวเลข [3] แต่อย่างไรก็ตามวิธีการศึกษาทั้งสามข้างต้นยังต้องอาศัยเทคนิคการอินทิเกรตเพื่อหาคำตอบจึงทำให้ในการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะและการแอ่นตัวมากเป็นปัญหาที่มีความไร้เชิงเส้นสูง มีความยุ่งยากซับซ้อนมากยิ่งขึ้น อย่างไรก็ตามมีนักวิจัยหลายท่านพยายามพัฒนาเทคนิคการคำนวณแบบใหม่ๆ เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษา มีความถูกต้องสูงและมีความน่าเชื่อถือ เช่น ในงานวิจัยของ Odibat and Momani [4] หรือการนำเทคนิคการคำนวณแบบอื่นมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาการโก่งเดาะและการแอ่นตัวมากของโครงสร้าง เช่น

Salehi และคณะ [5] ได้ใช้เทคนิค VIM (Variational Iteration Method) เป็นต้น แต่เทคนิคการคำนวณเหล่านี้ยังต้องอาศัยการอินทิเกรตร่วมด้วยเช่นเดิม

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method, DTM) เป็นเทคนิคการคำนวณอีกวิธีหนึ่งที่กำลังได้รับความสนใจ มีนักวิจัยหลายท่านนำมาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของคำตอบในด้านงานวิศวกรรมมากขึ้น สำหรับงานวิจัยนี้ทำการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย จะนำวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้เพื่อหาผลเฉลยต่างๆ โดยวิธีการนี้ไม่ได้ใช้เทคนิคการอินทิเกรตใดๆ แต่จะอาศัยเทคนิคการเปลี่ยนโดเมนของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการเชิงพีชคณิต เพื่อให้สะดวกต่อการแก้ปัญหา เมื่อได้คำตอบของตัวแปรต่างๆ แล้วจึงเปลี่ยนจากโดเมนระบบสมการเชิงพีชคณิตกลับมาเป็นคำตอบของสมการ ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดอย่างง่ายในการทำนายพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะของเสายื่น

2. เพื่อประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณก่อนและหาผลเฉลยในช่วงหลังการโก่งเดาะของเสายื่น

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายโดยใช้ระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข ซึ่งมีขอบเขตในการวิเคราะห์ดังนี้

1.3.1 แบบจำลองในการวิเคราะห์เป็นแบบเสายื่นสองมิติ ที่มีจุดรองรับด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่น และอีกปลายด้านเป็นแบบอิสระ มีขนาดหน้าตัด คุณสมบัติวัสดุคงที่ตลอดความยาวเสา

1.3.2 การพิจารณาการโก่งเดาะของเสายื่นเป็นแบบโก่งตัวได้มากแต่ความเครียดภายในมีค่าน้อย

1.3.3 คุณสมบัติวัสดุของเสาเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke’s Law)

1.3.4 สมการที่ได้จากการแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการครอบคลุมปัญหา มีจำนวนพจน์สูงสุด 30 พจน์

1.4 ขั้นตอนการศึกษา

1.4.1 พัฒนาสมการคลอบคลุมปัญหาที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น และสมการดังกล่าวยังขึ้นอยู่กับตัวแปรต่างๆ มากมาย เพื่อความสะดวกในการศึกษาตัวแปรต่างๆ และลดความผิดพลาดจากการคำนวณจึงจัดสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ให้อยู่ในรูปแบบตัวแปรไร้มิติ

1.4.2 หาผลเฉลยของตัวแปรต่างๆ ด้วยระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

1.4.3 ทำการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้จากการวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์กับคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีแม่นตรง (Exact solutions) ในงานวิจัยที่ผ่านมา หากมีความคลาดเคลื่อนสูงจะย้อนกลับไปดำเนินการตามข้อที่ 1.4.2 ด้วยการสร้างพจน์ของสมการพีชคณิตในระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ให้มีจำนวนพจน์มากขึ้น จนกว่าจะมีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า $\varepsilon_a = 10^{-10}$

1.4.4 หากตัวแปรที่ได้ในขั้นตอนที่ 1.4.2 ให้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของจุดรองรับแล้วจะสามารถนำไปสร้างความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและการเคลื่อนที่ของตำแหน่งต่างๆ ต่อไปได้

1.4.5 สรุปผลการวิจัยและทำรายงานผลการวิจัยเพื่อนำเสนอ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การศึกษาระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์โดยมีแบบจำลองเป็นเสายื่นที่มีแรงกระทำที่ปลาย กำหนดให้เสามีคุณสมบัติโก่งเดาะหรือแอ่นตัวได้มาก ที่ปลายด้านหนึ่งของจุดรองรับเป็นแบบยึดแน่น ส่วนอีกปลายด้านหนึ่งเป็นแบบอิสระ เสาในลักษณะนี้นิยมใช้เป็นแบบจำลองของโครงสร้างแบบหนึ่งที่พบเห็นได้ทั่วๆ ไปในชิ้นส่วนเครื่องจักรกล เช่น ปีกเครื่องบิน ใบพัดเฮลิคอปเตอร์ หรืออุปกรณ์ทางด้านกีฬา เช่น ไม้ค้ำถ่อ เป็นต้น การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ มีข้อดีในด้านการไม่ใช้เทคนิคการอินทิเกรตซึ่งเป็นเรื่องที่ยุ่งยากซับซ้อน และอาจจะมีข้อผิดพลาดในการคำนวณได้ง่าย ระเบียบวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้ยังเป็นวิธีการใหม่ที่นำมาใช้ศึกษาปัญหาด้านอิลาสติกคา โดยที่การใช้วิธีการดังกล่าวสามารถให้ผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดได้ ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างยิ่งในการทำนายพฤติกรรมที่ให้ผลลัพธ์โดยทันที (Real time) ไม่จำเป็นต้องอาศัยกระบวนการกระทำซ้ำอีกต่อไป และการเข้าใจถึงข้อจำกัดต่างๆ ในระเบียบวิธีการนี้จะสามารถนำไปขยายผลและประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์อื่นๆ ในงานวิศวกรรมเพื่อหาผลเฉลยของคำตอบที่มีความแม่นยำ ถูกต้องและรวดเร็วได้ดียิ่งขึ้น

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้ทำการพิจารณาเสายื่นที่มีจุดรองรับแบบยึดแน่น อีกปลายเสาด้านหนึ่งเป็นแบบอิสระ ภายใต้แรงกระทำที่ปลายอิสระในแนวดิ่ง เมื่อเสารับแรงกระทำจะเกิดการโก่งเดาะดัดงอได้ การวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวจะใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตและการเสียรูปของเสาหลังการโก่งเดาะ และนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับวิธีผลเฉลยแม่นตรง และในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงหลักการการหาคำตอบของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

2.1 สมมติฐานในการวิเคราะห์

สมมติฐานที่ใช้ในการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายมีรายละเอียดดังนี้

2.1.1 วัสดุของเสามีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาวเสาและมีคุณสมบัติทางกายภาพ เหมือนกันในทุกทิศทาง

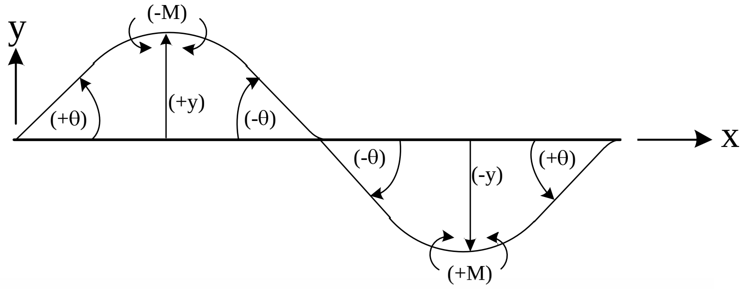
2.1.2 เสาไม่มีการยืดตัวหรือหดตัวตามแนวแกนเมื่อมีแรงกระทำ

2.1.3 หน้าตัดของเสาเป็นระนาบคงที่ทั้งก่อนและหลังรับแรงกระทำ

2.1.4 การแอ่นตัวและโก่งเดาะดัดงอของเสามีได้มาก แต่ความเครียดที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย

2.1.5 ไม่คำนึงถึงผลกระทบการเสียรูปอันเนื่องมาจากแรงเฉือน

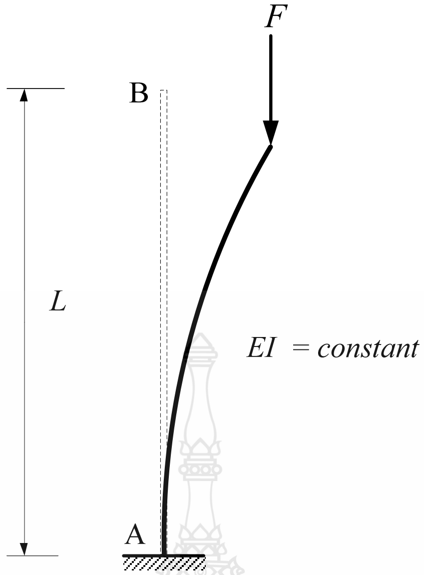
2.1.6 การแอ่นตัวและโก่งดัดงอของเสาอยู่ภายใต้ทฤษฎีการดัดของออยเลอร์-แบร์นูลลี (Euler-Bernoulli)



รูปที่ 2.1 ข้อกำหนดและเครื่องหมาย

2.2 ลักษณะของปัญหา

ลักษณะปัญหาของเสายื่นที่มีการโก่งเดาะดัดงอได้มากเมื่อรับแรงกระทำที่ปลาย ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งมีค่าความแข็งแรงของวัสดุต่อการดัด (Flexural Rigicity) เท่ากับ EI โดยที่ E คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น และ I คือ ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของเสา ปลายเสาด้าน A มีจุดรองรับแบบยึดแน่น และปลายเสาด้าน B เป็นแบบอิสระ โดยที่เสายื่นมีความยาว L หน่วย มีแรงกระทำที่ปลายเสาในแนวดิ่งเท่ากับ F เมื่อเสารับแรงกระทำถึงระดับหนึ่งจะเกิดการเสียรูปร่างของเสา ทั้งการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมและการเคลื่อนตัวต่างๆ ตลอดความยาวเสา ขนาดของแรง F กระทำสูงสุดก่อนเกิดการเสียรูปของโครงสร้างนี้เรียกว่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต Timoshenko และคณะ [6] พบว่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของโครงสร้างดังกล่าวมีขนาด $\pi^2 / 4$ การหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต ค่าการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมและค่าการเคลื่อนที่ต่างๆ ของเสาที่ขนาดน้ำหนัก F กระทำต่างๆ ในการศึกษานี้ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์หาคำตอบในเชิงตัวเลข โดยที่วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้ เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ต้องใช้เทคนิคการอินทิเกรต แต่จะอาศัยการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต และจัดรวบรวมพจน์ต่างๆ ที่ได้ให้อยู่ในลักษณะของสมการอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor’s series) ดังจะได้กล่าวต่อไป



รูปที่ 2.2 ลักษณะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายเสาอิสระ

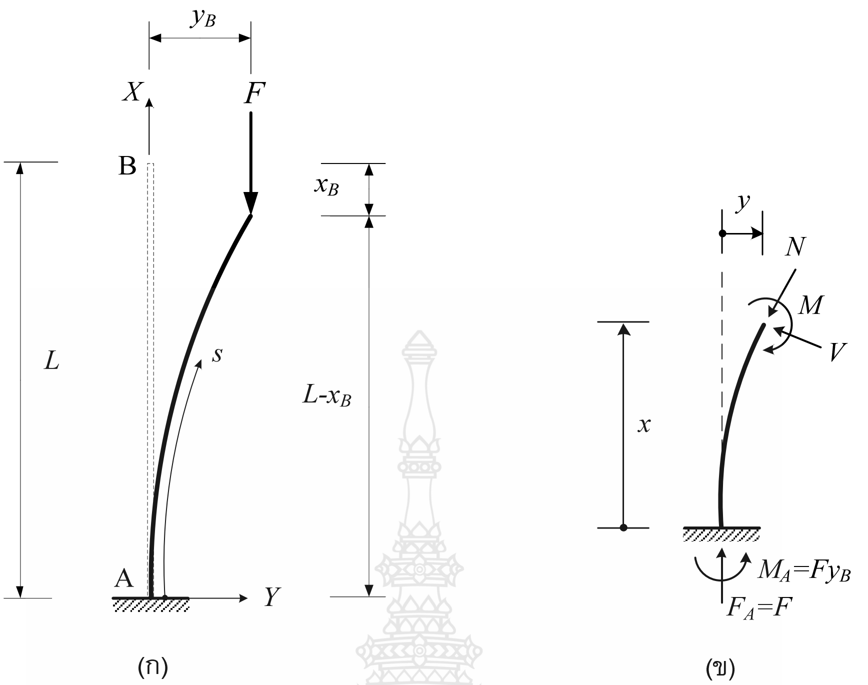
2.3 การวิเคราะห์ปัญหา

การวิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยนี้ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ แบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

2.3.1 กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต (Buckling load)

จากทฤษฎีการดัดของออยเลอร์-แบร์นูลลี (Euler-Bernoulli) สมการความโค้งของเสา-คานแม่นตรง แสดงในสมการที่ (2.1) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาการเสียรูปหรือการแอ่นตัวได้ทุกรูปแบบ แต่อย่างไรก็ตามสมการนี้มีพจน์ที่เป็นฟังก์ชันไร้เชิงเส้นร่วมอยู่ด้วย ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาทำได้ยุ่งยากยิ่งขึ้น โดยทั่วไปจะนิยมสมมติให้การเปลี่ยนรูปของโครงสร้างมีค่าน้อยมาก ทำให้ในค่าของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ที่ถูกยกกำลังสองมีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ และเมื่อรวมผลของค่าความเครียดที่เกิดจากการดัด ดังนั้นสมการค่าความโค้งที่ใช้ในการพิจารณาปัญหาการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายเสาในแนวแกนเสา แสดงได้ดังสมการที่ (2.2)

การสร้างสมการครอบคลุมปัญหาจะพิจารณาจากชิ้นส่วนย่อยเสาที่ระยะตัด x ใดๆ และอยู่ในสภาวะสมดุลของแรงต่างๆ แสดงในรูปที่ 2.3 (ข) โดยอาศัยสมมติฐานข้อที่ 2.1.6



รูปที่ 2.3 รูปร่างของเสายื่นเมื่อเกิดการเสียรูป

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}\simeq\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI} \tag{2.2}$$

พิจารณารูปที่ 2.3 (ข) ได้ $M = Fy_B - Fy$ จากนั้นดิฟเฟอเรนชิเอทหนึ่งครั้งเทียบกับ x จะได้

$$\frac{dM}{dx}=F\frac{d(y_B)}{dx}-F\frac{dy}{dx} \tag{2.3}$$

จากนั้นนำสมการที่ (2.2) ดิฟเฟอเรนชิเอทหนึ่งครั้งเทียบกับ x แสดงในสมการที่ (2.4) และนำสมการที่ (2.3) แทนค่า จะได้ดังแสดงในสมการที่ (2.5)

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dM}{dx}=0 \tag{2.4}$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}+F\frac{dy}{dx}=F\frac{d\left(y_B\right)}{dx} \tag{2.5}$$

ทำการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (2.5) เทียบกับ x อีกหนึ่งครั้งและเนื่องจาก y_B เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์การโก่งตัวสำหรับเสาใดๆ ที่มีแรงกระทำตามแนวแกนเสา แสดงในสมการที่ (2.6)

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\mu\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{2.6}$$

โดย $\mu=\frac{F}{EI}$

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการพิจารณาหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตใช้สมการที่ (2.6) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 อยู่ในรูปของตัวแปร y ที่อธิบายถึงพฤติกรรมการโก่งเดาะ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของเสา การคำนวณหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตสามารถพิจารณาได้จากพฤติกรรมการโก่งเดาะของโครงสร้างเสา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่นำมาพิจารณาสมการที่ (2.6) คือ การเคลื่อนที่ของตัวแปร y เข้าใกล้ศูนย์ที่จุดปลายเสายื่น และมีจำนวนเงื่อนไขขอบเขตของเสายื่นที่ใช้แก้สมการ 4 ตัว ดังนี้

ที่ x=0 (fixed end)

$$\mathrm{y}(x=0)=0 \tag{2.7}$$

$$\mathrm{y}'(x=0)=0 \tag{2.8}$$

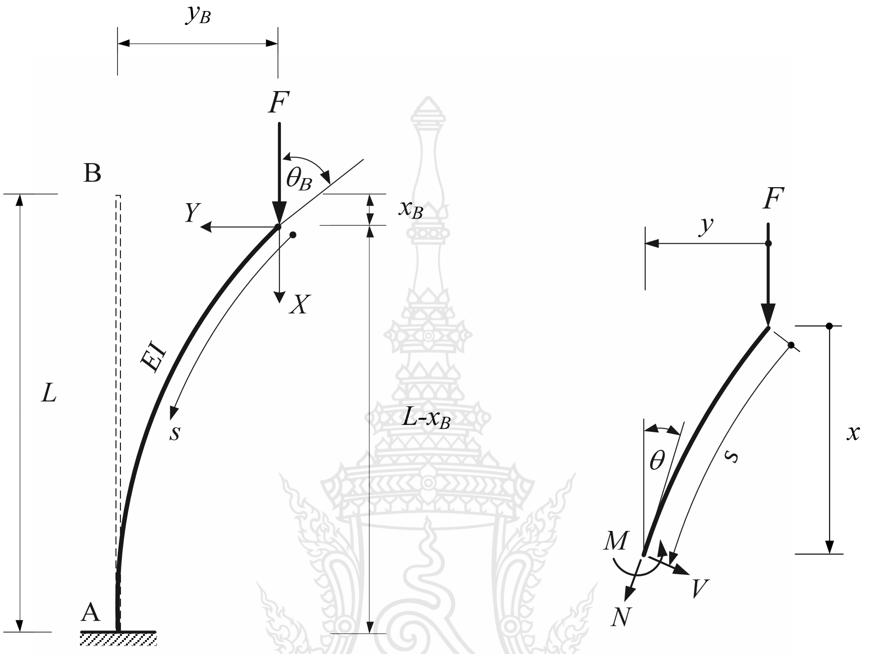
ที่ x=1 (free end)

$$M(x=1)=y''(x=1)=0 \tag{2.9}$$

$$Q(x=1)=y'''(x=1)+\mu.y'(x=1)=0 \tag{2.10}$$

2.3.2 กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ (Postbuckling behavior)

การพิจารณาปัญหาหลังการโก่งเดาะเพื่อหาสมการมุมลาดเอียง ระยะการโก่งตัวของโครงสร้างที่ตำแหน่งใดๆ อาศัยสมการที่ (2.2) และทำการย้ายจุดเริ่มต้นมาอยู่ที่ปลายเสา B เพื่อความสะดวกในการนำค่ามุมลาดเอียงที่ปลายเสา B มาร่วมพิจารณา ดังนี้



รูปที่ 2.4 ชิ้นส่วนการพิจารณาหาโมเมนต์ดัด M ที่ระยะ x ใดๆ

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับมุมลาดเอียงใดๆ ของเสาใช้สมการที่ (2.2) ดังนี้

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{-M}{EI} \tag{2.11}$$

$$EI\frac{d\theta}{ds} + M = 0 \tag{2.12}$$

จากรูปที่ 2.3 (ข) จะได้ $M = F.y$ นำค่าโมเมนต์ M แทนในสมการที่ (2.12) สมการใหม่ที่ได้มีตัวแปร y ที่สัมพันธ์กับมุมลาดเอียงที่ระยะใดๆ จากนั้นทำการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการเทียบกับ s จะได้

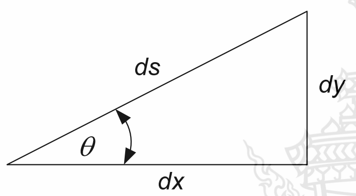
$$EI\frac{d^2\theta}{ds^2} + F\frac{dy}{ds} = 0 \tag{2.13}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับมุมลาดเอียงที่ระยะ s ใดๆ ตลอดความยาวเสา คือ

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \mu \frac{dy}{ds} = 0 \tag{2.14}$$

โดย $\mu = \frac{F}{EI}$

ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยเสา จะได้



$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{2.15 a}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{2.15 b}$$

รูปที่ 2.5 แสดงความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยเสา

ระบบสมการที่ใช้วิเคราะห์ปัญหามุมลาดเอียง ระยะโก่งตัวตามแนวแกน X และแนวแกน Y คือ สมการที่ (2.14) - (2.15) ตามลำดับ ในการแก้สมการมีเงื่อนไขขอบเขตของเสายื่นจำนวน 4 เงื่อนไข ดังนี้

ที่ s=0 (free end)

$$\theta'(s=0) = 0 \tag{2.16}$$

ที่ s=1 (fixed end)

$$\theta(s=1) = 0 \tag{2.17}$$

$$x(s=1) = 1 - x_B \tag{2.18}$$

$$y(s=1) = y_B \tag{2.19}$$

2.4 การศึกษาตัวแปรไร้มิติ

เพื่อลดความยุ่งยากและข้อผิดพลาดในการคำนวณเชิงตัวเลข จะใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรของสมการให้เป็นชนิดตัวแปรไร้มิติหรือไร้หน่วย ดังนั้นสมการที่ (2.6) – (2.10) และสมการที่ (2.14) – (2.19) สามารถเปลี่ยนเป็นตัวแปรไร้มิติได้ดังนี้

2.4.1 กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \qquad \bar{y} = \frac{y}{L}; \qquad \bar{s} = \frac{s}{L} \tag{2.20 a-c}$$

$$\bar{\mu} = \frac{FL^2}{EI} \tag{2.21}$$

$$\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4} + \bar{\mu}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = 0 \tag{2.22}$$

$$\bar{y}(\bar{x} = 0) = 0 \tag{2.23}$$

$$\bar{y}'(\bar{x} = 0) = 0 \tag{2.24}$$

$$\bar{y}''(\bar{x} = 1) = 0 \tag{2.25}$$

$$\bar{y}'''(\bar{x} = 1) + \bar{\mu}.\bar{y}'(\bar{x} = 1) = 0 \tag{2.26}$$

2.4.2 กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

นำสมการที่ (2.15 b) แทนในสมการที่ (2.14) และนำสมการที่ (2.20) แทนในสมการที่ (2.14) - (2.15) จะได้สมการที่มีตัวแปรเป็นตัวแปรแบบไร้มิติ ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} + \bar{\mu}.\sin(\theta) = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos(\theta) \tag{2.28}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin(\theta) \tag{2.29}$$

$$\theta'(\bar{s} = 0) = 0 \tag{2.30}$$

$$\theta(\bar{s} = 1) = 0 \tag{2.31}$$

$$\bar{x}(\bar{s} = 1) = 1 - \bar{x}_B \tag{2.32}$$

$$\bar{y}(\bar{s} = 1) = \bar{y}_B \tag{2.33}$$

2.5 วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

ปัญหาในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมส่วนใหญ่สามารถอธิบายได้ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ แต่การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยเฉพาะปัญหาที่มีความไร้เชิงเส้น (Non linearity) เพื่อให้ได้คำตอบที่แม่นตรงสามารถกระทำได้ยาก มีหลายวิธีที่อาศัยการประมาณค่าเชิงตัวเลขแทนเพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงและยอมรับได้ เช่น วิธีการยิงเป้า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับงานวิจัยนี้ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ หรือเรียกย่อๆ ว่าวิธี DTM ในวิธีการนี้อาศัยการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตทำให้สามารถหาผลคำตอบเชิงตัวเลขได้ง่าย แนวความคิดของระเบียบวิธีการนี้ถูกนำเสนอครั้งแรกในปี 1982 โดย Pukhov [7] ต่อมาในปี 1986 Zhou [8] ได้ใช้วิธีการนี้แก้ปัญหาของโจทย์เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงเส้นและไร้เชิงเส้นในงานวงจรไฟฟ้า วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีรายละเอียดดังนี้

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... \qquad (2.34\ a)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (2.34\ b)$$

หากกำหนดให้ $a = 0$ จะได้

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\mathrm{a})}{k!}(x)^k \qquad (2.35)$$

สมการที่ (2.34) เมื่อ $f(x)$ คือฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของอนุกรมเทย์เลอร์ หรือเมื่อกำหนดให้ a =0 จะเรียกว่ารูปแบบของอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's series) แสดงในสมการที่ (2.35) ซึ่งเป็นฟังก์ชันพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์หาคำตอบของสมการที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ จะเห็นได้ว่าการหาคำตอบของสมการจำเป็นต้องมีการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการเชิงอนุพันธ์ให้มีอันดับที่สูงขึ้นเพื่อที่จะให้ได้คำตอบที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น อย่างไรก็ดีการหลีกเลี่ยงการทำดิฟเฟอเรนชิเอท สมการเชิงอนุพันธ์พบได้ในวิธีการหาคำตอบแบบเชิงตัวเลข เช่น ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge Kutta) อันดับที่ 4 ถูกนำมาใช้ในงานวิจัยการแอ่นตัวมากของคาน พบได้ในงานวิจัย [9,10]

เทคนิคการหาคำตอบของวิธี DTM นี้เป็นการหาค่าสัมประสิทธ์ในพหุนามของอนุกรม

เทย์เลอร์ใหม่ โดยการย้ายสมการเชิงอนุพันธ์ในโดเมนที่สนใจไปอยู่ในโดเมน k ที่อยู่ในรูปแบบสมการพีชคณิต ซึ่งไม่ต้องทำการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการเชิงอนุพันธ์ การหาค่าสัมประสิทธิ์พิจารณาจากรูปแบบเริ่มต้นของสมการแล้วทำการจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันอนุกรมเทย์เลอร์ จากนั้นใช้วิธีการทำซ้ำจนกว่าผลเฉลยลู่เข้าหาคำตอบหรือมีความแตกต่างของผลเฉลยในแต่ละรอบน้อยมาก ดังนี้

นิยาม 2.1 ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ การแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่ k ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{2.36}$$

นิยาม 2.2 ส่วนกลับของการแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่ k ของฟังก์ชัน $\mathrm{F}(k)$ คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{F}(k)(x-x_0)^k \tag{2.37}$$

เมื่อ $x_0 = 0$ จะสามารถเขียนนิยาม 2.1 และนิยาม 2.2 ใหม่ได้เป็น

นิยาม 2.3 การแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่ k ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \tag{2.38}$$

นิยาม 2.4 ส่วนกลับของการแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ลำดับที่ k ของฟังก์ชัน $\mathrm{F}(k)$ คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{F}(k)(x)^k \tag{2.39}$$

นำสมการที่ (2.38) แทนในสมการที่ (2.39) จะได้

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0} x^k \tag{2.40}$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (2.35) และสมการที่ (2.40) มีลักษณะเหมือนกันเนื่องจาก DTM พัฒนามาจากวิธีการของอนุกรมเทย์เลอร์นั่นเอง และในความเป็นจริงลำดับที่ k จะมีขอบเขตที่จำกัดซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราการลู่เข้าของคำตอบ ดังนั้นลำดับสุดท้ายของ k คือ m ดังนี้

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{F}(k)(x)^k \tag{2.41}$$

ทฤษฎี 2.1 ถ้า $f(x)=g(x)\mp h(x)$ ดังนั้น $\mathrm{F}(k)=\mathrm{G}(k)\mp\mathrm{H}(k)$ (2.42)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\left(\mathrm{g}(x)\pm\mathrm{h}(x)\right)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\pm\frac{d^k h(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\pm\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k h(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$\therefore\ \mathrm{F}(k)=\mathrm{G}(k)\pm\mathrm{H}(k)$

ทฤษฎี 2.2 ถ้า $f(x)=\alpha g(x)$ ดังนั้น $\mathrm{F}(k)=\alpha\mathrm{G}(k)$ เมื่อ α คือ ค่าคงที่ (2.43)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$=\alpha\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$\therefore\ \mathrm{F}(k)=\alpha\mathrm{G}(k)$

ทฤษฎี 2.3 ถ้า $f\left(x\right)=\dfrac{d\left(g\left(x\right)\right)}{dx}$ ดังนั้น $\mathrm{F}\left(k\right)=\left(k+1\right)\mathrm{G}\left(k+1\right)$ (2.44)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{d\left(g\left(x\right)\right)}{dx}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}g\left(x\right)\right]_{x=0}$$

คูณด้านขวาของสมการด้วย $\dfrac{\left(k+1\right)}{\left(k+1\right)}$ จะได้

$$=\frac{\left(k+1\right)}{\left(k+1\right)}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}g\left(x\right)\right]_{x=0}$$

$$=\left(k+1\right)\frac{1}{\left(k+1\right)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}g\left(x\right)\right]_{x=0}$$

$$\therefore \quad \mathrm{F}\left(k\right)=\left(k+1\right)\mathrm{G}\left(k+1\right)$$

ทฤษฎี 2.4 ถ้า $f\left(x\right)=\dfrac{d^l\left(g\left(x\right)\right)}{dx^l}$ ดังนั้น $\mathrm{F}\left(k\right)=\left(k+1\right)\left(k+2\right)...\left(k+l\right)\mathrm{G}\left(k+l\right)$ (2.45)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^l\left(g\left(x\right)\right)}{dx^l}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}g\left(x\right)\right]_{x=0}$$

คูณด้านขวาของสมการด้วย $\frac{(k+1)(k+2)...(k+l)}{(k+1)(k+2)...(k+l)}$ จะได้

$$=\frac{(k+1)(k+2)...(k+l)}{(k+1)(k+2)...(k+l)}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}g(x)\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)(k+2)...(k+l)\frac{1}{(k+l)!}\left[\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}g(x)\right]_{x=0}$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}(k)=(k+1)(k+2)...(k+l)\mathrm{G}(k+l)$$

ทฤษฎี 2.5 ถ้า $f(x)=g(x).h(x)$ ดังนั้น $\mathrm{F}(k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\mathrm{H}(l)$ (2.46)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\big(g(x).h(x)\big)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{d\big(g(x).h(x)\big)}{dx}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\big(g(x).h'(x)+h(x).g'(x)\big)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}g(x).h'(x)+\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}h(x).g'(x)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\frac{d}{dx}g(x).h'(x)\right)+\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\frac{d}{dx}h(x).g'(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\begin{array}{l}\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(g(x).h''(x)+h'(x).g'(x)\right) \\ +\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(h(x).g''(x)+g'(x).h'(x)\right)\end{array}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(g(x).h''(x)+2h'(x).g'(x)+h(x).g''(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-3}}{dx^{k-3}}\left(\frac{d}{dx}\left(g(x).h''(x)+2h'(x).g'(x)+h(x).g''(x)\right)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-3}}{dx^{k-3}}\left(\begin{array}{l}g(x).h'''(x)+3h''(x).g'(x) \\ +3h'(x).g''(x)+h(x).g'''(x)\end{array}\right)\right]_{x=0}$$

$$\vdots$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{k!}\left[\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{k!}{(k-l)!l!}\right)g^{(k-l)}(x).h^{(l)}(x)\right]_{x=0}$$

$$= \left[\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{1}{(k-l)!l!}\right)g^{(k-l)}(x).h^{(l)}(x)\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{(k-l)!}g^{(k-l)}(x).\frac{1}{l!}h^{(l)}(x)\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{(k-l)!}\left[\frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}}g(x)\right]_{x=0}.\frac{1}{l!}\left[\frac{d^{l}}{dx^{l}}h(x)\right]_{x=0}\right]$$

$$\therefore \quad \mathrm{F}(k) = \sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\mathrm{H}(l)$$

ทฤษฎี 2.6 ถ้า $f(x)=g(x).h(x).\mathrm{i}(x)$

ดังนั้น $\mathrm{F}(k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\left(\sum_{m=0}^{l}\mathrm{H}(l-m)\mathrm{I}(m)\right)$ (2.47)

พิสูจน์ จาก $\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

$$\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(g(x).h(x).i(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{d\left(g(x).h(x).i(x)\right)}{dx}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(g(x)\frac{d}{dx}h(x).i(x)+h(x).i(x)\frac{d}{dx}g(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(g(x).\left(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\right)+h(x).i(x).g'(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\begin{array}{l}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}g(x)\left(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\right)\\+\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}h(x).i(x).g'(x)\end{array}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\begin{array}{l}\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\frac{d}{dx}g(x)\left(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\right)\right)\\+\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\frac{d}{dx}h(x).i(x).g'(x)\right)\end{array}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\begin{array}{l}\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(g(x)\frac{d}{dx}\left(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\right)+\begin{pmatrix}h(x).i'(x)\\+i(x).h'(x)\end{pmatrix}\frac{d}{dx}g(x)\right)\\+\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(h(x).i(x)\frac{d}{dx}g'(x)+g'(x)\frac{d}{dx}h(x).i(x)\right)\end{array}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\begin{array}{l}\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(g(x)\begin{pmatrix}h(x).i''(x)+i'(x).h'(x)\\+i(x).h''(x)+h'(x).i'(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h(x).i'(x)\\+i(x).h'(x)\end{pmatrix}g'(x)\right)\\+\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\Big(h(x).i(x).g''(x)+g'(x)\big(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\big)\Big)\end{array}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\begin{array}{l}g(x)\begin{pmatrix}h(x).i''(x)+2i'(x).h'(x)\\+i(x).h''(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h(x).i'(x)\\+i(x).h'(x)\end{pmatrix}g'(x)\\+\Big(h(x).i(x).g''(x)+g'(x)\big(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\big)\Big)\end{array}\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}\left(\begin{array}{l}g(x)\begin{pmatrix}h(x).i''(x)+2i'(x).h'(x)\\+i(x).h''(x)\end{pmatrix}+2g'(x)\begin{pmatrix}h(x).i'(x)\\+i(x).h'(x)\end{pmatrix}\\+g''(x)\big(h(x).i(x)\big)\end{array}\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-3}}{dx^{k-3}}\left(\frac{d}{dx}\left(\begin{array}{l}g(x)\big(h(x).i''(x)+2i'(x).h'(x)+i(x).h''(x)\big)\\+2g'(x)\big(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\big)\\+g''(x)\big(h(x).i(x)\big)\end{array}\right)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k-3}}{dx^{k-3}}\left(\begin{array}{l}g(x)\begin{pmatrix}h(x).i'''(x)+3i''(x).h'(x)\\+3i'(x).h''(x)+i(x).h'''(x)\end{pmatrix}\\+3g'(x)\begin{pmatrix}h(x).i''(x)+2i'(x).h'(x)\\+i(x).h''(x)\end{pmatrix}\\+3g''(x)\big(h(x).i'(x)+i(x).h'(x)\big)\\+g'''(x)\big(h(x).i(x)\big)\end{array}\right)\right]_{x=0}$$

$$\vdots$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\mathrm{F}(k)=\frac{1}{k!}\left[\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{k!}{(k-l)!l!}\right)g^{(k-l)}(x).\left(\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{l!}{(l-m)!m!}\right)h^{(l-m)}(x).i^{(m)}(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\left[\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{1}{(k-l)!}\right)g^{(k-l)}(x).\left(\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{1}{(l-m)!m!}\right)h^{(l-m)}(x).i^{(m)}(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$=\left[\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{1}{(k-l)!}\right)\left[\frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}}g(x)\right]_{x=0}.\left(\begin{array}{l}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{1}{(l-m)!}\right)\left[\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}h(x)\right]_{x=0}\\ .\frac{1}{m!}\left[\frac{d^{m}}{dx^{m}}i(x)\right]_{x=0}\end{array}\right)\right]$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}(k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\left(\sum_{m=0}^{l}\mathrm{H}(l-m)\,\mathrm{I}(m)\right)$$

สำหรับสมการอื่นๆ สามารถสร้างฟังก์ชันแปลงอนุพันธ์ดังแสดงตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 สมการแปลงเชิงอนุพันธ์ [11, 12]

ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
$f(x)=g(x)\mp h(x)$	$\mathrm{F}(k)=\mathrm{G}(k)\mp\mathrm{H}(k)$
$f(x)=\alpha g(x)$	$\mathrm{F}(k)=\alpha\mathrm{G}(k)\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$
$f(x)=g(x)h(x)$	$\mathrm{F}(k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\mathrm{H}(l)$
$f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=(k+1)\mathrm{G}(k+1)$
$f(x)=\frac{d^2}{dx^2}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=(k+1)(k+2)\mathrm{G}(k+2)$
$f(x)=\frac{d^n}{dx^n}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=\frac{(k+n)!}{k!}\mathrm{G}(k+n)$
$f(x)=x^n$	$\mathrm{F}(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}0, & if\ k\neq n\\ 1, & if\ k=n\end{cases}$
$f(x)=f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)$	$\mathrm{F}(k)=\sum_{k_{1=0}}^{k}\mathrm{F}_1(k-k_1)\sum_{k_{2=0}}^{k_1}\mathrm{F}_2(k_1-k_2)\mathrm{F}_3(k_2)$

2.6 ค่าความคลาดเคลื่อน

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการเชิงตัวเลข เป็นการหาคำตอบด้วยวิธีการประมาณค่าซึ่งแน่นอนว่าคำตอบที่ได้จะไม่ใช่คำตอบที่แท้จริง ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณ วิธีวัดค่าความคลาดเคลื่อนที่นิยมใช้มีดังนี้ [13]

(1) ค่าความคลาดเคลื่อนแท้จริง (Absolute error, ε_t)

$$\varepsilon_t = v_e - v_a \tag{2.48}$$

(2) ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative error, ε_r)

$$\varepsilon_r = \frac{v_e - v_a}{v_e}; \qquad v_e \neq 0 \tag{2.49}$$

(3) ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ร้อยละ (Percent relative error)

$$\varepsilon_r = \frac{v_e - v_a}{v_e} \times 100\% \tag{2.50}$$

โดยที่ v_e คือ ค่าแม่นตรง

v_a คือ ค่าโดยประมาณ

<u>ตัวอย่าง</u> การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อน

สะพานแห่งหนึ่งวัดความยาว 9,999 เซนติเมตร และวัดน็อตที่ใช้ร้อยเหล็กได้ยาว 9 เซนติเมตร ถ้าสะพานแห่งนี้มีความยาวจริง 10,000 เซนติเมตร และน๊อตมีขนาดความยาวจริง 10 เซนติเมตร ก) จงหาค่าความคลาดเคลื่อนแท้จริง ข) จงหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ร้อยละ

ก) ค่าความคลาดเคลื่อนแท้จริง

สะพาน

$$\varepsilon_t = 10,000 - 9,999 \quad = \quad 1 \quad cm$$

น๊อต

$$\varepsilon_t = 10 - 9 \quad = \quad 1 \quad cm$$

ข) ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ร้อยละ

สะพาน

$$\varepsilon_r = \frac{1}{10,000} \times 100 \quad = \quad 0.01 \quad \%$$

น๊อต

$$\varepsilon_r = \frac{1}{10} \times 100 \quad = \quad 10 \quad \%$$

ถึงแม้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัดสิ่งของทั้งสองจะมีค่าเพียง 1 เซนติเมตร เท่ากัน แต่เมื่อคำนวณด้วยวิธีค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ร้อยละพบว่าขนาดความยาวของน๊อตมีค่าคลาดเคลื่อนถึง 10 % และมากกว่าค่าคลาดเคลื่อนของความยาวสะพาน 1,000 เท่า ดังนั้นวิธีการวัดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ร้อยละจึงเป็นวิธีที่บ่งบอกความถูกต้องได้ดีกว่าวิธีวัดค่าคลาดเคลื่อนแท้จริง

ในการคำนวณเชิงตัวเลขบางครั้งอาจจะไม่ทราบค่าที่แท้จริงของคำตอบ จึงทำให้ไม่สามารถใช้วิธีวัดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ได้โดยตรง อย่างไรก็ตามวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขจะรู้คำตอบเฉพาะที่ประมาณค่าของฟังก์ชันใดๆ ได้ในรอบนั้นๆ จึงมีการประยุกต์ใช้วิธีวัดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปรียบเทียบระหว่างค่าที่คำนวณได้ในรอบใหม่กับค่าที่คำนวณได้ในรอบก่อน และวิธีการนี้จะใช้ในการคำนวณเปรียบเทียบค่าต่างๆ ในงานวิจัยนี้ต่อไป แสดงรายละเอียดดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{previous\ approximation - current\ approximation}{previous\ approximation} \tag{2.51}$$

โดยที่ ε_a คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมามีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาและนำวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ หรือที่เรียกว่าวิธี DTM มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ในงานด้านต่างๆ ตลอดจนมีการพัฒนาปรับปรุงด้านเทคนิคการคำนวณให้ประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น อาทิ เช่น

2.7.1 เปรียบเทียบผลการคำนวณ

Ertürk [14] แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 6 ที่เป็นปัญหาขอบเขต จำนวน 2 ตัวอย่าง พบว่าการใช้วิธี DTM ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือและมีประสิทธิภาพเพียงพอ หลังจากนั้น Hassan [9] ได้นำมาใช้แก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีลักษณะเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ผลการศึกษาพบว่าวิธี DTM ให้คำตอบใกล้เคียงกับคำตอบแม่นตรงและใกล้เคียงกับวิธี รุงเง-คุตตา ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของ Mirzaee [15] นอกจากนี้ Thongmoon and Pusjuso [16] ใช้วิธี DTM หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีการแปลงลาปลาซ พบว่าวิธี DTM มีประสิทธิภาพและเป็นเครื่องมือที่น่าเชื่อถือ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ ในช่วงเดียวกัน Biazar et al. [17] ได้ประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง ผลการศึกษา นำมาเปรียบเทียบกับวิธี Homotopy และ Adomain decomposition ผลการศึกษา ชี้ให้เห็นว่าวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ DTM มีประสิทธิภาพดีกว่าอีก 2 วิธี ต่อมา Patil and Khambayat [18] นำวิธี DTM มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น ผลการศึกษา แสดงให้เห็นว่า รูปแบบของสมการคำตอบที่ได้ สามารถจัดอยู่ในรูปของอนุกรมกำลังได้ง่าย และสรุปว่าวิธี DTM เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพดี

2.7.2 การประยุกต์ใช้แก้ปัญหาด้านวิศวกรรม

Chen and Liu [19], Yaghoobi and Torabi [20] ใช้ศึกษาปัญหาด้านการนำความร้อนแบบไร้เชิงเส้นที่เป็นปัญหาแบบเงื่อนไขเบื้องต้น ได้ผลเฉลยคำตอบอยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับงานวิจัยของ Joneidi et al. [21] ที่นำมาใช้หาผลเฉลยของปัญหาด้านประสิทธิภาพของครีบระบายความร้อน เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงพบว่าให้ผลคำตอบที่ใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่นำเอาวิธี DTM มาใช้ศึกษาโครงสร้างภายใต้แรงกระทำในรูปแบบต่างๆ เช่น แรงตามแนวแกนที่กระจายแปรผันตามความยาวคาน ต่อมาในงานวิจัยของ Shin and Yun [12], Balkaya [11] ทำการพัฒนาสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการแอ่นตัวของโครงสร้างจากหลักการของทฤษฎีการดัดออยเลอร์-เบอร์นูลี การศึกษาพบว่าจำนวนพจน์ของสมการคำตอบมีผลต่อความถูกต้องของคำตอบ การใช้จำนวนพจน์ที่มากทำให้คำตอบมีความเที่ยงตรงสูงด้วยเช่นกัน และคำตอบจากวิธี DTM สอดคล้องกับวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ และเมื่อเร็วๆ นี้ มีการศึกษาปัญหาของเสาเข็มที่บรรทุก

น้ำหนักในแนวดิ่งและฝังจมเสาเข็มลงในดิน อิลาสติกบางส่วน ในงานวิจัยของ Catal [22] ซึ่งให้ผลคำตอบโดยประมาณอยู่ในรูปแบบของอนุกรมเทย์เลอร์ มีความถูกต้องและน่าเชื่อถือสูงเมื่อเทียบกับคำตอบจากสมการแม่นตรง

การศึกษาในด้านเสถียรภาพการโก่งเดาะของโครงสร้าง พบในงานวิจัยของ Chai and Wang [1] ได้นำวิธีการ DTM มาวิเคราะห์หาคำตอบด้านการโก่งเดาะของเสาขนาดใหญ่ พบว่าจำนวนพจน์ของสมการพีชคณิตที่ได้จากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์มีผลต่อความถูกต้องของคำตอบ และให้ค่าโดยประมาณการโก่งเดาะของเสาใกล้เคียงกับค่าจากสมการแม่นตรง นอกจากนี้ยังได้ศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาปลายอิสระรับน้ำหนักตามแนวดิ่ง ซึ่งให้คำตอบเที่ยงตรงสูงและลู่เข้าหาคำตอบแม่นตรงเมื่อใช้จำนวนพจน์ของสมการที่มากขึ้น และในงานวิจัยของ Salehi et al. [5] ศึกษาปัญหาการแอ่นตัวมากของคานยื่นที่มีน้ำหนักกระทำที่ปลายคาน ผลการศึกษาพบว่าคำตอบที่ได้จากวิธี DTM มีความแม่นยำ ถูกต้องกว่าวิธี VIM (Variational Iteration Method) และวิธี ADM (Adomian Decomposition Method) สำหรับงานวิจัยของ Lingfeng and Shiyuan [2] ได้ศึกษาปัญหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาที่มีจุดรองรับแบบยึดหมุนทั้งสองด้าน ผลการศึกษาพบว่าเมื่อใช้จำนวนพจน์ของสมการคำตอบที่อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์มากกว่า 13 พจน์ขึ้นไป จะได้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่เที่ยงตรงและสอดคล้องกับสมการแม่นตรง เมื่อเร็วๆ นี้ บุญชัย ผึ้งไผ่งามและคณะ [23, 24] ได้นำวิธี DTM มาคำนวณค่าการโก่งเดาะของเสายืดหยุ่นที่สภาพการยึดรั้งที่ปลายสามารถปรับเปลี่ยนได้ และการคำนวณผลเฉลยเชิงประมาณของการแอ่นตัวมากของคานยื่น พบว่าจำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลงที่ใช้ในการคำนวณวิธี DTM มีผลต่อความถูกต้องของคำตอบ กล่าวคือ จำนวนพจน์ยิ่งมากผลของคำตอบยิ่งเที่ยงตรง

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษา

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายในงานวิจัยนี้ มีสมการครอบคลุมปัญหาได้แสดงไว้ในบทที่ 2 ได้แก่สมการที่ (2.6) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของระยะโก่งตัวใดๆ อันดับ 4 เทียบกับตัวแปร x สำหรับวิเคราะห์หาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต และใช้สมการที่ (2.14), (2.15) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 และอันดับ 1 เทียบกับตัวแปร s ตามลำดับ สำหรับหาค่ามุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัวใดๆ ของเสา และเพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงจัดตัวแปรที่ใช้ศึกษาต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ ดังแสดงในสมการที่ (2.22) และสมการที่ (2.27) – (2.29) สำหรับการแปลงสมการครอบคลุมปัญหาข้างต้นด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์มีดังนี้

3.1 การแปลงสมการด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

3.1.1 กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

สมการเชิงอนุพันธ์สมการที่ (2.22) ที่แสดงอยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงระยะโก่งตัว $\bar{y}$ ใดๆ เทียบกับ $\bar{x}$ ซึ่งประกอบด้วยตัวพารามิเตอร์ $\bar{\mu}$ ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์โดยอาศัยตารางที่ 2.1 ได้ดังนี้

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+4)+\bar{\mu}(k+2)(k+1)\,\bar{\mathrm{Y}}(k+2)=0 \qquad (3.1\text{ a})$$

$$\bar{\mathrm{Y}}(k+4)=-\frac{\bar{\mu}\,\bar{\mathrm{Y}}(k+2)}{(k+4)(k+3)} \qquad (3.1\text{ b})$$

โดยที่ $k=0,1,2,3,\ldots$

มีเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.23) – (2.26) ดังนี้

$$\bar{y}(\bar{x}=0)=0 \;\;\rightarrow\;\; \bar{\mathrm{Y}}(0)=0 \qquad (3.2)$$

$$\bar{y}'(\bar{x}=0)=0 \;\;\rightarrow\;\; \bar{\mathrm{Y}}(1)=0 \qquad (3.3)$$

$$\bar{y}''(\bar{x}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\bar{Y}(k)=0 \tag{3.4}$$

$$\bar{y}'''(\bar{x}=1)+\bar{\mu}.\bar{y}'(\bar{x}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\bar{Y}(k)+\bar{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\bar{Y}(k)=0 \tag{3.5}$$

สำหรับจุดรองรับ A เป็นแบบยึดแน่น $\bar{y}''(\bar{x}=0)\neq 0$ จึงกำหนดให้ $\bar{y}''(\bar{x}=0)=C_1$ ดังนั้น

$$\bar{y}''(\bar{x}=0)=C_1 \quad \rightarrow \quad 2!\,\bar{Y}(2)=C_1 \quad \rightarrow \quad \bar{Y}(2)=\frac{C_1}{2} \tag{3.6}$$

โดย C_1 เป็นค่าโมเมนต์ที่จุดรองรับ A

ทำนองเดียวกัน $\bar{y}'''(\bar{x}=0)\neq 0$ ซึ่งเป็นตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่าเช่นกัน จึงกำหนดให้ $\bar{y}'''(\bar{x}=0)=C_2$ จะได้

$$\bar{y}'''(\bar{x}=0)=C_2 \quad \rightarrow \quad 3!\,\bar{Y}(3)=C_2 \quad \rightarrow \quad \bar{Y}(3)=\frac{C_2}{6} \tag{3.7}$$

โดย C_2 เป็นค่าแรงเฉือนที่จุดรองรับ A

สำหรับพจน์อื่นๆ ใช้สมการที่ (3.1 b) คำนวณได้ดังนี้

$$k=0; \qquad \bar{Y}(4)=-\frac{1}{24}\bar{\mu}C_1 \tag{3.8}$$

$$k=1; \qquad \bar{Y}(5)=-\frac{1}{120}\bar{\mu}C_2 \tag{3.9}$$

$$k=2; \qquad \bar{Y}(6)=\frac{1}{720}\bar{\mu}^2C_1 \tag{3.10}$$

$$k=3; \qquad \bar{Y}(7)=\frac{1}{5040}\bar{\mu}^2C_2 \tag{3.11}$$

$$k=4; \qquad \bar{Y}(8)=-\frac{1}{40320}\bar{\mu}^3C_1 \tag{3.12}$$

$$k=5; \qquad \bar{Y}(9)=-\frac{1}{362880}\bar{\mu}^3C_2 \tag{3.13}$$

$$k=6; \qquad \bar{Y}(10)=\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^4C_1 \tag{3.14}$$

$$k=7; \qquad \bar{Y}(11)=\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^4C_2 \tag{3.15}$$

$k=8;\qquad \bar{Y}(12)=-\frac{1}{479001600}\bar{\mu}^5 C_1$ (3.16)

$k=9;\qquad \bar{Y}(13)=-\frac{1}{6227020800}\bar{\mu}^5 C_2$ (3.17)

$k=10;\qquad \bar{Y}(14)=\frac{1}{87178291200}\bar{\mu}^6 C_1$ (3.18)

$k=11;\qquad \bar{Y}(15)=\frac{1}{1307674368000}\bar{\mu}^6 C_2$ (3.19)

$\vdots$

ใช้สมการที่ (3.4) คำนวณหาพจน์ย่อยต่างๆ ได้ดังนี้

$k=0;\qquad y''(\bar{x}=1)=M_B=0 \quad \rightarrow 0$ (3.20)

$k=1;\qquad y'''(\bar{x}=1)=M'_B=V_B=0 \quad \rightarrow 0$ (3.21)

$k=2;\qquad 2\bar{Y}(2)=(2)\frac{1}{2}C_1=C_1$ (3.22)

$k=3;\qquad 6\bar{Y}(3)=(6)\frac{1}{6}C_2=C_2$ (3.23)

$k=4;\qquad 12\bar{Y}(4)=-(12)\frac{1}{24}\bar{\mu}C_1=-\frac{1}{2}\bar{\mu}C_1$ (3.24)

$k=5;\qquad 20\bar{Y}(5)=-(20)\frac{1}{120}\bar{\mu}C_2=-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_2$ (3.25)

$k=6;\qquad 30\bar{Y}(6)=(30)\frac{1}{720}\bar{\mu}^2 C_1=\frac{1}{24}\bar{\mu}^2 C_1$ (3.26)

$k=7;\qquad 42\bar{Y}(7)=(42)\frac{1}{5040}\bar{\mu}^2 C_2=\frac{1}{120}\bar{\mu}^2 C_2$ (3.27)

$k=8;\qquad 56\bar{Y}(8)=-(56)\frac{1}{40320}\bar{\mu}^3 C_1=-\frac{1}{720}\bar{\mu}^3 C_1$ (3.28)

$k=9;\qquad 72\bar{Y}(9)=-(72)\frac{1}{362880}\bar{\mu}^3 C_2=-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3 C_2$ (3.29)

$k=10;\qquad 90\bar{Y}(10)=(90)\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^4 C_1=\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4 C_1$ (3.30)

$k=11;\qquad 110\bar{Y}(11)=(110)\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^4 C_2=\frac{1}{362880}\bar{\mu}^4 C_2$ (3.31)

$\vdots$

รวบรวมพจน์ต่างๆ เข้าด้วยกัน จะได้ดังแสดงในสมการที่ (3.32)

$$C_1+C_2-\frac{1}{2}\bar{\mu}C_1-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_2+\frac{1}{24}\bar{\mu}^2C_1+\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_2-\frac{1}{720}\bar{\mu}^3C_1-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_2$$
$$+\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4C_1+\frac{1}{362880}\bar{\mu}^4C_2+\cdots \quad = \quad 0 \tag{3.32}$$

และจากสมการที่ (3.5) คำนวณหาพจน์ย่อยต่างๆ ได้ดังนี้

$$k=0; \qquad y'''(\bar{x}=1)=V_B=0 \quad \rightarrow 0 \tag{3.33}$$

$$k=1; \qquad y''''(\bar{x}=1)=V_B'=0 \quad \rightarrow 0 \tag{3.34}$$

$$k=2; \qquad (0)\,\bar{\mathrm{Y}}(2)+\bar{\mu}\left(2\bar{\mathrm{Y}}(2)\right)=\bar{\mu}(2)\frac{1}{2}C_1=\bar{\mu}C_1 \tag{3.35}$$

$$k=3; \qquad 6\bar{\mathrm{Y}}(3)+\bar{\mu}\left(3\bar{\mathrm{Y}}(3)\right)=(6)\frac{1}{6}C_2+\bar{\mu}(3)\frac{1}{6}C_2=C_2+\bar{\mu}\frac{1}{2}C_2 \tag{3.36}$$

$$k=4; \qquad 24\bar{\mathrm{Y}}(4)+\bar{\mu}\left(4\bar{\mathrm{Y}}(4)\right)=-(24)\frac{1}{24}\bar{\mu}C_1-\bar{\mu}(4)\frac{1}{24}\bar{\mu}C_1=-\bar{\mu}C_1-\frac{1}{6}\bar{\mu}^2C_1 \tag{3.37}$$

$$k=5; \qquad 60\bar{\mathrm{Y}}(5)+\bar{\mu}\left(5\bar{\mathrm{Y}}(5)\right)=-(60)\frac{1}{120}\bar{\mu}C_2-\bar{\mu}(5)\frac{1}{120}\bar{\mu}C_2 =-\frac{1}{2}\bar{\mu}C_2-\frac{1}{24}\bar{\mu}^2C_2 \tag{3.38}$$

$$k=6; \qquad 120\bar{\mathrm{Y}}(6)+\bar{\mu}\left(6\bar{\mathrm{Y}}(6)\right)=(120)\frac{1}{720}\bar{\mu}^2C_1+\bar{\mu}(6)\frac{1}{720}\bar{\mu}^2C_1 =\frac{1}{6}\bar{\mu}^2C_1+\frac{1}{120}\bar{\mu}^3C_1 \tag{3.39}$$

$$k=7; \qquad 210\bar{\mathrm{Y}}(7)+\bar{\mu}\left(7\bar{\mathrm{Y}}(7)\right)=(210)\frac{1}{5040}\bar{\mu}^2C_2+\bar{\mu}(7)\frac{1}{5040}\bar{\mu}^2C_2 =\frac{1}{24}\bar{\mu}^2C_2+\frac{1}{720}\bar{\mu}^3C_2 \tag{3.40}$$

$$k=8; \qquad 336\bar{\mathrm{Y}}(8)+\bar{\mu}\left(8\bar{\mathrm{Y}}(8)\right)=-(336)\frac{1}{40320}\bar{\mu}^3C_1-\bar{\mu}(8)\frac{1}{40320}\bar{\mu}^3C_1 =-\frac{1}{120}\bar{\mu}^3C_1-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^4C_1 \tag{3.41}$$

$$k=9; \qquad 504\bar{\mathrm{Y}}(9)+\bar{\mu}\left(9\bar{\mathrm{Y}}(9)\right)=-(504)\frac{1}{362880}\bar{\mu}^3C_2-\bar{\mu}(9)\frac{1}{362880}\bar{\mu}^3C_2 =-\frac{1}{720}\bar{\mu}^3C_2-\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4C_2 \tag{3.42}$$

$$k=10; \qquad 720\bar{\mathrm{Y}}(10)+\bar{\mu}\left(10\bar{\mathrm{Y}}(10)\right)=(720)\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^4C_1+\bar{\mu}(10)\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^4C_1 =\frac{1}{5040}\bar{\mu}^4C_1+\frac{1}{362880}\bar{\mu}^5C_1 \tag{3.43}$$

$$k=11; \qquad 990\bar{\mathrm{Y}}(11)+\bar{\mu}\left(11\bar{\mathrm{Y}}(11)\right)=(990)\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^4C_2+\bar{\mu}(11)\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^4C_2 =\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4C_2+\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^5C_2 \tag{3.44}$$

$$\vdots$$

รวบรวมพจน์ต่างๆ เข้าด้วยกัน จะได้ดังแสดงในสมการที่ (3.45)

$$C_2 - \bar{\mu}C_1 - \frac{1}{2}\bar{\mu}C_2 + \frac{1}{6}\bar{\mu}^2 C_1 + \frac{1}{24}\bar{\mu}^2 C_2 - \frac{1}{120}\bar{\mu}^3 C_1 - \frac{1}{720}\bar{\mu}^3 C_2 + \frac{1}{5040}\bar{\mu}^4 C_1$$
$$+\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4 C_2 - \frac{1}{362880}\bar{\mu}^5 C_1 + \bar{\mu}C_1 + \frac{1}{2}\bar{\mu}C_2 - \frac{1}{6}\bar{\mu}^2 C_1 - \frac{1}{24}\bar{\mu}^2 C_2 + \frac{1}{120}\bar{\mu}^3 C_1 \tag{3.45}$$
$$+\frac{1}{720}\bar{\mu}^3 C_2 - \frac{1}{5040}\bar{\mu}^4 C_1 - \frac{1}{40320}\bar{\mu}^4 C_2 + \frac{1}{362880}\bar{\mu}^5 C_1 + \cdots \quad = \quad 0$$

ซึ่งพจน์ต่างๆ ในสมการที่ (3.45) จะหักล้างกันจนเหลือเพียง

$$C_2 \quad = 0 \tag{3.46}$$

จัดระบบสมการที่ (3.32) และ (3.45) ได้ดังต่อไปนี้

$$\alpha_1 C_1 + \gamma_1 C_2 \quad = 0 \tag{3.47 a}$$
$$\alpha_2 C_1 + \gamma_2 C_2 \quad = 0 \tag{3.47 b}$$

หรือแสดงในรูปของสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.48}$$

โดยที่

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}\bar{\mu} + \frac{1}{24}\bar{\mu}^2 - \frac{1}{720}\bar{\mu}^3 + \frac{1}{40320}\bar{\mu}^4 + \ldots \tag{3.49}$$
$$\alpha_2 = 0 \tag{3.50}$$
$$\gamma_1 = 1 - \frac{1}{6}\bar{\mu} + \frac{1}{120}\bar{\mu}^2 - \frac{1}{5040}\bar{\mu}^3 + \frac{1}{362880}\bar{\mu}^4 + \ldots \tag{3.51}$$
$$\gamma_2 = 1 \tag{3.52}$$

3.1.2 กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการที่ (2.27) – (2.29) แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเชิงมุม θ ระยะโก่งตัว $\bar{x}, \bar{y}$ ใดๆ เทียบกับ $\bar{s}$ ซึ่งประกอบด้วยตัวพารามิเตอร์ $\bar{\mu}$ ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยอาศัยตารางที่ 2.1 และเปลี่ยนค่า cos(θ), sin(θ) ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} + \dots \tag{3.53}$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \tag{3.54}$$

ในกรณีงานวิจัยนี้ฟังก์ชัน sin(θ) และ cos(θ) จะใช้เฉพาะ 3 พจน์แรก เพื่อลดภาระในการคำนวณ ดังนั้น สมการที่ (2.27) จะได้

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} + \bar{\mu}(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}) = 0$$

แปลงเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)\Theta(k+2) + \bar{\mu}.\Theta(k) - \frac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right) \\ + \frac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right) = 0\end{aligned} \tag{3.55 a}$$

$$\Theta(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l} -\bar{\mu}.\Theta(k) + \frac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right) \\ -\frac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right) \end{array}\right] \tag{3.55 b}$$

จากสมการที่ (2.28) จะได้

$$\frac{d\overline{x}}{d\overline{s}} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$$

แปลงเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$(k+1)\mathrm{X}(k+1) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \tag{3.56 a}$$

$$\begin{aligned}(k+1)\mathrm{X}(k+1) &= \delta(k) - \frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right) \\ &+ \frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{3.56 b}$$

$$\mathrm{X}(k+1) = \frac{1}{(k+1)}\left[\begin{aligned}&\delta(k) - \frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right) \\ &+ \frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{aligned}\right] \tag{3.56 c}$$

จากสมการที่ (2.29) จะได้

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{s}} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

แปลงเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$(k+1)\mathrm{Y}(k+1) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \tag{3.57 a}$$

$$\begin{aligned}(k+1)\mathrm{Y}(k+1) &= \Theta(k) - \frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{3.57 b}$$

$$\mathrm{Y}(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\Theta(k)-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\+\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\\left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right] \tag{3.57 c}$$

โดยที่

$k \quad = 0,1,2,3,...,\mathrm{n_k}$

$k_1 \quad = 0,1,2,3,...,k$

$k_{2,3,4} = 0,1,2,3,...,k_{1,2,3}$

$\mathrm{n_k}$ = จำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลงในวิธี DTM

$\Theta(k+2)$ = ฟังก์ชันแปลงมุมลาดเอียงในลำดับพจน์ที่ $k+2$

$\mathrm{X}(k+1)$ = ฟังก์ชันแปลงระยะโก่งตัวทางแกน X ในลำดับพจน์ที่ $k+1$

$\mathrm{Y}(k+1)$ = ฟังก์ชันแปลงระยะโก่งตัวทางแกน Y ในลำดับพจน์ที่ $k+1$

มีเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.31) – (2.33) ดังนี้

$$\theta(\bar{s}=1)=0 \quad\rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)=0 \tag{3.58}$$

$$\bar{x}(\bar{s}=1)=1-\bar{x}_B \quad\rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{X}(k)=1-\bar{x}_B \tag{3.59}$$

$$\bar{y}(\bar{s}=1)=\bar{y}_B \quad\rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Y}(k)=\bar{y}_B \tag{3.60}$$

สำหรับตัวแปรเริ่มต้นที่ปลายเสา

$$\theta(\bar{s}=0)=C_3 \quad\rightarrow\quad \Theta(0)=C_3 \tag{3.61}$$

$$\theta'(\bar{s}=0)=0 \quad\rightarrow\quad \Theta(1)=0 \tag{3.62}$$

$$\bar{x}(\bar{s}=0)=0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{X}(0)=0 \tag{3.63}$$

$$\bar{y}(\bar{s}=0)=0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Y}(0)=0 \tag{3.64}$$

โดยที่ $C_3 = \theta_B$ (มุมลาดเอียงที่ปลายเสา B, หน่วยเป็น เรเดียน)

$C_4 = \bar{x}_B$ (ระยะการเคลื่อนที่ที่ปลายเสา B ในแนวแกน X)

$C_5 = -\bar{y}_B$ (ระยะการเคลื่อนที่ที่ปลายเสา B ในแนวแกน Y)

สำหรับพจน์อื่นๆ ใช้สมการที่ (3.55) – (3.57) คำนวณได้ดังนี้

$k = 0;$
$$\Theta(2) = -\frac{1}{240}\bar{\mu}C_3\left(-20C_3^{\,2} + C_3^{\,4} + 120\right) \tag{3.65}$$

$$\mathrm{X}(1) = 1 - \frac{1}{2}C_3^{\,2} + \frac{1}{24}C_3^{\,4} \tag{3.66}$$

$$\mathrm{Y}(1) = C_3 - \frac{1}{6}C_3^{\,3} + \frac{1}{120}C_3^{\,5} \tag{3.67}$$

$k = 1;$
$$\Theta(3) = 0 \tag{3.68}$$

$$\mathrm{X}(2) = 0 \tag{3.69}$$

$$\mathrm{Y}(2) = 0 \tag{3.70}$$

$k = 2;$
$$\Theta(4) = \frac{1}{69120}\bar{\mu}^{2}C_3\left(-1920C_3^{\,2} + 384C_3^{\,4} - 32C_3^{\,6} + C_3^{\,8} + 2880\right) \tag{3.71}$$

$$\mathrm{X}(3) = \frac{1}{6}\bar{\mu}C_3^{\,2} - \frac{1}{18}\bar{\mu}C_3^{\,4} + \frac{13}{2160}\bar{\mu}C_3^{\,6} - \frac{1}{4320}\bar{\mu}C_3^{\,8} \tag{3.72}$$

$$\mathrm{Y}(3) = -\frac{1}{6}\bar{\mu}C_3 + \frac{1}{9}\bar{\mu}C_3^{\,3} - \frac{1}{45}\bar{\mu}C_3^{\,5} + \frac{1}{540}\bar{\mu}C_3^{\,7} - \frac{1}{17280}\bar{\mu}C_3^{\,9} \tag{3.73}$$

$k = 3;$
$$\Theta(5) = 0 \tag{3.74}$$

$$\mathrm{X}(4) = 0 \tag{3.75}$$

$$\mathrm{Y}(4) = 0 \tag{3.76}$$

$k = 4;$
$$\Theta(6) = -\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^{3}C_3\begin{pmatrix}-1440000C_3^{\,2} + 694080C_3^{\,4} - 140160C_3^{\,6}\\ +14520C_3^{\,8} - 772C_3^{\,10} + 17C_3^{\,12} + 345600\end{pmatrix} \tag{3.77}$$

$$X(5) = -\frac{1}{30}\bar{\mu}^2 C_3^{\,2} + \frac{1}{36}\bar{\mu}^2 C_3^{\,4} - \frac{79}{10800}\bar{\mu}^2 C_3^{\,6} + \frac{13}{14400}\bar{\mu}^2 C_3^{\,8} - \frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2 C_3^{\,10} + \frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2 C_3^{\,12} \tag{3.78}$$

$$\mathrm{Y}(5) = \frac{1}{120}\bar{\mu}^2 C_3 - \frac{5}{144}\bar{\mu}^2 C_3^{\,3} + \frac{241}{14400}\bar{\mu}^2 C_3^{\,5} - \frac{73}{21600}\bar{\mu}^2 C_3^{\,7} + \frac{121}{345600}\bar{\mu}^2 C_3^{\,9} - \frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2 C_3^{\,11} + \frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2 C_3^{\,13} \tag{3.79}$$

$k = 5;$ $$\Theta(7) = 0 \tag{3.80}$$

$$\mathrm{X}(6) = 0 \tag{3.81}$$

$$\mathrm{Y}(6) = 0 \tag{3.82}$$

$k = 6;$ $$\Theta(8) = \frac{1}{334430208000}\bar{\mu}^4 C_3 \begin{pmatrix} -287539200 C_3^{\,2} + 283115520 C_3^{\,4} \\ -106444800 C_3^{\,6} + 21156480 C_3^{\,8} \\ -2469888 C_3^{\,10} + 172032 C_3^{\,12} \\ -6688 C_3^{\,14} + 113 C_3^{\,16} \\ +8294400 \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

$$\mathrm{X}(7) = \frac{1}{315}\bar{\mu}^3 C_3^{\,2} - \frac{59}{7560}\bar{\mu}^3 C_3^{\,4} + \frac{911}{226800}\bar{\mu}^3 C_3^{\,6} - \frac{109}{113400}\bar{\mu}^3 C_3^{\,8} + \frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3 C_3^{\,10} - \frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,12} + \frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,14} - \frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3 C_3^{\,16} \tag{3.84}$$

$$\mathrm{Y}(7) = -\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3 C_3 + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^3 C_3^{\,3} - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^3 C_3^{\,5} + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^3 C_3^{\,7} - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3 C_3^{\,9} + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,11} - \frac{1}{243000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,13} + \frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,15} - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3 C_3^{\,17} \tag{3.85}$$

$k = 7;$ $$\Theta(9) = 0 \tag{3.86}$$

$$\mathrm{X}(8) = 0 \tag{3.87}$$

$$\Upsilon(8)=0 \tag{3.88}$$

$$k=8; \qquad \Theta(10)=-\frac{1}{3611846246400000}\bar{\mu}^{5}C_3\begin{pmatrix}-306726912000C_3^{\,2}\\+646971494400C_3^{\,4}\\-417186201600C_3^{\,6}\\+136720051200C_3^{\,8}\\-26896734720C_3^{\,10}\\+3398129280C_3^{\,12}\\-280500480C_3^{\,14}\\+14749944C_3^{\,16}\\-451988C_3^{\,18}+6193C_3^{\,20}\\+995328000\end{pmatrix} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(9)=&-\frac{1}{5670}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,2}+\frac{103}{68040}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,4}-\frac{2839}{2041200}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,6}\\&+\frac{4559}{8164800}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,8}-\frac{20659}{163296000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,10}+\frac{34897}{1959552000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,12}\\&-\frac{629}{391910400}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,14}+\frac{21379}{235146240000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,16}\\&-\frac{1049}{352719360000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,18}+\frac{61}{1410877440000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,20}\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon(9)=&\frac{1}{362880}\bar{\mu}^{4}C_3-\frac{1849}{2177280}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,3}+\frac{11143}{6220800}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,5}\\&-\frac{5389}{4665600}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,7}+\frac{197801}{522547200}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,9}-\frac{389131}{5225472000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,11}\\&+\frac{28093}{2985984000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,13}-\frac{24349}{31352832000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,15}\\&+\frac{614581}{15049359360000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,17}-\frac{112997}{90296156160000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,19}\\&+\frac{6193}{361184624640000}\bar{\mu}^{4}C_3^{\,21}\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$k=9; \qquad \Theta(11)=0 \tag{3.92}$$

$$\mathrm{X}(10)=0 \tag{3.93}$$

$$\Upsilon(10)=0 \tag{3.94}$$

$$
k=10; \qquad \Theta(12)=\frac{1}{57211644542976000000}\bar{\mu}^{6}C_3\begin{pmatrix}
-330687774720000C_3^{2}\\
+1651145637888000C_3^{4}\\
-1759280726016000C_3^{6}\\
+887562634752000C_3^{8}\\
-265252777574400C_3^{10}\\
+51804378316800C_3^{12}\\
-6924488601600C_3^{14}\\
+643495538880C_3^{16}\\
-41173065600C_3^{18}\\
+1740604800C_3^{20}\\
-44020480C_3^{22}\\
+507221C_3^{24}+119439360000
\end{pmatrix} \tag{3.95}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(11)=&\frac{1}{155925}\bar{\mu}^{5}C_3^{2}-\frac{157}{748440}\bar{\mu}^{5}C_3^{4}+\frac{9629}{28066500}\bar{\mu}^{5}C_3^{6}\\
&-\frac{2621}{11975040}\bar{\mu}^{5}C_3^{8}+\frac{412663}{5388768000}\bar{\mu}^{5}C_3^{10}\\
&-\frac{129467}{7698240000}\bar{\mu}^{5}C_3^{12}\ \frac{106361}{43110144000}\bar{\mu}^{5}C_3^{14}\\
&-\frac{71177}{287400960000}\bar{\mu}^{5}C_3^{16}+\frac{218927}{12933043200000}\bar{\mu}^{5}C_3^{18}\\
&-\frac{6539}{8622028800000}\bar{\mu}^{5}C_3^{20}+\frac{9409}{465589555200000}\bar{\mu}^{5}C_3^{22}\\
&-\frac{13}{53210234880000}\bar{\mu}^{5}C_3^{24}
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(11)=&-\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^{5}C_3+\frac{4153}{59875200}\bar{\mu}^{5}C_3^{3}-\frac{103681}{299376000}\bar{\mu}^{5}C_3^{5}\\
&+\frac{60257}{163296000}\bar{\mu}^{5}C_3^{7}-\frac{21401491}{114960384000}\bar{\mu}^{5}C_3^{9}\\
&+\frac{311491}{5598720000}\bar{\mu}^{5}C_3^{11}-\frac{4684279}{431101440000}\bar{\mu}^{5}C_3^{13}\\
&+\frac{834839}{574801920000}\bar{\mu}^{5}C_3^{15}-\frac{223435951}{1655429529600000}\bar{\mu}^{5}C_3^{17}\\
&+\frac{4288861}{496628858880000}\bar{\mu}^{5}C_3^{19}-\frac{16483}{45148078080000}\bar{\mu}^{5}C_3^{21}\\
&+\frac{4913}{532102348800000}\bar{\mu}^{5}C_3^{23}-\frac{46111}{433421549568000000}\bar{\mu}^{5}C_3^{25}
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

$\vdots$

รวบรวมพจน์ต่างๆ ของ $\Theta(...)$ เข้าด้วยกัน ตามสมการที่ (3.58) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่า C_3 และ $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายเสา A โดยมีปลายเสา B เป็นจุดเริ่มต้น มีสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\theta(\bar{s}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)=0 \qquad \text{จะได้}$$

$$
\begin{aligned}
&C_3+\left(-\frac{1}{240}\bar{\mu}C_3\left(-20C_3^{\ 2}+C_3^{\ 4}+120\right)\right)\\
&+\left(\frac{1}{69120}\bar{\mu}^2C_3\left(-1920C_3^{\ 2}+384C_3^{\ 4}-32C_3^{\ 6}+C_3^{\ 8}+2880\right)\right)\\
&+\left(-\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^3C_3\begin{pmatrix}-1440000C_3^{\ 2}+694080C_3^{\ 4}-140160C_3^{\ 6}+14520C_3^{\ 8}\\ -772C_3^{\ 10}+17C_3^{\ 12}+345600\end{pmatrix}\right)\\
&+\left(\frac{1}{334430208000}\bar{\mu}^4C_3\begin{pmatrix}-287539200C_3^{\ 2}+283115520C_3^{\ 4}-106444800C_3^{\ 6}\\ +21156480C_3^{\ 8}-2469888C_3^{\ 10}+172032C_3^{\ 12}\\ -6688C_3^{\ 14}+113C_3^{\ 16}+8294400\end{pmatrix}\right)\\
&+\left(-\frac{1}{3611846246400000}\bar{\mu}^5C_3\begin{pmatrix}-306726912000C_3^{\ 2}+646971494400C_3^{\ 4}\\ -417186201600C_3^{\ 6}+136720051200C_3^{\ 8}\\ -26896734720C_3^{\ 10}+3398129280C_3^{\ 12}\\ -280500480C_3^{\ 14}+14749944C_3^{\ 16}\\ -451988C_3^{\ 18}+6193C_3^{\ 20}+995328000\end{pmatrix}\right) \qquad (3.98)\\
&+\left(\frac{1}{5721164454297600000}\bar{\mu}^6C_3\begin{pmatrix}-330687774720000C_3^{\ 2}\\ +1651145637888000C_3^{\ 4}\\ -1759280726016000C_3^{\ 6}\\ +887562634752000C_3^{\ 8}\\ -265252777574400C_3^{\ 10}\\ +51804378316800C_3^{\ 12}\\ -6924488601600C_3^{\ 14}\\ +643495538880C_3^{\ 16}\\ -41173065600C_3^{\ 18}\\ +1740604800C_3^{\ 20}\\ -44020480C_3^{\ 22}+507221C_3^{\ 24}\\ +119439360000\end{pmatrix}\right)\\
&+\ldots \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

และรวบรวมพจน์ของ $\mathrm{X}(\ldots)$ ตามสมการที่ (3.59) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่า C_3, C_4 และ $\bar{\mu}$ มีสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\bar{x}(\bar{s}=1)=1-\bar{x}_B \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{X}(k)=1-\bar{x}_B \qquad \text{จะได้}$$

$$\begin{aligned}
&C_4+\left(1-\frac{1}{2}C_3^{\,2}+\frac{1}{24}C_3^{\,4}\right)\\
&+\left(\frac{1}{6}\bar{\mu}C_3^{\,2}-\frac{1}{18}\bar{\mu}C_3^{\,4}+\frac{13}{2160}\bar{\mu}C_3^{\,6}-\frac{1}{4320}\bar{\mu}C_3^{\,8}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{30}\bar{\mu}^2C_3^{\,2}+\frac{1}{36}\bar{\mu}^2C_3^{\,4}-\frac{79}{10800}\bar{\mu}^2C_3^{\,6}+\frac{13}{14400}\bar{\mu}^2C_3^{\,8}-\frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2C_3^{\,10}\\&+\frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2C_3^{\,12}\end{aligned}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{315}\bar{\mu}^3C_3^{\,2}-\frac{59}{7560}\bar{\mu}^3C_3^{\,4}+\frac{911}{226800}\bar{\mu}^3C_3^{\,6}-\frac{109}{113400}\bar{\mu}^3C_3^{\,8}\\&+\frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3C_3^{\,10}-\frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3C_3^{\,12}+\frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3C_3^{\,14}\\&-\frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3C_3^{\,16}\end{aligned}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{5670}\bar{\mu}^4C_3^{\,2}+\frac{103}{68040}\bar{\mu}^4C_3^{\,4}-\frac{2839}{2041200}\bar{\mu}^4C_3^{\,6}+\frac{4559}{8164800}\bar{\mu}^4C_3^{\,8}\\&-\frac{20659}{163296000}\bar{\mu}^4C_3^{\,10}+\frac{34897}{1959552000}\bar{\mu}^4C_3^{\,12}-\frac{629}{391910400}\bar{\mu}^4C_3^{\,14}\\&+\frac{21379}{235146240000}\bar{\mu}^4C_3^{\,16}-\frac{1049}{352719360000}\bar{\mu}^4C_3^{\,18}\\&+\frac{61}{1410877440000}\bar{\mu}^4C_3^{\,20}\end{aligned}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{155925}\bar{\mu}^5C_3^{\,2}-\frac{157}{748440}\bar{\mu}^5C_3^{\,4}+\frac{9629}{28066500}\bar{\mu}^5C_3^{\,6}-\frac{2621}{11975040}\bar{\mu}^5C_3^{\,8}\\&+\frac{412663}{5388768000}\bar{\mu}^5C_3^{\,10}-\frac{129467}{7698240000}\bar{\mu}^5C_3^{\,12}+\frac{106361}{43110144000}\bar{\mu}^5C_3^{\,14}\\&-\frac{71177}{287400960000}\bar{\mu}^5C_3^{\,16}+\frac{218927}{12933043200000}\bar{\mu}^5C_3^{\,18}-\frac{6539}{8622028800000}\bar{\mu}^5C_3^{\,20}\\&+\frac{9409}{465589555200000}\bar{\mu}^5C_3^{\,22}-\frac{13}{53210234880000}\bar{\mu}^5C_3^{\,24}\end{aligned}\right)\\
&+\ldots \;=\; 1
\end{aligned} \tag{3.99}$$

ในทำนองเดียวกันพจน์ของ $\mathrm{Y}(\ldots)$ ตามสมการที่ (3.60) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่า C_3, C_5 และ $\bar{\mu}$ มีสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\bar{y}(\bar{s}=1)=\bar{y}_B \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Y}(k)=\bar{y}_B \qquad \text{จะได้}$$

$$
\begin{aligned}
& C_5+\left(C_3-\frac{1}{6}C_3^{\,3}+\frac{1}{120}C_3^{\,5}\right) \\
& +\left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_3+\frac{1}{9}\bar{\mu}C_3^{\,3}-\frac{1}{45}\bar{\mu}C_3^{\,5}+\frac{1}{540}\bar{\mu}C_3^{\,7}-\frac{1}{17280}\bar{\mu}C_3^{\,9}\right) \\
& +\left(\begin{aligned}&\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_3-\frac{5}{144}\bar{\mu}^2C_3^{\,3}+\frac{241}{14400}\bar{\mu}^2C_3^{\,5}-\frac{73}{21600}\bar{\mu}^2C_3^{\,7}+\frac{121}{345600}\bar{\mu}^2C_3^{\,9}\\&-\frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2C_3^{\,11}+\frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2C_3^{\,13}\end{aligned}\right) \\
& +\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_3+\frac{13}{1890}\bar{\mu}^3C_3^{\,3}-\frac{32}{4725}\bar{\mu}^3C_3^{\,5}+\frac{11}{4320}\bar{\mu}^3C_3^{\,7}\\&-\frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3C_3^{\,9}+\frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3C_3^{\,11}-\frac{1}{243000}\bar{\mu}^3C_3^{\,13}\\&+\frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3C_3^{\,15}-\frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3C_3^{\,17}\end{aligned}\right) \\
& +\left(\begin{aligned}&\frac{1}{362880}\bar{\mu}^4C_3-\frac{1849}{2177280}\bar{\mu}^4C_3^{\,3}+\frac{11143}{6220800}\bar{\mu}^4C_3^{\,5}-\frac{5389}{4665600}\bar{\mu}^4C_3^{\,7}\\&+\frac{197801}{522547200}\bar{\mu}^4C_3^{\,9}-\frac{389131}{5225472000}\bar{\mu}^4C_3^{\,11}+\frac{28093}{2985984000}\bar{\mu}^4C_3^{\,13}\\&-\frac{24349}{31352832000}\bar{\mu}^4C_3^{\,15}+\frac{614581}{15049359360000}\bar{\mu}^4C_3^{\,17}-\frac{112997}{90296156160000}\bar{\mu}^4C_3^{\,19}\\&+\frac{6193}{361184624640000}\bar{\mu}^4C_3^{\,21}\end{aligned}\right) \qquad (3.100) \\
& +\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^5C_3+\frac{4153}{59875200}\bar{\mu}^5C_3^{\,3}-\frac{103681}{299376000}\bar{\mu}^5C_3^{\,5}\\&+\frac{60257}{163296000}\bar{\mu}^5C_3^{\,7}-\frac{21401491}{114960384000}\bar{\mu}^5C_3^{\,9}+\frac{311491}{5598720000}\bar{\mu}^5C_3^{\,11}\\&-\frac{4684279}{431101440000}\bar{\mu}^5C_3^{\,13}+\frac{834839}{574801920000}\bar{\mu}^5C_3^{\,15}\\&-\frac{223435951}{1655429529600000}\bar{\mu}^5C_3^{\,17}+\frac{4288861}{496628858880000}\bar{\mu}^5C_3^{\,19}\\&-\frac{16483}{45148078080000}\bar{\mu}^5C_3^{\,21}+\frac{4913}{532102348800000}\bar{\mu}^5C_3^{\,23}\\&-\frac{46111}{4334215495680000000}\bar{\mu}^5C_3^{\,25}\end{aligned}\right) \\
& +\ldots \;=\; 0
\end{aligned}
$$

สำหรับสมการมุมลาดเอียงที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ สามารถรวบรวมพจน์ของ $\Theta(\ldots)$ ต่างๆ แทนลงในสมการที่ (2.41) ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\theta(\bar{s}) &= C_3 + \left(-\frac{1}{240}\bar{\mu}C_3\left(-20C_3^{\,2}+C_3^{\,4}+120\right)\right)\bar{s}^{\,2} \\
&+\left(\frac{1}{69120}\bar{\mu}^{2}C_3\left(-1920C_3^{\,2}+384C_3^{\,4}-32C_3^{\,6}+C_3^{\,8}+2880\right)\right)\bar{s}^{\,4} \\
&+\left(-\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^{3}C_3\left(\begin{array}{l}-1440000C_3^{\,2}+694080C_3^{\,4}-140160C_3^{\,6}+14520C_3^{\,8}\\ -772C_3^{\,10}+17C_3^{\,12}+345600\end{array}\right)\right)\bar{s}^{\,6} \\
&+\left(\frac{1}{334430208000}\bar{\mu}^{4}C_3\left(\begin{array}{l}-287539200C_3^{\,2}+283115520C_3^{\,4}-106444800C_3^{\,6}\\ +21156480C_3^{\,8}-2469888C_3^{\,10}+172032C_3^{\,12}\\ -6688C_3^{\,14}+113C_3^{\,16}+8294400\end{array}\right)\right)\bar{s}^{\,8} \\
&+\left(-\frac{1}{3611846246400000}\bar{\mu}^{5}C_3\left(\begin{array}{l}-306726912000C_3^{\,2}+646971494400C_3^{\,4}\\ -417186201600C_3^{\,6}+136720051200C_3^{\,8}\\ -26896734720C_3^{\,10}+3398129280C_3^{\,12}\\ -280500480C_3^{\,14}+14749944C_3^{\,16}\\ -451988C_3^{\,18}+6193C_3^{\,20}+995328000\end{array}\right)\right)\bar{s}^{\,10} \qquad (3.101) \\
&+\left(\frac{1}{5721164454297600000}\bar{\mu}^{6}C_3\left(\begin{array}{l}-330687774720000C_3^{\,2}\\ +1651145637888000C_3^{\,4}\\ -1759280726016000C_3^{\,6}\\ +887562634752000C_3^{\,8}\\ -265252777574400C_3^{\,10}\\ +51804378316800C_3^{\,12}\\ -6924488601600C_3^{\,14}\\ +643495538880C_3^{\,16}\\ -41173065600C_3^{\,18}\\ +1740604800C_3^{\,20}\\ -44020480C_3^{\,22}+507221C_3^{\,24}\\ +119439360000\end{array}\right)\right)\bar{s}^{\,12} \\
&+\ldots
\end{aligned}
$$

สำหรับสมการที่แสดงถึงค่าระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน X ที่ระยะ $\overline{s}$ ใดๆ ตามความยาวเสา สามารถนำพจน์ของ $\mathrm{X}(\ldots)$ ต่างๆ แทนลงในสมการที่ (2.41) จะได้

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(\overline{s}) &= C_4 + \left(1 - \frac{1}{2}C_3^{\,2} + \frac{1}{24}C_3^{\,4}\right)\overline{s} \\
&+ \left(\frac{1}{6}\overline{\mu}C_3^{\,2} - \frac{1}{18}\overline{\mu}C_3^{\,4} + \frac{13}{2160}\overline{\mu}C_3^{\,6} - \frac{1}{4320}\overline{\mu}C_3^{\,8}\right)\overline{s}^{\,3} \\
&+ \left(\begin{aligned}
&-\frac{1}{30}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,2} + \frac{1}{36}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,4} - \frac{79}{10800}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,6} + \frac{13}{14400}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,8} - \frac{71}{1296000}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,10} \\
&+ \frac{7}{5184000}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,12}
\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,5} \\
&+ \left(\begin{aligned}
&\frac{1}{315}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,2} - \frac{59}{7560}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,4} + \frac{911}{226800}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,6} - \frac{109}{113400}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,8} \\
&+ \frac{697}{5443200}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,10} - \frac{359}{36288000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,12} + \frac{137}{326592000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,14} \\
&- \frac{1}{130636800}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,16}
\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,7} \qquad (3.102) \\
&+ \left(\begin{aligned}
&-\frac{1}{5670}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,2} + \frac{103}{68040}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,4} - \frac{2839}{2041200}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,6} + \frac{4559}{8164800}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,8} \\
&- \frac{20659}{163296000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,10} + \frac{34897}{1959552000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,12} - \frac{629}{391910400}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,14} \\
&+ \frac{21379}{235146240000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,16} - \frac{1049}{352719360000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,18} \\
&+ \frac{61}{1410877440000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,20}
\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,9} \\
&+ \left(\begin{aligned}
&\frac{1}{155925}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,2} - \frac{157}{748440}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,4} + \frac{9629}{28066500}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,6} - \frac{2621}{11975040}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,8} \\
&+ \frac{412663}{5388768000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,10} - \frac{129467}{7698240000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,12} + \frac{106361}{43110144000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,14} \\
&- \frac{71177}{287400960000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,16} + \frac{218927}{12933043200000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,18} \\
&- \frac{6539}{8622028800000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,20} + \frac{9409}{465589555200000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,22} \\
&- \frac{13}{53210234880000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,24}
\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,11} \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

สำหรับสมการที่แสดงถึงค่าระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน Y ที่ระยะ $\overline{s}$ ใดๆ ตามความยาวเสา สามารถนำพจน์ของ $\mathrm{Y}(\ldots)$ ต่างๆ แทนลงในสมการที่ (2.41) จะได้

$$
\begin{aligned}
\overline{y}(\overline{s}) &= C_5 + \left(C_3 - \frac{1}{6}C_3^{\,3} + \frac{1}{120}C_3^{\,5}\right)\overline{s} \\
&+\left(-\frac{1}{6}\overline{\mu}C_3 + \frac{1}{9}\overline{\mu}C_3^{\,3} - \frac{1}{45}\overline{\mu}C_3^{\,5} + \frac{1}{540}\overline{\mu}C_3^{\,7} - \frac{1}{17280}\overline{\mu}C_3^{\,9}\right)\overline{s}^{\,3} \\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{120}\overline{\mu}^{\,2}C_3 - \frac{5}{144}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,3} + \frac{241}{14400}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,5} - \frac{73}{21600}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,7} + \frac{121}{345600}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,9} \\ &-\frac{193}{10368000}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,11} + \frac{17}{41472000}\overline{\mu}^{\,2}C_3^{\,13}\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,5} \\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{5040}\overline{\mu}^{\,3}C_3 + \frac{13}{1890}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,3} - \frac{32}{4725}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,5} + \frac{11}{4320}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,7} - \frac{3673}{7257600}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,9} \\ &+\frac{67}{1134000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,11} - \frac{1}{243000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,13} + \frac{209}{1306368000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,15} \\ &-\frac{113}{41803776000}\overline{\mu}^{\,3}C_3^{\,17}\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,7} \\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{362880}\overline{\mu}^{\,4}C_3 - \frac{1849}{2177280}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,3} + \frac{11143}{6220800}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,5} - \frac{5389}{4665600}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,7} \\ &+\frac{197801}{522547200}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,9} - \frac{389131}{5225472000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,11} + \frac{28093}{2985984000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,13} \\ &-\frac{24349}{31352832000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,15} + \frac{614581}{15049359360000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,17} \\ &-\frac{112997}{90296156160000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,19} + \frac{6193}{361184624640000}\overline{\mu}^{\,4}C_3^{\,21}\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,9} \qquad (3.103) \\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{39916800}\overline{\mu}^{\,5}C_3 + \frac{4153}{59875200}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,3} - \frac{103681}{299376000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,5} \\ &+\frac{60257}{163296000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,7} - \frac{21401491}{114960384000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,9} + \frac{311491}{5598720000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,11} \\ &-\frac{4684279}{431101440000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,13} + \frac{834839}{574801920000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,15} \\ &-\frac{223435951}{1655429529600000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,17} + \frac{4288861}{496628858880000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,19} \\ &-\frac{16483}{45148078080000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,21} + \frac{4913}{532102348800000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,23} \\ &-\frac{46111}{4334215495680000000}\overline{\mu}^{\,5}C_3^{\,25}\end{aligned}\right)\overline{s}^{\,11} \\
&+\ldots
\end{aligned}
$$

3.2 ขั้นตอนการหาคำตอบ

ขั้นตอนในการหาคำตอบจากสมการครอบคลุมปัญหาทั้งหมดที่ได้จัดอยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติและได้ทำการแปลงสมการเหล่านั้นด้วยวิธี DTM จากนั้นกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้างเพื่อสร้างระบบสมการดังแสดงในสมการที่ (3.47), (3.98), (3.99), (3.100) และหาค่าของตัวแปรต่างๆ ที่ต้องการทราบ สามารถเขียนเป็นลำดับขั้นตอนได้ดังนี้

3.2.1 กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

1) สมมติค่าโมเมนต์ C_1 และแรงเฉือน C_2 ที่จุดรองรับ A เพื่อหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตหรือแรงกระทำ $\bar{\mu}$ ในสมการที่ (3.47) และ/หรือ เนื่องจาก $C_2 = 0$ ตามสมการที่ (3.46) จะสามารถหาค่า $\bar{\mu}$ ได้โดยตรงจากค่าสัมประสิทธิ์ของ C_1 (ค่า α_1) ในสมการที่ (3.47 a)

2) ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหารากสมการ เช่น วิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) หรือโปรแกรมสำเร็จรูปคำนวณเชิงตัวเลข เช่น Maple, MATLAB เป็นต้น เพื่อปรับแก้ค่าน้ำหนักบรรทุกให้สอดคล้องกัน กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณเท่ากับ $\varepsilon_a = 10^{-10}$ โดยให้มีการเพิ่มจำนวนพจน์ในสมการที่ (3.32) สูงสุด 30 พจน์

3) คำตอบที่ได้จากข้อ 2) นำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีแม่นตรงหรือวิธีอื่นๆ ในอดีต จนค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบไม่เกินที่กำหนด

3.2.2 กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

1) การศึกษามุมลาดเอียง

1) สมมติค่าแรงกระทำ $\bar{\mu}$ เพื่อหาค่ามุมลาดเอียง C_3 หรือค่า θ_B จากสมการที่ (3.98) ในทำนองเดียวกันอาจจะสมมติค่ามุมลาดเอียง θ_B เพื่อหาค่าแรงกระทำ $\bar{\mu}$ ก็ได้เช่นกัน

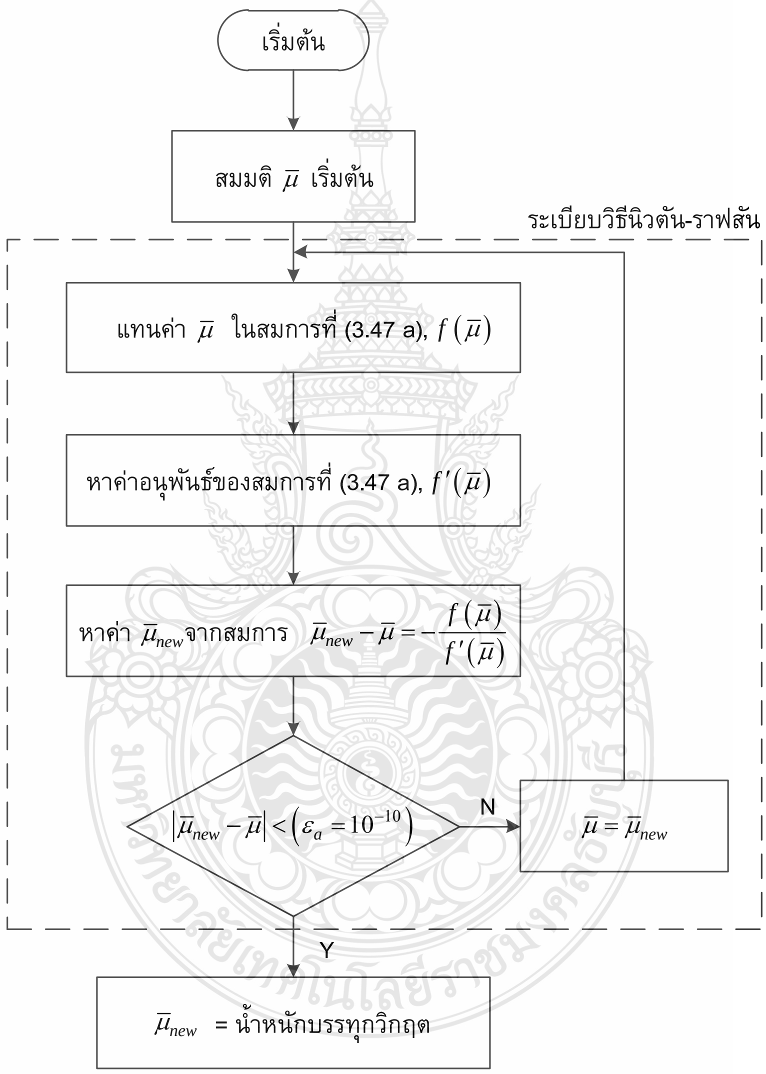
2) ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเช่นเดียวกับกรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตหาค่ารากสมการในสมการที่ (3.98) และปรับแก้ค่าแรงกระทำหรือมุมลาดเอียงที่ทำให้เกิดการเสียรูปเชิงมุมที่เกิดขึ้น จนกว่ามีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณไม่เกิน $\varepsilon_a = 10^{-10}$ โดยให้มีการเพิ่มจำนวนพจน์ในสมการที่ (3.98) สูงสุด 30 พจน์

3) คำตอบที่ได้จากข้อ 2) นำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีอิลิปติกอินทิกรัล (Elliptical Integral Method, EIM) วิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) จนค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบไม่เกินที่กำหนด

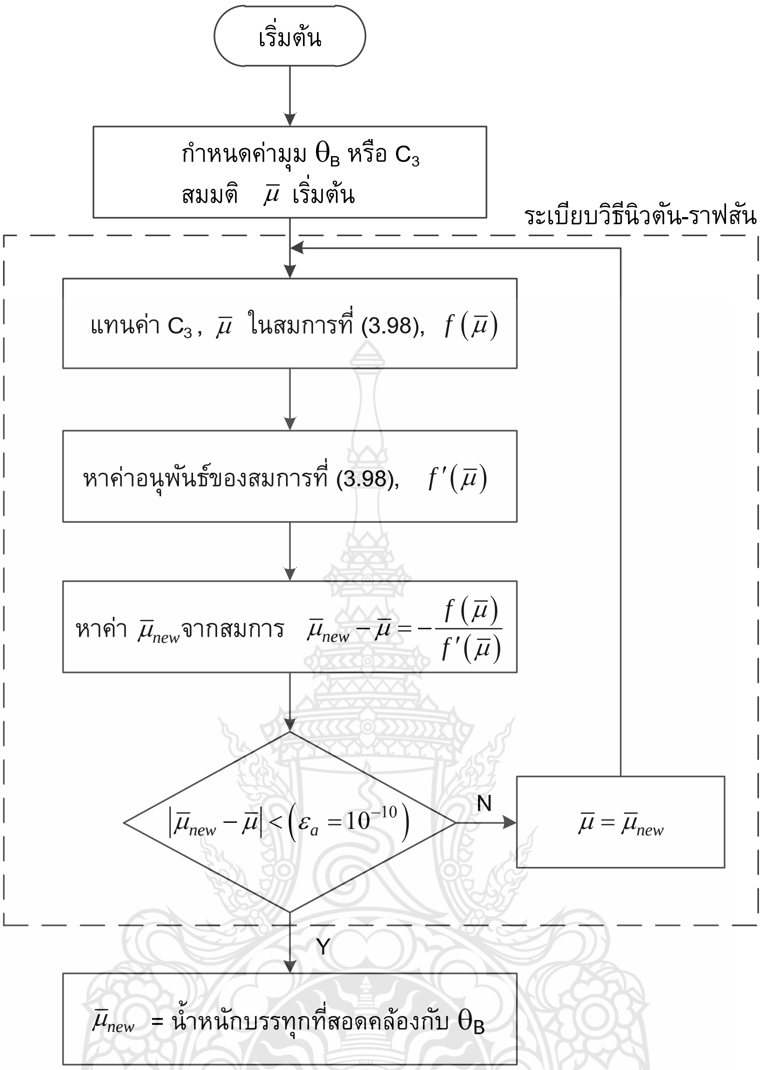
4) ดำเนินการหาค่ามุมลาดเอียง ณ ตำแหน่งใดๆ ตามความยาวส่วนโค้งเสา $\theta(\bar{s})$ ด้วยสมการที่ (3.101) ที่มีจำนวนพจน์เท่ากับที่ได้จากข้อ 2) ต่อไป

2) การศึกษาการโก่งตัว

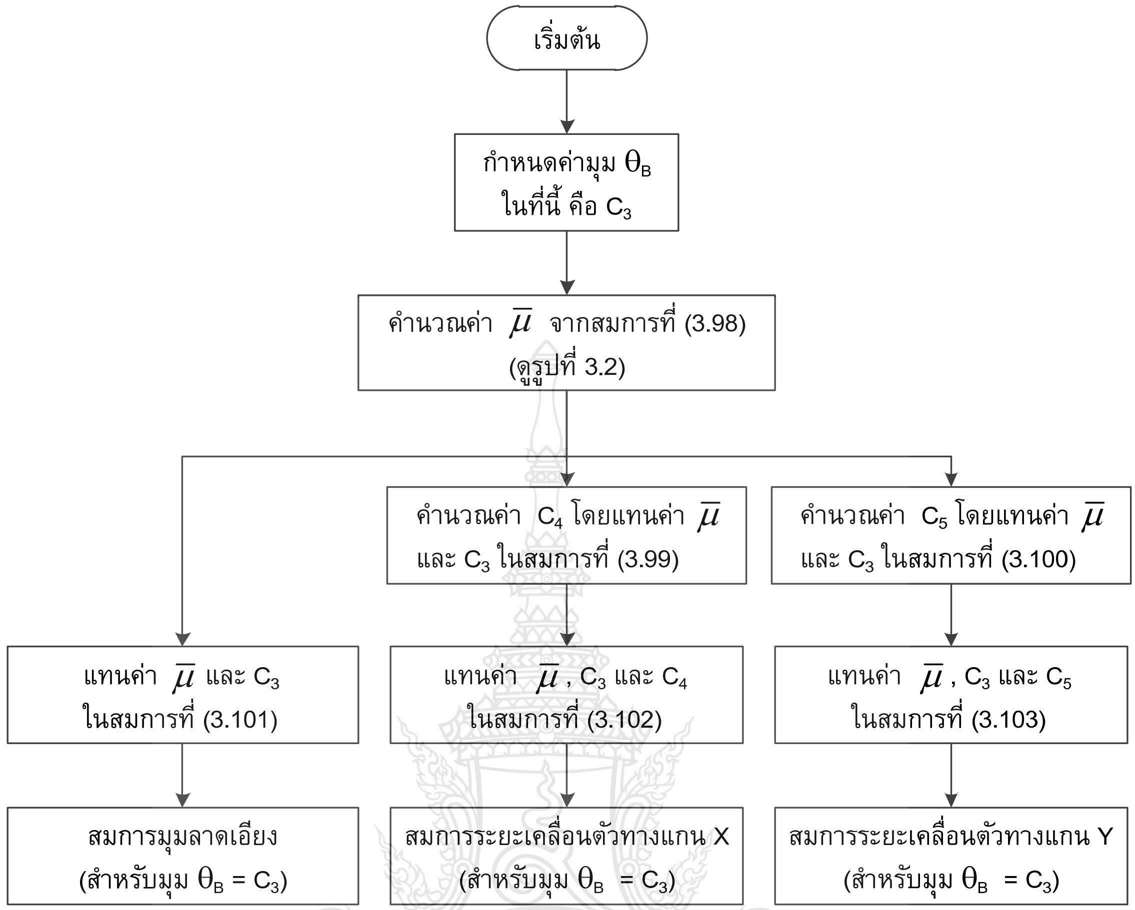
มีลักษณะเช่นเดียวกับกรณีการศึกษามุมลาดเอียง การหาระยะโก่งตัวที่ปลายเสา จะใช้สมการที่ (3.99) สำหรับหาค่า $\bar{x}_B$ สมการที่ (3.100) สำหรับหาค่า $\bar{y}_B$ และการหาระยะการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งใดๆ ตามแนวแกน X, Y จะใช้สมการที่ (3.102), (3.103) สำหรับหาค่า $\bar{x}(\bar{s})$, $\bar{y}(\bar{s})$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 ขั้นตอนกรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต



รูปที่ 3.2 ขั้นตอนกรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ สำหรับคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกับมุม θ_B



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนกรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ สำหรับคำนวณสมการมุมลาดเอียง สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน X และสมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y

บทที่ 4

ผลการศึกษา

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย โดยนำเทคนิคการวิเคราะห์สมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้นเพื่อหาคำตอบในเชิงตัวเลขด้วยวิธี DTM มุ่งหาผลเฉลยคำตอบและนำเสนอวิธีแก้ปัญหาโจทย์ใน 2 กรณี 1) การหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต 2) พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสา ถูกนำเสนอในรูปของตัวแปรมุมลาดเอียงและระยะการเคลื่อนตัวของตำแหน่งต่างๆ ในโครงสร้างในสภาวะแรงกระทำต่างๆ กัน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 ผลการศึกษา

จากบทที่ 3 สมการที่ได้จากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธี DTM ที่นำเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามาสร้างระบบสมการ ดังแสดงในสมการที่ (3.47), (3.98) - (3.100) การหาผลเฉลยคำตอบและความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง มีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จากสมการที่ (3.47) - (3.52) ที่จัดอยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ทั่วไป คือ

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \to [A]\{C\} = \{0\} \tag{4.1}$$

ในกรณีทั่วๆ ไป ระบบสมการที่ (4.1) เป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ (Homogeneous equation) ซึ่งลักษณะปัญหานี้เป็นปัญหาแบบเจาะจง ผลเฉลยคำตอบมี 2 รูปแบบ คือ ผลเฉลยสามัญ (Trivial solution) ซึ่งหาได้จาก $\{C\}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้คำตอบของตัวแปร $\bar{\mu}$ มีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน แต่สิ่งที่สนใจในการศึกษานี้คือกรณี $\{C\}$ ไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งผลเฉลยในรูปแบบนี้เรียกว่า ผลเฉลยวิสามัญ (Nontrivial solution) ดังนั้นขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการจะต้องกำหนดค่าดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) ของเมทริกซ์ $[A]$ ให้มีค่าเป็นศูนย์ หรือ $|A| = 0$ จากนั้นจึงสามารถหารากของสมการที่ติดอยู่ในรูปของตัวแปร $\bar{\mu}$ ได้

แต่สำหรับในกรณีการศึกษานี้รูปแบบจำลองมีลักษณะเป็นเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย ซึ่งแรงกระทำดังกล่าวมีทิศทางตั้งฉากกับจุดรองรับ A เสมอ ดังนั้น แรงเฉือนที่จุดรองรับ A จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ หมายความว่า ค่าตัวแปร $C_2 = 0$ เช่นกัน ซึ่งได้แสดงการสร้างระบบสมการด้วยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาในสมการที่ (3.5) แสดงคำตอบในสมการที่ (3.45) ดังนั้นการวิเคราะห์จึงสามารถใช้สมการเงื่อนไขของปัญหา สมการที่ (3.4) โดยกำหนดให้ $C_2 = 0$ เพียงสมการเดียวสร้างระบบสมการเพื่อหาค่าของ $\bar{\mu}$ ได้ มีพจน์ย่อยต่างๆ แสดงในสมการที่ (4.2) ดังนี้

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{Y}(0) = 0 \\
\bar{Y}(1) = 0 \\
\bar{Y}(2) = \dfrac{C_1}{2} \\
\bar{Y}(3) = 0 \\
\bar{Y}(4) = -\dfrac{1}{24}\bar{\mu}C_1 \\
\bar{Y}(5) = 0 \\
\bar{Y}(6) = \dfrac{1}{720}\bar{\mu}^2 C_1 \\
\bar{Y}(7) = 0 \\
\bar{Y}(8) = -\dfrac{1}{40320}\bar{\mu}^3 C_1 \\
\bar{Y}(9) = 0 \\
\bar{Y}(10) = \dfrac{1}{3628800}\bar{\mu}^4 C_1 \\
\bar{Y}(11) = 0 \\
\bar{Y}(12) = -\dfrac{1}{479001600}\bar{\mu}^5 C_1 \\
\bar{Y}(13) = 0 \\
\bar{Y}(14) = \dfrac{1}{87178291200}\bar{\mu}^6 C_1 \\
\bar{Y}(15) = 0 \\
\bar{Y}(16) = -\dfrac{1}{20922789888000}\bar{\mu}^7 C_1 \\
\bar{Y}(17) = 0 \\
\bar{Y}(18) = \dfrac{1}{6402373705728000}\bar{\mu}^8 C_1 \\
\bar{Y}(19) = 0 \\
\bar{Y}(20) = -\dfrac{1}{2432902008176640000}\bar{\mu}^9 C_1
\end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

รวมพจน์จากสมการที่ (4.2) ตามสมการที่ (3.4) และดึงค่าสัมประสิทธิ์ของ C_1 ออกมาจะได้

$$1-\frac{1}{2}\bar{\mu}+\frac{1}{24}\bar{\mu}^2-\frac{1}{720}\bar{\mu}^3+\frac{1}{40320}\bar{\mu}^4-\frac{1}{3628800}\bar{\mu}^5+\frac{1}{479001600}\bar{\mu}^6$$
$$-\frac{1}{87178291200}\bar{\mu}^7+\frac{1}{20922789888000}\bar{\mu}^8-\frac{1}{6402373705728000}\bar{\mu}^9=0 \qquad (4.3)$$

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเปรียบเทียบค่า $\bar{\mu}$ และค่าความคลาดเคลื่อน กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จำนวนพจน์ (n_k)	ผลการคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ด้วยวิธี DTM	ค่าความคลาดเคลื่อน (ε_a)	ค่าความคลาดเคลื่อน เปรียบเทียบกับวิธี EIM (%)
5	3.46410161513775	-	40.3947503612
6	3.46410161513775	-	40.3947503612
7	2.27618183055468	$3.42923\text{x}10^{-1}$	7.7498250972
8	2.27618183055468	0	7.7498250972
9	2.47926551249410	$8.92212\text{x}10^{-2}$	0.4808465158
10	2.47926551249410	0	0.4808465158
11	2.46697473318826	$4.95743\text{x}10^{-3}$	0.0172800071
12	2.46697473318826	0	0.0172800071
13	2.46741094624452	$1.76821\text{x}10^{-4}$	0.0003990422
14	2.46741094624452	0	0.0003990422
15	2.46740094130692	$4.05483\text{x}10^{-6}$	0.0000064426
16	2.46740094130692	0	0.0000064426
17	2.46740110216882	$6.51949\text{x}10^{-8}$	0.0000000769
18	2.46740110216882	0	0.0000000769
19	2.46740110025493	$7.7567\text{x}10^{-10}$	$7.05585\text{x}10^{-10}$
20	2.46740110025493	0	$7.05585\text{x}10^{-10}$
21	2.46740110027246	$7.10463\text{x}10^{-12}$	$4.87752\text{x}10^{-12}$

note : $\bar{\mu}_{(critical)}$ (exact) $=\frac{\pi^2}{4}=2.467401100272340...$

หลังจากคำนวณค่ารากของสมการ พบว่าต้องใช้จำนวนพจน์ของผลรวมการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แบบทำซ้ำ (n_k) อย่างน้อย 21 พจน์ จึงทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณมีค่าน้อยกว่าที่กำหนด ($\varepsilon_a \le 10^{-10}$)

$$\bar{\mu} = \begin{Bmatrix} -60.485630054313998 \\ 2.4674011002724664 \\ 22.207197152488499 \\ 65.193286017889871 \\ 102.05938950628826 \\ 382.39058057393445 \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

สมการที่ (4.3) เป็นสมการที่ใช้คำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต ด้วยการคำนวณหารากของสมการ จากผลการคำนวณในตารางที่ 4.1 ค่าของแรงกระทำที่ปลายเสา F ที่อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ $\bar{\mu}$ เป็นแรงหรือน้ำหนักที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะจะเข้าใกล้ $\pi^2/4$ เมื่อมีจำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลงมากขึ้นและเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจากตำราของ Timoshenko and Gere [6] พบว่าจำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลงมีผลต่อความถูกต้องของผลคำตอบ จำนวนพจน์ยิ่งมากจะให้ผลลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรงมากยิ่งขึ้นด้วยเช่นกัน หากกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนของคำตอบที่ได้จากวิธี DTM เปรียบเทียบกับผลเฉลยวิธี EIM ไม่เกิน 1% จะพบว่าสามารถใช้ฟังก์ชันแปลงเพียงจำนวน 9 พจน์เท่านั้น ซึ่งค่า $\bar{\mu}$ มีอันดับกำลังเพียง 3 ดังนั้น สมการที่ (4.3) จึงสามารถลดจำนวนพจน์ลงได้เหลือเพียง 4 พจน์ ทำให้สมการมีความสั้นและกระชับมากขึ้นต่อการนำไปใช้งานและคงยังมีความถูกต้องอยู่ในระดับสูง

4.1.2 กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสา ได้ศึกษาในตัวแปรด้านมุมลาดเอียง $\theta(\bar{s})$ การเคลื่อนที่ของโครงสร้าง $\bar{x}(\bar{s})$ และ $\bar{y}(\bar{s})$ โดยตัวแปรทั้ง 3 ตัวแปร ดังกล่าวจะแสดงให้เห็นถึงลักษณะการเสียรูปของโครงสร้างได้ที่สัมพันธ์กับแรงกระทำ และจากสมการที่ (3.98) ที่ประกอบไปด้วย ตัวแปร 2 ตัว คือ C_3 และ $\bar{\mu}$ สมการนี้จะเป็นจริงเมื่อ $\bar{\mu}$ หรือ C_3 มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งมีหมายความอยู่ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้ากำหนดให้ $C_3 = 0$ จะได้ $\bar{\mu}$ มีค่าเป็นอะไรก็ได้ แต่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโครงสร้างและมีค่าเป็นจริง คือ $\bar{\mu} = 0$

กรณีที่ 2 ถ้ากำหนดให้ C_3 เข้าใกล้ศูนย์ จะได้น้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\bar{\mu}_{(critical)}$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับคำตอบแบบแม่นตรงถึง $\pi^2 / 4$

ดังนั้นจึงทำการตรวจสอบจำนวนพจน์ที่เหมาะสมของวิธี DTM ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณของผลคำตอบ $\varepsilon_a \le 10^{-10}$ ด้วยคำตอบจากวิธีแม่นตรงที่ทราบค่าแล้ว คือ น้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\left(\bar{\mu}_{(critical)} = \pi^2 / 4\right)$ โดยการกำหนดให้ ค่า C_3 มีค่าน้อยๆ หรือเข้าใกล้ศูนย์ โดยในที่นี้จะกำหนดให้ $C_3 = 0.001$ ซึ่งมีความเพียงพอต่อความถูกต้องของผลการคำนวณ สมการน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ได้ มีผลรวมจำนวนพจน์ของผลรวมการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แบบทำซ้ำ (n_k) ที่เหมาะสม คือ 17 พจน์ ซึ่งพจน์ที่ k เป็นเลขคี่จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังแสดงในสมการที่ (4.5) จากนั้นหารากของสมการด้วยระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน จะได้ค่า $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกับสมการ สำหรับกรณีที่ใช้จำนวนพจน์ผลรวมการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แบบทำซ้ำจำนวนอื่นๆ ได้แสดงผลเปรียบเทียบการคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ไว้ในตารางที่ 4.2

$$\begin{aligned} &0.001 - 0.0004999999167\bar{\mu} + 0.00004166663889\bar{\mu}^2 - 0.000001388883102\bar{\mu}^3 \\ &+2.480072751\times10^{-8}\bar{\mu}^4 - 2.7548826991\times10^{-10}\bar{\mu}^5 + 2.0818956501\times10^{-12}\bar{\mu}^6 \\ &-1.1184988121\times10^{-14}\bar{\mu}^7 + 3.7079423831\times10^{-17}\bar{\mu}^8 = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

ค่าหารากของสมการที่ (4.5) คือ

$$\bar{\mu} = \begin{Bmatrix} 2.4674014086959882 \\ 22.207280304365899 \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

คำตอบที่ถูกต้องและสอดคล้องกับลักษณะของโครงสร้าง คือ $\bar{\mu} = 2.4674014086959882$ โดยค่าที่คำนวณได้จากวิธี DTM มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ เท่ากับ $6.48576\text{x}10^{-11}$ เมื่อทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณในรอบก่อนหน้า (n_k = 15 พจน์) และมีค่าความคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยวิธี EIM เพียงร้อยละ 0.0000125 สำหรับวิธีการยิงเป้าดูรายละเอียดในภาคผนวก จ

ตารางที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ระหว่างวิธี EIM วิธียิงเป้า และวิธี DTM

จำนวนพจน์ (n_k)	$\bar{\mu}$ วิธี EIM	วิธียิงเป้า	วิธี DTM	ค่าความคลาดเคลื่อน (ε_a)	เปรียบเทียบกับวิธี EIM (%)
4	2.4674011002	2.4674011005	2.0000003333	-	18.9430395
5			2.5358984981	2.67949×10^{-1}	2.7760949
6			2.5358984981	0	2.7760949
7			2.4646046852	2.81138×10^{-2}	0.1133344
8			2.4646046852	0	0.1133344
9			2.4674791152	1.16628×10^{-3}	0.0031618
10			2.4674791152	0	0.0031618
11			2.4673999522	3.20825×10^{-5}	0.0000465
12			2.4673999522	0	0.0000465
13			2.4674014281	5.98145×10^{-7}	0.0000132
14			2.4674014281	0	0.0000132
15			2.4674014085	7.92911×10^{-9}	0.0000124
16			2.4674014085	0	0.0000124
17			2.4674014086	6.48576×10^{-11}	0.0000124
18			2.4674014086	0	0.0000124
19			2.4674014087	6.88973×10^{-13}	0.0000125
20			2.4674014087	0	0.0000125

1) การศึกษามุมลาดเอียง

การศึกษามุมลาดเอียงของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมลาดเอียงและแรงกระทำ ที่อยู่ในรูปของตัวแปร $\theta_B, \bar{\mu}$ หรือ $C_3, \bar{\mu}$ ในสมการที่ (3.98)

สำหรับกรณีตัวอย่างการหามุมลาดเอียงที่ปลายเสา B เท่ากับ 40° ($\theta_B = 40^\circ$) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.6981317 เรเดียน การคำนวณใช้ฟังก์ชันแปลงจำนวน 17 พจน์ ซึ่งพจน์เลขคี่จะมีค่าเป็น

ศูนย์ การคำนวณหาค่า $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกัน เริ่มต้นด้วยการแทนค่าตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว คือ $C_3 = -0.6981317$ ในสมการที่ (3.98) จะได้

$$\begin{aligned}
&-0.6981317 + 0.3214017691\bar{\mu} - 0.02052160618\bar{\mu}^2 - 0.0005801799869\bar{\mu}^3 \\
&+0.0001582161771\bar{\mu}^4 - 0.000006976855005\bar{\mu}^5 - 8.654776769\times10^{-7}\bar{\mu}^6 \\
&+1.458067401\times10^{-7}\bar{\mu}^7 - 5.289176332\times10^{-9}\bar{\mu}^8 \quad = \ 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

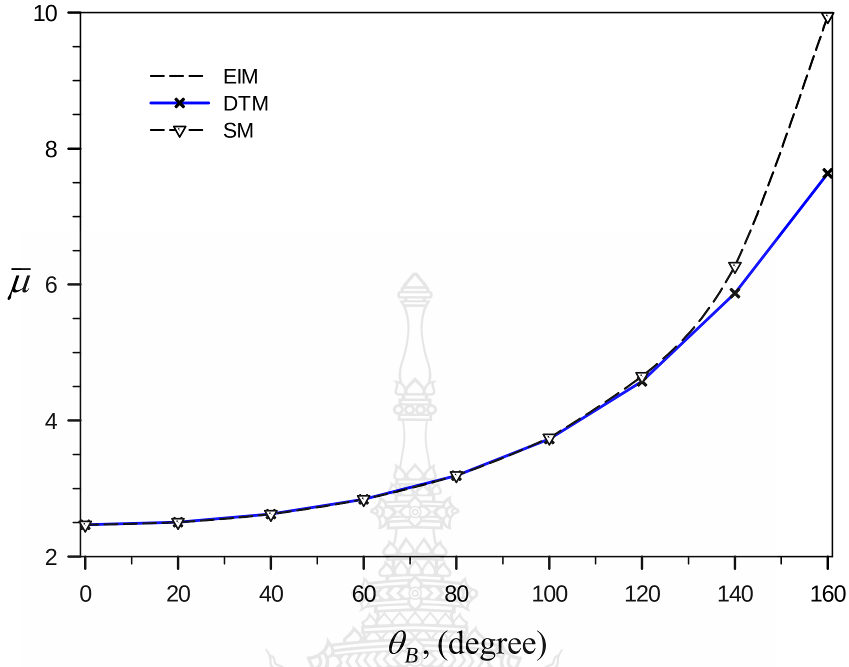
จากนั้นหารากของสมการที่ (4.7) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ จะได้

$$\bar{\mu} = \begin{Bmatrix} 2.6244325498739062 \\ 18.011516887605670 \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

คำตอบที่ถูกต้องและสอดคล้องกับลักษณะของโครงสร้าง คือ $\bar{\mu} = 2.6244325498739062$ สำหรับการศึกษากรณีมุมลาดเอียง θ_B อื่นๆ สามารถคำนวณได้ด้วยวิธีเดียวกัน และได้แสดงผลการคำนวณไว้ในตารางที่ 4.3 และแสดงการเปรียบเทียบกับค่าของผลเฉลยวิธี EIM [6, 25] และวิธียิงเป้าในรูปที่ 4.1

ตารางที่ 4.3 แสดงผลการคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ด้วยวิธี DTM เปรียบเทียบกับวิธี EIM และวิธียิงเป้า

มุมลาดเอียงที่ปลายเสา B	แรงกระทำ $\bar{\mu}$		
θ_B (deg.)	วิธี EIM	วิธียิงเป้า	วิธี DTM
0	2.467401100	2.467401100	2.467401408
20	2.504412117	2.505391311	2.505392839
40	2.622847370	2.624483882	2.624432549
60	2.842446068	2.841754224	2.841073592
80	3.190349623	3.192543896	3.189392747
100	3.745514870	3.746474149	3.733051025
120	4.648583673	4.650559638	4.570100575
140	6.269666196	6.272770518	5.832061472
160	9.941159033	9.943837058	7.885700599

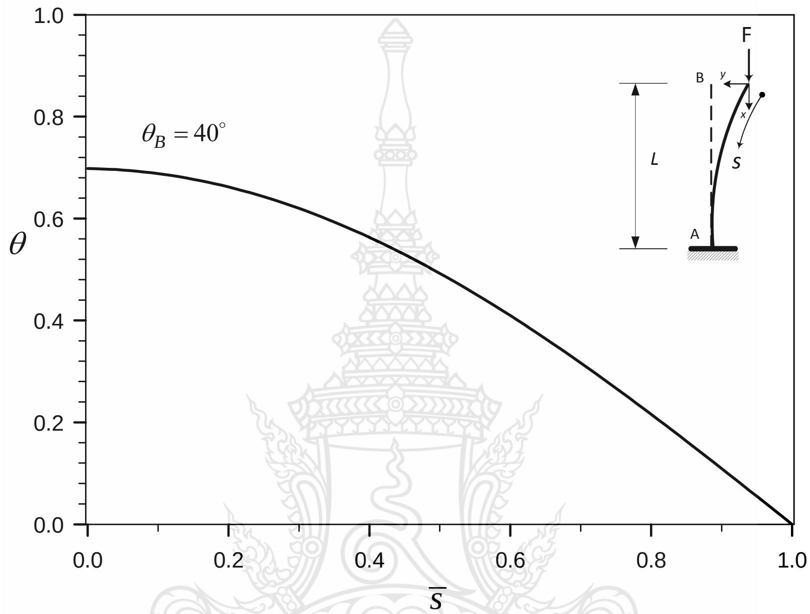


รูปที่ 4.1 แสดงผลการคำนวณเปรียบเทียบระหว่างวิธี DTM วิธี EIM และวิธียิงเป้าของค่า θ_B กับ $\bar{\mu}$ เมื่อใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ 3 พจน์ และจำนวนพจน์ในการคำนวณ 17 พจน์

จากรูปที่ 4.1 พบว่าการคำนวณค่ามุมลาดเอียงที่ปลายเสา θ_B กับแรงกระทำที่ปลายเสาที่แสดงอยู่ในรูปของ $\bar{\mu}$ ด้วยวิธี DTM มีค่าใกล้เคียงผลเฉลยวิธี EIM มาก โดยเฉพาะในช่วงที่มุมลาดเอียง θ_B มีค่าไม่เกิน 100° มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ (ε_a) เพียงร้อยละ 0.33 ในขณะที่มุมลาดเอียง θ_B เพิ่มขึ้นเป็น 120° ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ เพิ่มขึ้นเป็น 1.68 และเมื่อมุมลาดเอียง θ_B มีค่ามากกว่า 120° ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ ยิ่งเพิ่มค่าสูงขึ้นตามลำดับ ทั้งนี้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมีผลมาจากการ 1) ใช้จำนวนฟังก์ชันแปลง 17 พจน์ ในการคำนวณวิธี DTM 2) ใช้จำนวณ 3 พจน์ สำหรับการแปลงค่าฟังก์ชัน sine, cosine ในวิธีอนุกรมเทย์เลอร์ให้เป็นฟังก์ชันพีชคณิต 3) ฟังก์ชันพีชคณิตที่ได้จากการแปลงฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ในวิธี DTM มีลักษณะอยู่ในรูปของฟังก์ชันตัวแปรยกกำลัง

เมื่อนำค่า $\bar{\mu} = 2.624432549$ และ $C_3 = -0.6981317$ เรเดียน แทนในสมการที่ (3.101) จะได้สมการมุมลาดเอียงที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ ตลอดความยาว L สำหรับกรณี $\theta_B = 40^\circ$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\theta(\bar{s}) \;=\; & -0.6981317+0.8434972642\bar{s}^{2}-0.1413455629\bar{s}^{4} \\
& -0.01048742794\bar{s}^{6}+0.007505723266\bar{s}^{8} \\
& -0.000868633\bar{s}^{10}-0.0002827928098\bar{s}^{12} \\
& +0.0001250332465\bar{s}^{14}-0.00001190340935\bar{s}^{16}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$



รูปที่ 4.2 แสดงการเสียรูปเชิงมุมของเสายื่นปลายอิสระ กรณี $\theta_B = 40^\circ$

ที่ระยะ $\bar{s}=0$ ซึ่งเป็นตำแหน่งปลายเสา B เสาจะมีมุมลาดเอียงเท่ากับ -0.6981317 เรเดียน หรือ 40° โดยมีแรงกระทำ F ที่แสดงอยู่ในรูปของ $\bar{\mu}$ เท่ากับ 2.624432549 จะทำให้เสายื่นปลายอิสระนี้เสียรูปเชิงมุมตลอดความยาวเสาและมีค่ามุมลดลงไปเรื่อยๆ ตามความยาว $\bar{s}$ ที่เพิ่มขึ้นจนถึงปลายเสาอีกด้านหนึ่งที่ $\bar{s}=1$ และเป็นจุดรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายเสา A มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงในรูปที่ 4.2 จะเห็นได้ว่าลักษณะการเสียรูปเชิงมุมสอดคล้องกับลักษณะของโครงสร้างดังกล่าวอย่างดี

สำหรับกรณีที่กำหนดขนาดของแรงกระทำ $\bar{\mu}$ เป็นตัวแปรที่ทราบค่า มีวิธีการคำนวณในลักษณะเดียวกันกับการกำหนดขนาดของมุมลาดเอียง θ_B และใช้สมการที่ (3.98) เช่นเดียวกัน โดยกำหนดให้ $\bar{\mu}$ เป็นตัวแปรที่ทราบค่า และกำหนดให้ C_3 เป็นตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบ

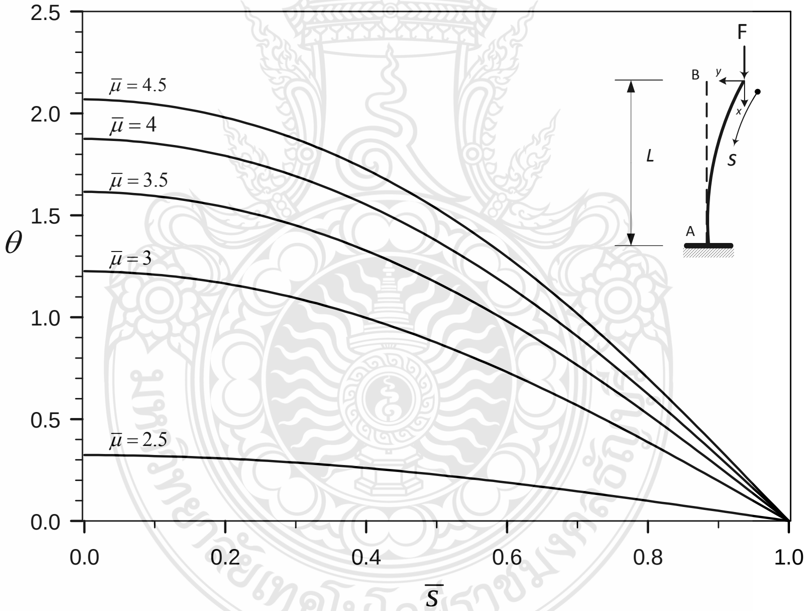
หลังจากที่ได้คำตอบของ C_3 แล้ว นำค่า $C_3, \bar{\mu}$ แทนลงในสมการที่ (3.101) จะได้สมการมุมลาดเอียงที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ ตลอดความยาว L สำหรับกรณี $\bar{\mu}$ ใดๆ เช่นกัน

กรณีตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $\bar{\mu} = 3.5$ แทนลงในสมการที่ (3.98) จะได้

$$C_3 = \begin{Bmatrix} -1.614011849165063 \\ 0 \\ 1.614011849165063 \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

คำตอบที่ถูกต้องและสอดคล้องกับลักษณะของโครงสร้าง คือ $C_3 = \pm 1.614011849165063$ เรเดียน

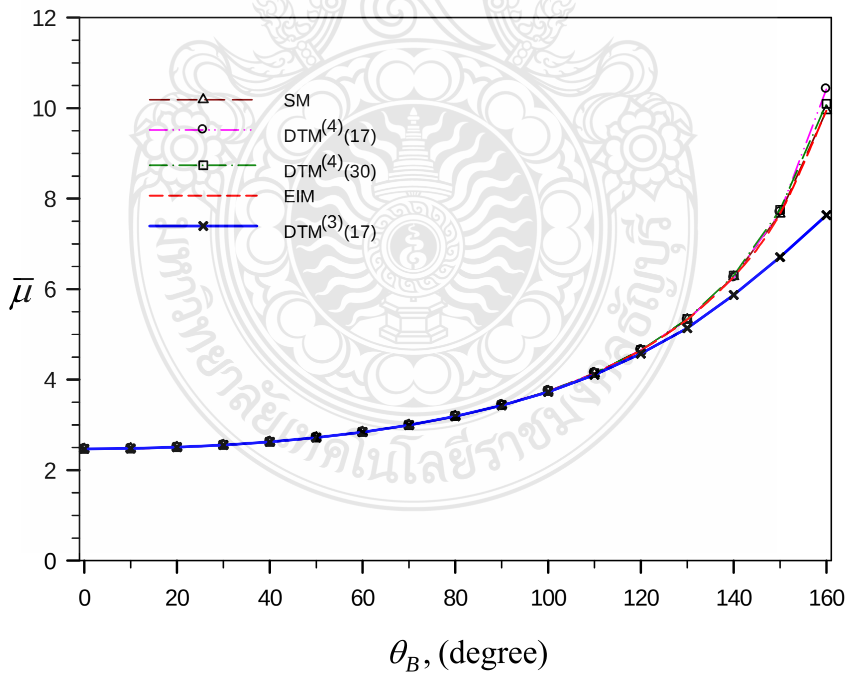
สำหรับกรณีที่กำหนดขนาดของแรงกระทำ $\bar{\mu} = 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5$ แสดงลักษณะการเสียรูปเชิงมุมตลอดความยาวเสา ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงการเสียรูปเชิงมุมของเสายื่นปลายอิสระ กรณี $\bar{\mu} = 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5$

ดังจะเห็นได้ว่าการคำนวณด้วยวิธี DTM ให้ผลคำตอบที่ดีในช่วงที่มุมลาดเอียงที่ปลายเสามีค่าไม่สูงมากนัก ดังนั้นการกำหนดค่ามุมลาดเอียงที่ปลายเสาหรือ θ_B เพื่อจะศึกษาในด้านการเคลื่อนที่ของโครงสร้างของเสายื่น ควรนำความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและมุมลาดเอียงที่ปลายเสามาร่วมพิจารณาด้วยเพื่อลดความผิดพลาดของคำตอบ

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมในกรณีการเพิ่มจำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลง วิธี DTM ให้มากขึ้น และเพิ่มจำนวนพจน์ในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine โดยกำหนดสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้ $\mathrm{DTM}^{(m)}(n_k)$ โดยที่ m คือจำนวนพจน์ในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ในขณะที่ n_k คือจำนวนพจน์ของฟังก์ชันแปลงที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธี DTM เพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณข้างต้น ซึ่งผลการคำนวณพบว่าการคำนวณด้วยวิธี DTM ให้คำตอบค่าของน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับ มุมลาดเอียง θ_B สอดคล้องกันดี และเมื่อเปรียบเทียบผลคำนวณวิธี DTM แบบ $\mathrm{DTM}^{(3)}(17)$ (อนุกรมเทย์เลอร์ จำนวน 3 พจน์, จำนวนพจน์ที่ใช้ในวิธี DTM 17 พจน์) กับวิธี EIM [6] และวิธียิงเป้า พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากจนถึงค่ามุม θ_B ประมาณ 100 องศา หลังจากนั้นการคำนวณด้วยวิธี DTM จะทำให้น้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ เริ่มลู่ออกอย่างชัดเจน ขณะเดียวกัน ผลคำนวณแบบ $\mathrm{DTM}^{(4)}(17)$ และ $\mathrm{DTM}^{(4)}(30)$ ค่าของ $\bar{\mu}$ และ θ_B มีความถูกต้องและใกล้เคียงกับวิธี EIM และวิธียิงเป้า มากกว่าการคำนวณแบบ $\mathrm{DTM}^{(3)}(17)$ แต่อย่างไรก็ตามการคำนวณวิธี DTM แบบ $\mathrm{DTM}^{(4)}(17)$ และ $\mathrm{DTM}^{(4)}(30)$ จะมีภาระในการคำนวณมากกว่าแบบ $\mathrm{DTM}^{(3)}(17)$ ซึ่งไม่เหมาะสมต่อการนำไปใช้งาน แสดงรูปที่ 4.4 ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอสมการการเสียรูปของโครงสร้าง แบบ $\mathrm{DTM}^{(3)}(17)$ ดังแสดงต่อไปนี้



รูปที่ 4.4 แสดงผลการคำนวณเปรียบเทียบระหว่างวิธี DTM แบบต่างๆ กับวิธี EIM และวิธียิงเป้า ของค่า θ_B กับ $\bar{\mu}$

สมการความสัมพันธ์ระหว่าง θ_B และ $\bar{\mu}$

$$
\begin{aligned}
&\theta_B + \left(\left(-\frac{\bar{\mu}\theta_B}{240}\right)\left(-20{\theta_B}^2 + {\theta_B}^4 + 120\right)\right) + \left(\left(\frac{\bar{\mu}^2\theta_B}{69120}\right)\left(-1920{\theta_B}^2 + 384{\theta_B}^4 - 32{\theta_B}^6 + {\theta_B}^8 + 2880\right)\right) \\
&+\left(\left(-\frac{\bar{\mu}^3\theta_B}{248832000}\right)\left(-1440000{\theta_B}^2 + 694080{\theta_B}^4 - 140160{\theta_B}^6 + 14520{\theta_B}^8 - 772{\theta_B}^{10} + 17{\theta_B}^{12} + 345600\right)\right) \\
&+\left(\left(\frac{\bar{\mu}^4\theta_B}{334430208000}\right)\left(\begin{aligned}&-2875392000{\theta_B}^2 + 2831155520{\theta_B}^4 - 1064448000{\theta_B}^6 + 211564800{\theta_B}^8 - 24698880{\theta_B}^{10} \\ &+1720320{\theta_B}^{12} - 66880{\theta_B}^{14} + 1130{\theta_B}^{16} + 8294400\end{aligned}\right)\right) \\
&+\left(\left(-\frac{\bar{\mu}^5\theta_B}{3611846246400000}\right)\left(\begin{aligned}&-3067269120000{\theta_B}^2 + 6469714944000{\theta_B}^4 - 4171862016000{\theta_B}^6 + 1367200512000{\theta_B}^8 \\ &-268967347200{\theta_B}^{10} + 33981292800{\theta_B}^{12} - 2805004800{\theta_B}^{14} + 147499440{\theta_B}^{16} \\ &-4519880{\theta_B}^{18} + 61930{\theta_B}^{20} + 995328000\end{aligned}\right)\right) \\
&+\left(\begin{aligned}&\left(\frac{\bar{\mu}^6\theta_B}{57211644542976000000}\right)\times \\ &\left(\begin{aligned}&-3306877747200000{\theta_B}^2 + 16511456378880000{\theta_B}^4 - 17592807260160000{\theta_B}^6 + 8875626347520000{\theta_B}^8 \\ &-2652527775744000{\theta_B}^{10} + 518043783168000{\theta_B}^{12} - 69244886016000{\theta_B}^{14} + 6434955388800{\theta_B}^{16} \\ &-411730656000{\theta_B}^{18} + 17406048000{\theta_B}^{20} - 440204800{\theta_B}^{22} + 5072210{\theta_B}^{24} + 119439360000\end{aligned}\right)\end{aligned}\right) \\
&+\left(\begin{aligned}&\left(-\frac{\bar{\mu}^7\theta_B}{2499004633637191680000000}\right)\times \\ &\left(\begin{aligned}&-7141183782912000000{\theta_B}^2 + 9123179871928320000{\theta_B}^4 - 15986152359198720000{\theta_B}^6 + 12020885633802240000{\theta_B}^8 \\ &-5179239325937664000{\theta_B}^{10} + 1450634747563008000{\theta_B}^{12} - 281862727962624000{\theta_B}^{14} + 39302318598681600{\theta_B}^{16} \\ &-3987535130611200{\theta_B}^{18} + 293534450467200{\theta_B}^{20} - 15346400666880{\theta_B}^{22} + 542582879280{\theta_B}^{24} - 11680544680{\theta_B}^{26} \\ &+116104010{\theta_B}^{28} + 2866544640000\end{aligned}\right)\end{aligned}\right) \\
&+\left(\begin{aligned}&\left(\frac{\bar{\mu}^8\theta_B}{719713334487511203840000000}\right)\times \\ &\left(\begin{aligned}&-77122434288844800000{\theta_B}^2 + 263519274767745024000000{\theta_B}^4 - 777181732789026816000000{\theta_B}^6 \\ &+859320445577527296000000{\theta_B}^8 - 518304721156492492800000{\theta_B}^{10} + 199570206516314112000000{\theta_B}^{12} \\ &-53229733208211456000000{\theta_B}^{14} + 10300236690101022720000{\theta_B}^{16} - 1484035249913856000000{\theta_B}^{18} \\ &+161126565838848000000{\theta_B}^{20} - 13188460388530176000{\theta_B}^{22} + 804376340542080000{\theta_B}^{24} \\ &-35565860147712000{\theta_B}^{26} + 1080705573888000{\theta_B}^{28} - 20250733433600{\theta_B}^{30} + 176971395700{\theta_B}^{32} \\ &+343985356800000\end{aligned}\right)\end{aligned}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

สมการมุมลาดเอียง

$$
\begin{aligned}
\theta(\bar{s}) &= \theta_B + \left(\left(-\frac{\bar{\mu}\theta_B}{240}\right)\left(-20\theta_B{}^2+\theta_B{}^4+120\right)\right)\bar{s}^{\,2} + \left(\left(\frac{\bar{\mu}^2\theta_B}{69120}\right)\left(-1920\theta_B{}^2+384\theta_B{}^4-32\theta_B{}^6+\theta_B{}^8+2880\right)\right)\bar{s}^{\,4} \\
&+\left(\left(-\frac{\bar{\mu}^3\theta_B}{248832000}\right)\left(-1440000\theta_B{}^2+694080\theta_B{}^4-140160\theta_B{}^6+14520\theta_B{}^8-772\theta_B{}^{10}+17\theta_B{}^{12}+345600\right)\right)\bar{s}^{\,6} \\
&+\left(\left(\frac{\bar{\mu}^4\theta_B}{334430208000}\right)\begin{pmatrix}-2875392000\theta_B{}^2+2831155520\theta_B{}^4-1064448800\theta_B{}^6+211564480\theta_B{}^8-24698888\theta_B{}^{10}\\+1720320\theta_B{}^{12}-6688\theta_B{}^{14}+113\theta_B{}^{16}+8294400\end{pmatrix}\right)\bar{s}^{\,8} \\
&+\left(\left(-\frac{\bar{\mu}^5\theta_B}{3611846246400000}\right)\begin{pmatrix}-3067269120000\theta_B{}^2+6469714944000\theta_B{}^4-4171862016000\theta_B{}^6+1367200512000\theta_B{}^8\\-268967347720\theta_B{}^{10}+33981292800\theta_B{}^{12}-2805004800\theta_B{}^{14}+147499440\theta_B{}^{16}\\-4519880\theta_B{}^{18}+61930\theta_B{}^{20}+995328000\end{pmatrix}\right)\bar{s}^{\,10} \\
&+\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\bar{\mu}^6\theta_B}{57211644542976000000}\right)\times\\ \begin{pmatrix}-33068777472000000\theta_B{}^2+16511456378880000\theta_B{}^4-1759280726016000\theta_B{}^6+887562634752000\theta_B{}^8\\-265252777574400\theta_B{}^{10}+51804378316800\theta_B{}^{12}-6924488601600\theta_B{}^{14}+643495538880\theta_B{}^{16}\\-41173065600\theta_B{}^{18}+1740604800\theta_B{}^{20}-44020480\theta_B{}^{22}+507221\theta_B{}^{24}+119439360000\end{pmatrix}\end{pmatrix}\bar{s}^{\,12} \\
&+\begin{pmatrix}\left(-\dfrac{\bar{\mu}^7\theta_B}{24990046336371916800000}\right)\times\\ \begin{pmatrix}-714118378291200000\theta_B{}^2+912317987192832000\theta_B{}^4-159861523591987200000\theta_B{}^6\\+120208856338022400000\theta_B{}^8-517923932593766400\theta_B{}^{10}+145063474756300800\theta_B{}^{12}\\-28186272796262400\theta_B{}^{14}+3930231859868160\theta_B{}^{16}-398753513061120\theta_B{}^{18}\\+29353445046720\theta_B{}^{20}-1534640066688\theta_B{}^{22}+54258287928\theta_B{}^{24}-1168054468\theta_B{}^{26}\\+11610401\theta_B{}^{28}+2866544640000\end{pmatrix}\end{pmatrix}\bar{s}^{\,14} \\
&+\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\bar{\mu}^8\theta_B}{71971333448751120384000000000}\right)\times\\ \begin{pmatrix}-7712243428884480000000\theta_B{}^2+26351927476774502400000\theta_B{}^4-7771817327890268160000\theta_B{}^6\\+8593204455775272960000\theta_B{}^8-5183047211564924928000\theta_B{}^{10}+1995702065163141120000\theta_B{}^{12}\\-532297332082114560000\theta_B{}^{14}+103002366901010227200\theta_B{}^{16}-14840352499138560000\theta_B{}^{18}\\+1611265658388480000\theta_B{}^{20}-131884603885301760\theta_B{}^{22}+8043763405420800\theta_B{}^{24}\\-355658601477120\theta_B{}^{26}+10807055738880\theta_B{}^{28}-202507334336\theta_B{}^{30}+1769713957\theta_B{}^{32}\\+343985356800000\end{pmatrix}\end{pmatrix}\bar{s}^{\,16}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

2) การศึกษาระยะโก่งตัว

ระยะการโก่งตัวในการศึกษานี้หมายถึงระยะการเคลื่อนตัวของตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างหลังจากเกิดการเสียรูปแล้ว ซึ่งจะพิจารณาในแนวพิกัด X-Y จากรูปที่ 2.3 (ก) ได้กำหนดให้ทิศทางของแนวแกน X อยู่ในแนวดิ่ง และทิศทางของแนวแกน Y อยู่ในแนวราบ จุดเริ่มต้นในการพิจารณาระยะโก่งตัวอยู่ที่ปลายเสาอิสระ เช่นเดียวกับการพิจารณามุมลาดเอียง จากสมการเงื่อนไขขอบเขต

ของโครงสร้าง สมการที่ (2.18), (2.19) พัฒนาระบบสมการด้วยวิธี DTM จนกระทั่งได้สมการที่ (3.99), (3.100) ตามลำดับ โดยสมการที่ (3.99) อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของตัวแปรระหว่าง C_3, C_4 และ $\bar{\mu}$ ในลักษณะเดียวกันสมการที่ (3.100) อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของตัวแปรระหว่าง C_3, C_5 และ $\bar{\mu}$ จากการศึกษาในหัวข้อมุมลาดเอียงที่ผ่านมาโดยใช้สมการที่ (3.98) จะพบว่าสมการที่ (3.100) มีเพียงตัวแปร C_5 ที่เพิ่มขึ้นมา และตัวแปร C_5 คือ ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B หรือค่า $\bar{y}_B$ จึงกำหนดให้ C_5 เป็นตัวแปรตาม โดยมี $C_3, \bar{\mu}$ เป็นตัวแปรต้น ซึ่งในขณะนี้สามารถคำนวณได้แล้วจากในหัวข้อที่ผ่านมา นำค่า $C_3, \bar{\mu}$ ที่สนใจและมีความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกัน เช่น $\bar{\mu} = 2.624457125$ สอดคล้องกับ $C_3 = -0.6981317$ เรเดียน ในกรณี $\theta_B = 40^\circ$ แทนลงในสมการที่ (3.100) จะได้

$$-0.42226593693404363 + C_5 = 0 \tag{4.13}$$

ดังนั้น

$$C_5 = 0.42226593693404363 \tag{4.14}$$

คำตอบที่ได้มีความหมายว่า ปลายเสาอิสระ B จะเคลื่อนในทิศทางเดียวกันกับที่ได้กำหนดแนวแกนพิกัดไว้ อย่างไรก็ตามการคำนวณค่า C_5 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่า C_3 โดยตรง ดังแสดงในสมการที่ (3.98) และ (3.100) จากลักษณะของโครงสร้างในรูปที่ 2.4 ค่า y มีโอกาสเป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ดังนั้นการพิจารณาค่า $\bar{y}_B$ ในสมการที่ (3.100) จึงเป็นไปได้ทั้งสองกรณี

และเมื่อนำค่า $\bar{\mu} = 2.624457125$, $C_3 = -0.6981317$ เรเดียน และค่าการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ในทิศทางแกน Y คือ $C_5 = 0.42226593693404363$ แทนในสมการที่ (3.103) จะได้สมการระยะการเคลื่อนตัวในทิศทางแกน Y ที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ ตลอดความยาว L สำหรับกรณี $\theta_B = 40^\circ$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{y}(\bar{s}) = {} & 0.42226593693404363 - 0.6428035383\bar{s} + 0.2154323022\bar{s}^{3} \\ & + 0.02397689595\bar{s}^{5} - 0.02288017386\bar{s}^{7} + 0.00330992100\bar{s}^{9} \\ & + 0.001293107196\bar{s}^{11} - 0.0006670256434\bar{s}^{13} + 0.00007257455905\bar{s}^{15}\end{aligned} \tag{4.15}$$

ในทำนองเดียวกันสมการที่ (3.99) จะพบว่ามีตัวแปร C_3, C_4 และ $\bar{\mu}$ และตัวแปร C_4 คือ ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ในแนวแกนเสา จึงกำหนดให้ C_4 เป็นตัวแปรตาม โดยมี $C_3, \bar{\mu}$ เป็นตัวแปรต้น และเช่นเดียวกันค่าเหล่านี้สามารถคำนวณได้แล้วจากในหัวข้อที่ผ่านๆ มา จากนั้นนำค่า $C_3, \bar{\mu}$ ที่สนใจและมีความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกัน เช่น $\bar{\mu} = 2.624457125$ สอดคล้องกับ $C_3 = -0.6981317$ เรเดียน แทนลงในสมการที่ (3.99) จะได้

$$-0.1187085568 + C_4 = 0 \tag{4.16}$$

จะได้

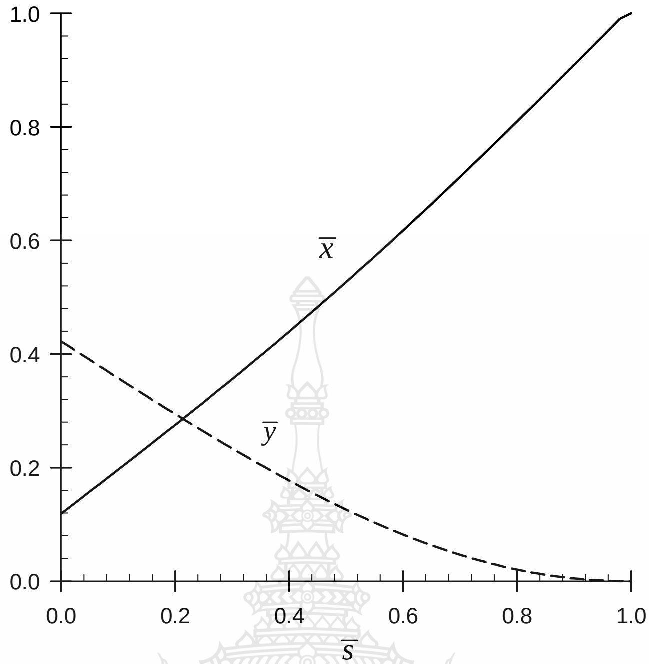
$$C_4 = 0.1187085568 \tag{4.17}$$

ซึ่งมีความหมายว่า ปลายเสา B เคลื่อนตัวไปตามทิศทางแกน X เป็นระยะ 0.1187085568 หรือค่า $\bar{x}_B = 0.1187085568$ ดังนั้นคำนวณค่า $L - x_B$ ได้จาก $L - x_B = 1 - C_4 = 0.881291443$

และเมื่อนำค่า $\bar{\mu} = 2.624457125$, $C_4 = 0.1187085568$ แทนในสมการที่ (3.102) จะได้สมการระยะการเคลื่อนตัวในทิศทางแกน X ที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ ตลอดความยาว L สำหรับกรณี $\theta_B = 40^\circ$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{s}) = \; & 0.1187085568 + 0.7662038538\bar{s} + 0.1803474618\bar{s}^{3} \\ & - 0.0719440065\bar{s}^{5} + 0.0019449418\bar{s}^{7} + 0.006683144469\bar{s}^{9} \\ & - 0.002171200601\bar{s}^{11} + 0.000094600039\bar{s}^{13} + 0.0001326481626\bar{s}^{15} \end{aligned} \tag{4.18}$$

เมื่อนำสมการที่ (4.15) , (4.18) โดยพิจารณาให้ $\bar{x}$ เป็นค่าบวกและ เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ตลอดความยาว L ที่ระยะ $\bar{s}$ ใดๆ แสดงได้ดังรูปที่ 4.5 ดังนี้



รูปที่ 4.5 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{x}(\bar{s})$ และ $\bar{y}(\bar{s})$ กรณี $\theta_B = 40^\circ$ ตลอดความยาวเสา

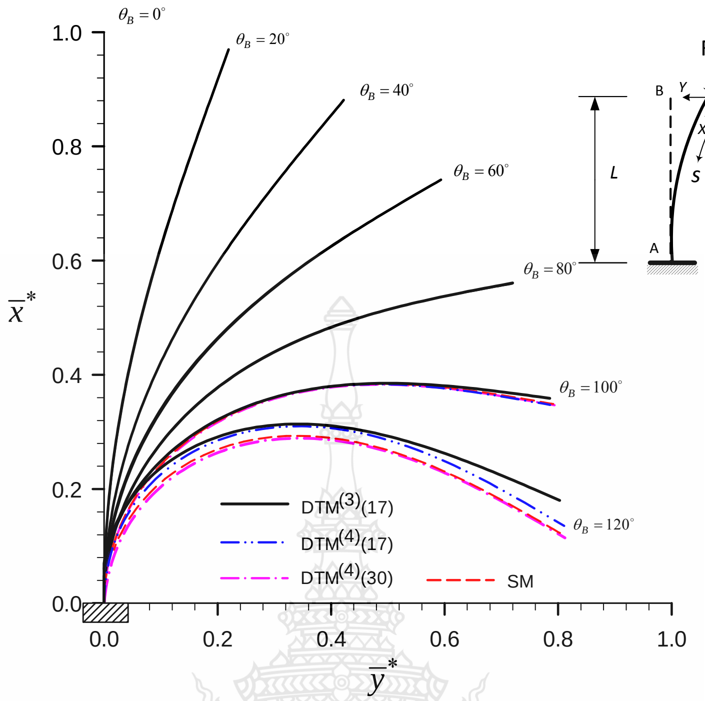
สำหรับกรณีกำหนดขนาดแรงกระทำ $\bar{\mu}$ อื่นๆ สามารถคำนวณได้ดังแสดงในตัวอย่างที่ผ่านมา สำหรับตารางที่ 4.4 ได้แสดงค่าการคำนวณระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายเสา B ในรูปของ $\frac{L-\bar{x}_B}{L}$ และ $\frac{\bar{y}_B}{L}$ เปรียบเทียบกับผลเฉลยวิธี EIM [6, 25] ในช่วง θ_B ระหว่าง 0° - 120° ผลการศึกษาพบว่าหาก $\theta_B > 120^\circ$ ค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่ายิ่งสูงขึ้น และมีลักษณะเช่นเดียวกับการคำนวณค่ามุมลาดเอียงที่ปลายเสา B (θ_B) ที่คำนวณได้ในหัวข้อที่ผ่านมา

ดังนั้นการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นในการศึกษานี้เมื่อนำผลการคำนวณ $\theta_B, \frac{L-\bar{x}_B}{L}, \frac{\bar{y}_B}{L}$ มาพิจารณาร่วมกัน พบว่ามุมลาดเอียงที่ปลายเสา B (θ_B) ไม่ควรมีค่าเกิน 120° ซึ่งจะให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องและสอดคล้องกันทุกตัวแปรที่นำมาพิจารณา

ตารางที่ 4.4 แสดงผลการคำนวณค่าระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน X และแกน Y ด้วยวิธี DTM เปรียบเทียบกับวิธี EIM

θ_B (deg.)	Vertical Deflection , $\frac{L-\bar{x}_B}{L}$		Horizontal Deflection , $\frac{\bar{y}_B}{L}$	
	EIM [6, 25]	DTM	EIM [6, 25]	DTM
0	0	0	0	0
10	-	0.992396698	-	0.110758836
20	0.970	0.969733519	0.220	0.219411481
30	-	0.932450474	-	0.323896710
40	0.881	0.881291443	0.422	0.422265936
50	-	0.817190148	-	0.512740023
60	0.741	0.741419458	0.593	0.593666105
70	-	0.655443581	-	0.663316289
80	0.56	0.560842487	0.719	0.719670336
90	-	0.460600815	-	0.760341667
100	0.349	0.358976761	0.792	0.785371938
110	-	0.263789417	-	0.796009555
120	0.123	0.180124622	0.803	0.802634793

สำหรับพฤติกรรมการเสียรูปหลังการโก่งเดาะของเสายื่นปลายอิสระที่มีแรงกระทำเป็นจุดที่ปลายตามแนวแกนเสา เมื่อกำหนดมุมที่ปลายเสา θ_B เป็น 0°, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 100°, 110° และ 120° วิเคราะห์ด้วยเทคนิควิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ หรือวิธี DTM โดยมีจำนวนพจน์ของผลรวมการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แบบทำซ้ำ และการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ที่ใช้สร้างระบบสมการ แสดงในรูปแบบ $\mathrm{DTM}^{(m)}(n_k)$ ได้ดังรูปที่ 4.6



Note : $\bar{x}^* = 1 - \bar{x}, \ \ \bar{y}^* = \bar{y}$

รูปที่ 4.6 แสดงการเคลื่อนตัวของเสายื่นปลายอิสระหลังจากการโก่งเดาะ กรณี $\theta_B = 0^\circ - 120^\circ$

จากรูปที่ 4.6 ลักษณะการเสียรูปของเสายื่นที่มีแรงกระทำที่ปลาย มีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับขนาดของแรงกระทำที่เพิ่มขึ้น หมายความว่า หลังจากเสายื่นรับแรงกระทำมากกว่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตหรือความสามารถต้านทานของเสาได้แล้ว เสาจะเกิดการโก่งตัวทั้งแนวแกน X และแกน Y เมื่อมีแรงกระทำเพิ่มขึ้นเสาจะเกิดการโก่งเดาะมากขึ้นทั้ง 2 แกนเช่นกัน ในทางทฤษฎีเสาจะสามารถเสียรูปไปได้เรื่อยๆ สำหรับในการศึกษานี้พบว่าเมื่อเพิ่มแรงกระทำจนทำให้ปลายเสามีมุมลาดเอียงมากกว่า 120° ผลที่ได้จากการคำนวณเริ่มลู่ออกจากผลทางทฤษฎี ดังนั้นแรงกระทำเป็นจุดที่ปลายเสาควรจะต้องมีค่าไม่เกิน 1.85 เท่าของน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

สมการระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน X

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(\bar{s}) = {} & \bar{x}_B + \left(1 - \frac{1}{2}\theta_B{}^2 + \frac{1}{24}\theta_B{}^4\right)\bar{s} + \left(\frac{1}{6}\bar{\mu}\theta_B{}^2 - \frac{1}{18}\bar{\mu}\theta_B{}^4 + \frac{13}{2160}\bar{\mu}\theta_B{}^6 - \frac{1}{4320}\bar{\mu}\theta_B{}^8\right)\bar{s}^3 \\
& + \left(-\frac{1}{30}\bar{\mu}^2\theta_B{}^2 + \frac{1}{36}\bar{\mu}^2\theta_B{}^4 - \frac{79}{10800}\bar{\mu}^2\theta_B{}^6 + \frac{13}{14400}\bar{\mu}^2\theta_B{}^8 - \frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2\theta_B{}^{10} + \frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2\theta_B{}^{12}\right)\bar{s}^5 \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{315}\bar{\mu}^3\theta_B{}^2 - \frac{59}{7560}\bar{\mu}^3\theta_B{}^4 + \frac{911}{226800}\bar{\mu}^3\theta_B{}^6 - \frac{109}{113400}\bar{\mu}^3\theta_B{}^8 + \frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{10} \\ & - \frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{12} + \frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{14} - \frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{16} \end{aligned}\right)\bar{s}^7 \\
& + \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{5670}\bar{\mu}^4\theta_B{}^2 + \frac{103}{68040}\bar{\mu}^4\theta_B{}^4 - \frac{2839}{2041200}\bar{\mu}^4\theta_B{}^6 + \frac{4559}{8164800}\bar{\mu}^4\theta_B{}^8 - \frac{20659}{163296000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{10} \\ & + \frac{34897}{1959552000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{12} - \frac{629}{391910400}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{14} + \frac{21379}{235146240000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{16} \\ & - \frac{1049}{352719360000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{18} + \frac{61}{1410877440000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{20} \end{aligned}\right)\bar{s}^9 \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{155925}\bar{\mu}^5\theta_B{}^2 - \frac{157}{748440}\bar{\mu}^5\theta_B{}^4 + \frac{9629}{28066500}\bar{\mu}^5\theta_B{}^6 - \frac{2621}{11975040}\bar{\mu}^5\theta_B{}^8 + \frac{412663}{5388768000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{10} \\ & - \frac{129467}{7698240000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{12} + \frac{106361}{43110144000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{14} - \frac{71177}{287400960000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{16} + \frac{218927}{12933043200000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{18} \\ & - \frac{6539}{8622028800000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{20} + \frac{9409}{465589555200000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{22} - \frac{13}{53210234880000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{24} \end{aligned}\right)\bar{s}^{11} \\
& + \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{6081075}\bar{\mu}^6\theta_B{}^2 + \frac{773}{36486450}\bar{\mu}^6\theta_B{}^4 - \frac{25813}{398034000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^6 + \frac{2251621}{35026992000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^8 \\ & - \frac{4964197}{150115680000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{10} + \frac{56753}{5388768000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{12} - \frac{57030209}{25219434240000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{14} \\ & + \frac{172543331}{504388684800000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{16} - \frac{5357579}{144111052800000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{18} + \frac{11720167}{4035109478400000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{20} \\ & - \frac{908261}{5674372704000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{22} + \frac{574661}{96842627481600000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{24} - \frac{5191}{38909984256000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{26} \\ & + \frac{547}{396174385152000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{28} \end{aligned}\right)\bar{s}^{13} \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{2}{638512875}\bar{\mu}^7\theta_B{}^2 - \frac{947}{589396500}\bar{\mu}^7\theta_B{}^4 + \frac{2250341}{229864635000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^6 \\ & - \frac{55070857}{3677834160000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^8 + \frac{5793857}{525404880000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{10} - \frac{166000603}{33949238400000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{12} \\ & + \frac{427455583}{294226732800000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{14} - \frac{1623939523}{5296081190400000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{16} + \frac{1160995169}{24443451648000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{18} \\ & - \frac{996348667}{181579926528000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{20} + \frac{1808199451}{3813178457088000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{22} \\ & - \frac{4629960653}{152527138283520000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{24} + \frac{80198477}{57197676856320000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{26} \\ & - \frac{40582733}{915162829701120000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{28} + \frac{23675711}{274548848910336000000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{30} \\ & - \frac{779}{998359450583040000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{32} \end{aligned}\right)\bar{s}^{15}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

สมการระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน Y

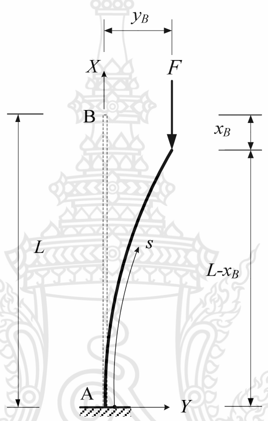
$$
\begin{aligned}
\bar{y}(\bar{s}) &= \bar{y}_B + \left(\theta_B - \frac{1}{6}\theta_B{}^3 + \frac{1}{120}\theta_B{}^5\right)\bar{s} + \left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}\theta_B + \frac{1}{9}\bar{\mu}\theta_B{}^3 - \frac{1}{45}\bar{\mu}\theta_B{}^5 + \frac{1}{540}\bar{\mu}\theta_B{}^7 - \frac{1}{17280}\bar{\mu}\theta_B{}^9\right)\bar{s}^{\,3} \\
&+\left(\frac{1}{120}\bar{\mu}^2\theta_B - \frac{5}{144}\bar{\mu}^2\theta_B{}^3 + \frac{241}{14400}\bar{\mu}^2\theta_B{}^5 - \frac{73}{21600}\bar{\mu}^2\theta_B{}^7 + \frac{121}{345600}\bar{\mu}^2\theta_B{}^9 - \frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2\theta_B{}^{11} + \frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2\theta_B{}^{13}\right)\bar{s}^{\,5} \\
&+\left(\begin{array}{l}
-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3\theta_B + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^3\theta_B{}^3 - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^3\theta_B{}^5 + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^3\theta_B{}^7 - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3\theta_B{}^9 + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{11} - \frac{1}{243000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{13} \\
+\frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{15} - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3\theta_B{}^{17}
\end{array}\right)\bar{s}^{\,7} \\
&+\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{362880}\bar{\mu}^4\theta_B - \frac{1849}{2177280}\bar{\mu}^4\theta_B{}^3 + \frac{11143}{6220800}\bar{\mu}^4\theta_B{}^5 - \frac{5389}{4665600}\bar{\mu}^4\theta_B{}^7 + \frac{197801}{522547200}\bar{\mu}^4\theta_B{}^9 \\
-\frac{389131}{5225472000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{11} + \frac{28093}{2985984000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{13} - \frac{24349}{31352832000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{15} + \frac{614581}{15049359360000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{17} \\
-\frac{112997}{90296156160000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{19} + \frac{6193}{361184624640000}\bar{\mu}^4\theta_B{}^{21}
\end{array}\right)\bar{s}^{\,9} \\
&+\left(\begin{array}{l}
-\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^5\theta_B + \frac{4153}{59875200}\bar{\mu}^5\theta_B{}^3 - \frac{103681}{299376000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^5 + \frac{60257}{163296000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^7 - \frac{21401491}{114960384000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^9 \\
+\frac{311491}{5598720000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{11} - \frac{4684279}{431101440000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{13} + \frac{834839}{574801920000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{15} - \frac{223435951}{1655429529600000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{17} \\
+\frac{4288861}{496628858880000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{19} - \frac{16483}{45148078080000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{21} + \frac{4913}{532102348800000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{23} \\
-\frac{46111}{433421549568000000}\bar{\mu}^5\theta_B{}^{25}
\end{array}\right)\bar{s}^{\,11} \\
&+\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{6227020800}\bar{\mu}^6\theta_B - \frac{149473}{37362124800}\bar{\mu}^6\theta_B{}^3 + \frac{3471971}{67931136000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^5 - \frac{33460813}{373621248000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^7 \\
+\frac{92902391}{1379524608000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^9 - \frac{44474789}{1532805120000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{11} + \frac{2498475301}{307436912640000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{13} \\
-\frac{2548671947}{1614043791360000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{15} + \frac{738454459}{3353857228800000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{17} - \frac{4944860033}{221354577100800000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{19} \\
+\frac{3397389473}{2065976052940800000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{21} - \frac{3996458507}{46484461191168000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{23} + \frac{173904769}{57211644542976000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{25} \\
-\frac{41716231}{637501182050304000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{27} + \frac{1055491}{1622730281582592000000}\bar{\mu}^6\theta_B{}^{29}
\end{array}\right)\bar{s}^{\,13} \\
&+\left(\begin{array}{l}
-\frac{1}{1307674368000}\bar{\mu}^7\theta_B + \frac{21019}{122594472000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^3 - \frac{256499}{43783740000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^5 + \frac{1016705429}{58845346560000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^7 \\
-\frac{1635140219}{85593231360000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^9 + \frac{13560875189}{1176906931200000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{11} - \frac{522153581}{117690693120000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{13} \\
+\frac{1028453651}{869100503040000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{15} - \frac{564468288029}{2465085063168000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{17} + \frac{3354752717}{101684758855680000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{19} \\
-\frac{60706081}{16947459809280000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{21} + \frac{238506589781}{813478070845440000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{23} - \frac{139648670233}{7809389480116224000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{25} \\
+\frac{23154856867}{29285210550435840000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{27} - \frac{351792179}{14642605275217920000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{29} \\
+\frac{3164177099}{70284505321046016000000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{31} - \frac{160883087}{4089280309588131840000000}\bar{\mu}^7\theta_B{}^{33}
\end{array}\right)\bar{s}^{\,15}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

4.2 บทสรุป

จากการนำเสนอวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อหาผลเฉลยของโมเดลโครงสร้างเสายื่นที่มีแรงกระทำที่ปลายด้วยวิธี DTM เริ่มต้นจากการพัฒนาสมการครอบคลุมปัญหาถูกสร้างขึ้นจากทฤษฎีคานของ Euler-Bernoulli สมการครอบคลุมปัญหาแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

1) สำหรับการศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

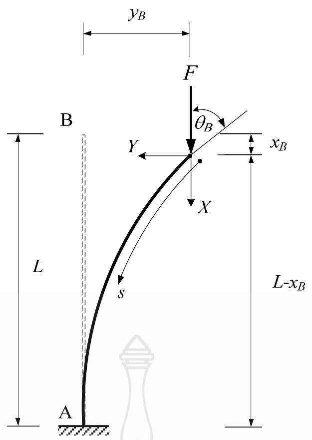
$$\frac{d^4y}{dx^4} + \mu\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{โดยมี} \quad \mu = \frac{F}{EI} \tag{4.21}$$



รูปที่ 4.7 โมเดลเสาสำหรับการศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

2) สำหรับการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{ds^2} + \mu.\frac{dy}{ds} = 0 \\ &\frac{dx}{ds} = \cos(\theta) \\ &\frac{dy}{ds} = \sin(\theta) \end{aligned}\right\} \tag{4.22 a, b, c}$$



รูปที่ 4.8 โมเดลเสาสำหรับการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

จากลักษณะปัญหาของโครงสร้างที่เป็นปัญหาขอบเขต (Boundary conditions) กล่าวคือ เป็นปัญหาที่ทราบค่าแล้ว ซึ่งในที่นี้คือ ปลายเสาทั้งสองด้านที่เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่นและปลายอิสระ ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหาจะสามารถใช้ค่าที่ทราบและไม่ทราบค่าบริเวณขอบเพื่อสร้างเงื่อนไขและระบบสมการได้

สำหรับกรณีแรก สมการที่ (4.21) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดคือ 4 และสัมพันธ์กับอันดับที่ 2 ที่มี y หรือระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน Y เป็นตัวแปร การสร้างระบบสมการจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขขอบเขต 4 เงื่อนไข เพื่อแก้ระบบสมการ สิ่งที่สำคัญลำดับต่อมาคือการเลือกจุดเริ่มต้นของปัญหา โดยการศึกษานี้ได้เลือกปลายเสาที่จุดรองรับแบบยึดแน่นเป็นจุดเริ่มต้น ซึ่งจะพบว่าตรงจุดนี้มีตัวแปร $y(0), y'(0)$ มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้พจน์ที่ k=0 ของวิธี DTM คือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และพจน์ที่ k=1 คือ $\mathrm{Y}(1)=0$ ในขณะเดียวกัน $y''(0), y'''(0)$ ไม่เป็นศูนย์ จึงสามารถกำหนดให้ $y''(0), y'''(0)$ เป็นตัวแปรที่ต้องการทราบค่าเริ่มต้นเพียง 2 ตัวแปร มีพจน์ที่ k=2 คือ $\mathrm{Y}(2)=C_1$ และพจน์ที่ k=3 คือ $\mathrm{Y}(3)=C_2$ และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.21) การสร้างพจน์ถัดไปของสมการ $\mathrm{Y}(4), \mathrm{Y}(5), \mathrm{Y}(...)$ โดยวิธี DTM จำเป็นต้องทราบพจน์ที่ k-2 ก่อนจึงทำให้สมการในพจน์ต่อๆ ไปมีความเกี่ยวเชื่อมโยงกันได้ เช่น ถ้าต้องการสร้างพจน์ที่ k=4 จะต้องทราบพจน์ที่ k-2 เป็นต้น สำหรับเงื่อนไขขอบเขต 4 เงื่อนไข พิจารณาจากปลายเสาที่จุดรองรับแบบยึดแน่นมี $y(0)=0, y'(0)=0$ ได้ 2 เงื่อนไข และอีก 2 เงื่อนไขจากปลายเสาอิสระ มี $y^{(3)}(1)=0, y^{(4)}(1)=0$ ซึ่งสองเงื่อนไขนี้ถูกนำไปใช้ในการแก้ระบบสมการ

ในกรณีที่สมมติเลือกใช้ปลายเสาอิสระเป็นจุดเริ่มต้น มีตัวแปร $y(0), y'(0)$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ และ $y''(0), y'''(0)$ มีค่าเป็นศูนย์ จึงได้พจน์ต่างๆ ของสมการในวิธี DTM ของพจน์ที่

k=0, 1, 2, 3 ดังนี้ $\mathrm{Y}(0)=C_1, \mathrm{Y}(1)=C_2, \mathrm{Y}(2)=0, \mathrm{Y}(3)=0$ และเมื่อสร้างพจน์ที่ k=4 ,5, 6, … จะทำให้ไม่สามารถสร้างระบบสมการได้

สำหรับกรณีที่สอง สมการที่ (4.22) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับ 1 และอันดับ 2 จำนวน 3 สมการ 3 ตัวแปรที่สัมพันธ์กัน ดังนี้ สมการมุมลาดเอียง (สมการที่ (4.22 a)) สัมพันธ์กับสมการระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน Y (สมการที่ (4.22 c)) และสมการระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน X (สมการที่ (4.22 b)) สัมพันธ์กับสมการที่ (4.22 a) การสร้างระบบสมการจะต้องทำควบคู่กันไป ในการศึกษานี้พิจารณาปลายเสาอิสระเป็นจุดเริ่มต้น เนื่องจากจะได้ตัวแปรที่ต้องการทราบค่าทั้ง 3 ตัวแปรพร้อมๆ กัน คือ $\theta_B, \bar{x}_B, \bar{y}_B$ เป็นตัวแปรเริ่มต้นของระบบสมการ เมื่อแปลงสมการด้วยวิธี DTM จะได้ $\Theta(0)=C_3, \mathrm{X}(0)=0, \mathrm{Y}(0)=0$ และใช้ปลายเสาที่เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่นเป็นเงื่อนไขขอบของระบบสมการจำนวน 3 เงื่อนไข คือ $\theta(\bar{s}=1)=0, \bar{x}(\bar{s}=1)=1-\bar{x}_B, \bar{y}(\bar{s}=1)=\bar{y}_B$

ผลการศึกษา พบว่า กรณีแรกต้องใช้จำนวนพจน์ของวิธี DTM จำนวน 21 พจน์ จึงให้ผลเฉลยมีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ $\varepsilon_a \leq 10^{-10}$ และได้คำตอบค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตเท่ากับ 2.46740110027246 ที่มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากที่มีค่าเท่ากับ $\dfrac{\pi^2}{4}$

สำหรับผลการศึกษาในกรณีที่สอง พบว่าต้องใช้จำนวนพจน์ของวิธี DTM จำนวน 17 พจน์ จึงให้ผลเฉลยมีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ $\varepsilon_a \leq 10^{-10}$ โดยให้คำตอบของค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตเท่ากับ 2.46740140869598 ค่ามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัวมีความสอดคล้องกับผลเฉลยวิธี EIM มาก แต่มุมลาดเอียงที่ปลายเสาอิสระ (θ_B) ต้องไม่เกิน $120°$ หรือประมาณ 1.85 เท่าของน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

การศึกษาเรื่อง พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลายโดยวิธี การแปลงเชิงอนุพันธ์ มีวัตถุประสงค์ 2 ประการ คือ 1) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดอย่างง่ายในการทำนายพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะของเสายื่น 2) เพื่อประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณก่อนและหาผลเฉลยในช่วงหลังการโก่งเดาะของเสายื่น โดยได้ทำการศึกษาเสายื่นที่มีปลายด้านหนึ่งเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่นและอีกปลายด้านหนึ่งเป็นปลายอิสระ ภายใต้แรงกระทำเป็นจุดที่ปลายเสาอิสระ การศึกษาโมเดลโครงสร้างเชิงตัวเลขอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ที่พัฒนาจากทฤษฎีการดัดของออยเลอร์-แบร์นูลลี ด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์หรือวิธี Differential Transformation Method (DTM) แบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณี คือ 1) ศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 2) ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และอันดับ 2 ร่วมกัน นำระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน และโปรแกรมสำเร็จรูปเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มาช่วยวิเคราะห์คำตอบ ผลจากการศึกษาสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการศึกษา

จากผลการวิเคราะห์หาคำตอบแบบเชิงตัวเลขของปัญหาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นนั้นสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธี DTM และสามารถสรุปตามวัตถุประสงค์หลักได้ดังนี้

5.1.1 ผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดอย่างง่ายในการทำนายพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะของเสายื่น

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่น ได้ศึกษาในตัวแปรมุมลาดเอียง $(\theta(\bar{s}))$ ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน X $(\bar{x}(\bar{s}))$ และระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน Y $(\bar{y}(\bar{s}))$ ผลการศึกษาเชิงตัวเลขชี้ให้เห็นว่าเมื่อเสายื่นเริ่มรับแรงกระทำเป็นจุดที่ปลายและได้เพิ่มแรงกระทำมากขึ้นเรื่อยๆ จนถึงขนาดแรงกระทำหนึ่งเสายื่นจะเริ่มเกิดการเสียรูปร่างทั้งเชิงมุมและเชิงระยะทางหรือเรียกพฤติกรรมนี้ว่า การเกิดการโก่งเดาะ และเมื่อได้เพิ่มขนาดแรงกระทำต่อไปอีกการเสียรูปร่างทั้งเชิงมุมและเชิงระยะทางจะเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกัน โดยที่ตัวแปรมุมลาดเอียงจะมีความสัมพันธ์

โดยตรงกับตัวแปรระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน Y สำหรับตัวแปรระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน X จะเป็นตัวแปรตามของมุมลาดเอียง การศึกษาเชิงตัวเลขด้วยวิธี DTM มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงสูงโดยเฉพาะในช่วงที่ปลายเสาอิสระมีมุมลาดเอียงที่เกิดจากแรงกระทำเป็นจุดที่ปลายไม่เกิน 120° หรือประมาณ 1.85 เท่าของน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

5.1.2 ผลการประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการคำนวณก่อนและหาผลเฉลยในช่วงหลังการโก่งเดาะของเสายื่น

การนำวิธี DTM มาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในการศึกษาปัญหาการเสียรูปร่างหรือการโก่งเดาะของเสายื่นทั้งก่อนและหลังการโก่งเดาะ การศึกษานี้แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

ช่วงก่อนการโก่งเดาะ ได้ศึกษาและแก้ระบบจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 พบว่าการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ต้องใช้จำนวนเทอมของผลรวมการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์แบบทำซ้ำด้วยจำนวนเทอมสูงสุด 21 พจน์ จึงให้ผลเฉลยของแรงกระทำที่แสดงอยู่ในรูปของตัวแปร $\bar{\mu}$ มีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณน้อยกว่า 1×10^{-10} โดยมีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นตรงประมาณร้อยละ 4.87×10^{-12}

ช่วงหลังการโก่งเดาะ ได้ศึกษาจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และอันดับ 2 ร่วมกันจำนวน 3 สมการ ที่มี 3 ตัวแปรสัมพันธ์กัน วิเคราะห์ผลคำตอบไปพร้อมๆ กัน ตัวแปร คือ $\theta(\bar{s}), \bar{x}(\bar{s}), \bar{y}(\bar{s})$ พบว่าการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ต้องใช้จำนวนเทอมสูงสุด 17 พจน์ มีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลประมาณร้อยละ 1.24×10^{-5} ผลเฉลยที่ได้จากวิธี DTM มีความสอดคล้องกับผลเฉลยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้าเป็นอย่างดี แต่อย่างไรก็ตามจากการศึกษาปัญหาเสายื่นในการศึกษานี้ แรงกระทำแบบจุดที่ปลายเสาจะต้องมีค่าไม่เกิน 1.85 เท่าของน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 จากการศึกษาในครั้งนี้พบว่าวิธี DTM สามารถนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาการแอ่นตัวมากได้ โดยเฉพาะปัญหาเสายื่น คานยื่น ที่มีจำนวนตัวแปรไม่มากนัก หากนำวิธีนี้ไปใช้ศึกษาปัญหาที่มีตัวแปรจำนวนมากอาจจำเป็นต้องใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ที่มีสมรรถนะสูงช่วยในการคำนวณ

5.2.2 การศึกษาที่น่าสนใจทำการศึกษาต่อจากการศึกษาในครั้งนี้ คือ การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะที่มีมุมลาดเอียงปลายเสามาก หรือการศึกษาการแอ่นตัวมากภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เปลี่ยนแปลงตามการเสียรูปของโครงสร้าง

บรรณานุกรม

[1] Chai, Y.H. and Wang, C.M. (2006). An Application of differential transformation to stability analysis of heavy columns. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, **6(3)**, 317-332.

[2] Lingfeng, H. and Shiyuan, W. (2013). Application of differential transform method to buckling problems at pined-pined boundary conditions. **Applied Mechanics and Materials**, **313-314**, 1155-1158.

[3] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม. (2544). **การแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบเอียงที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน**. (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี).

[4] Odibat, Z. and Momni, S. (2007). A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order. **Applied Mathematics Letters**, **21(2008)**, 194-199.

[5] Salehi, P., Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2012). Application of the differential transformation method and variational iteration method to large deformation of cantilever beams under point load. **Journal of Mechanical Science and Technology**, **26(9)**, 2879-2887.

[6] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961). **Theory of Elastic Stability**, McGraw-Hill, New York.

[7] Pukhov, G.E. (1982). Differential transforms and circuit theory. **Circuit Theory and Applications**, **10**, 265-276.

[8] Zhou, J.K. (1986). **Differential transformation and its application for electrical circuits**, Huazhong University Press, Wuhan, China.

[9] Abdel-Halim Hassan, I.H. (2008). Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. **Applied Mathematical Modelling**, **32**, 2552-2559.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[10] Pulngern, T., Sudsanguan, T., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S. (2013). Elastica of a variable-arc-length circular curved beam subjected to an end follower force. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **49(0)**, 129-136.

[11] Balkaya, M., Kaya, M.O. and Saglamer, A. (2009). Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method. **Archive of Applied Mechanics**, **79(2)**, 135-146.

[12] Shin, Y.J. and Yun, J.H. (2006). Transverse vibration of a uniform Euler-Bernoulli beam under varying axial force using differential transformation method. **Mechanical Science and Technology(KSME Int. J.**), **20(2)**, 191-196.

[13] Chapra, S.C. and Canale, R.P. (2009). **Numerical method for engineering** (6th ed). McGraw-Hill, Inc., New York.

[14] Ertürk, V.S. (2007). Application of differential transformation method to linear sixth-order boundary value problems. **Applied Mathematical Sciences**, **1(2)**, 51-58.

[15] Mirzaee, F. (2011). Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of ordinary differential equations. **Applied Mathematical Sciences**, **5(70)**, 3465-3472.

[16] Thongmoon, M. and Pusjuso S. (2010). The numerical solutions of differential transform method and the Laplace transform method for a system of differential equations. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, **4(3)**, 425-431.

[17] Biazar, J., Eslami, M. and Islam, M.R. (2010). Differential transform method for quadratic Riccati Differential Equation. **International Journal of Non-Linear Science**, **9(4)**, 444-447.

[18] Patil, N.A. and Khambayat, A. (2014). Differential transform method for system of linear differential equations. **Research Journal of Mathematical and Statistical Science**, **2(3)**, 4-6.

[19] Chen, C.L. and Liu, Y.C. (1998). Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. **Applied Mathematics and Computation**, **95**, 155-164.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[20] Yaghoobi, H. and Torabi, M. (2011). The application of differential transformation method to nonlinear equations arising in heat transfer. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, **38**, 815-820.

[21] Joneidi, A.A., Ganji, D.D. and Babaelahi, M. (2009). Differential Transformation Method to determine fin efficiency of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, **36**, 757-762.

[22] Catal, S. (2014). Buckling analysis of semi-rigid connected and partially embedded pile in elastic soil using differential transform method. **An International Journal Structural Engineering and Mechanics**, **52(5)**, 971-995.

[23] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม. (2559). การประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในการหาค่าการโก่งเดาะของเสายืดหยุ่นที่สภาพการยึดรั้งที่ปลายสามารถปรับเปลี่ยนได้. ใน **การประชุมวิชาการ NEEC21**, **28-30 มิถุนายน 2559**, **สงขลา** (น. 357-362).

[24] อนุชา สมานมิตร วราภรณ์ จาตนิล และบุญชัย ผึ้งไผ่งาม. (2558). ผลเฉลยเชิงประมาณของปัญหาการแอ่นตัวมากของคานยื่นรับน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอที่เปลี่ยนแปลงทิศทางตามการเสียรูปของคาน. ใน **การประชุมวิชาการระดับชาติ "วิทยาศาสตร์วิจัย" ครั้งที่ 7**, **30-31 มีนาคม 2558**, **มหาวิทยาลัยนเรศวร**, **พิษณุโลก**, MA-O-014.

[25] Jones, R. M. (2006). **Buckling of bars plates and shells**. Bull Ridge Publishing, Virginia.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การคำนวณฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์ของวิธี DTM

ตารางที่ ก.1 สมการแปลงเชิงอนุพันธ์

สมการที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f(x)=g(x)\mp h(x)$	$\mathrm{F}(k)=\mathrm{G}(k)\mp \mathrm{H}(k)$
2	$f(x)=\alpha g(x)$	$\mathrm{F}(k)=\alpha \mathrm{G}(k)\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=g(x)h(x)$	$\mathrm{F}(k)=\sum_{l=0}^{k}\mathrm{G}(k-l)\mathrm{H}(l)$
4	$f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=(k+1)\mathrm{G}(k+1)$
5	$f(x)=\frac{d^2}{dx^2}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=(k+1)(k+2)\mathrm{G}(k+2)$
6	$f(x)=\frac{d^n}{dx^n}g(x)$	$\mathrm{F}(k)=\frac{(k+n)!}{k!}\mathrm{G}(k+n)$
7	$f(x)=x^n$	$\mathrm{F}(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}0, & if\ k\neq n\\ 1, & if\ k=n\end{cases}$
8	$f(x)=f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)$	$\mathrm{F}(k)=\sum_{k_1=0}^{k}\mathrm{F}_1(k-k_1)\sum_{k_2=0}^{k_1}\mathrm{F}_2(k_1-k_2)\mathrm{F}_3(k_2)$

ส่วนกลับของการแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์ อาศัยสมการที่ (2.39)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{F}(k)(x)^k$$

ดังนั้น ถ้า $x=1$ จะได้ดังแสดงในตัวอย่าง เช่น

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{F}(k)(1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{F}(k) \\
f'(1) &= \sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathrm{F}(k)(x)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathrm{F}(k)(1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathrm{F}(k)
\end{aligned}$$

$$f''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\mathrm{F}(k)(x)^{k-2}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\mathrm{F}(k)(1)^{k-2}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\mathrm{F}(k)$$
$$f'''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(k-2)\mathrm{F}(k)(x)^{k-3}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(k-2)\mathrm{F}(k)(1)^{k-3}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(k-2)\mathrm{F}(k)$$

ตารางที่ ก.2 ส่วนกลับของการแปลงฟังก์ชันสมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f(x=1)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{F}(k)$
2	$f'(x=1)$	$\sum_{k=0}^{\infty}k\,\mathrm{F}(k)$
3	$f''(x=1)$	$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\mathrm{F}(k)$
4	$f'''(x=1)$	$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(k-2)\mathrm{F}(k)$

1. กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จากสมการที่ (2.22) คือสมการการเปลี่ยนแปลงระยะโก่งตัว $\bar{y}(\bar{x})$ แบบตัวแปรไร้มิติ

$$\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4}+\bar{\mu}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=0$$

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 1, 2, 6 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	พจน์ที่ 1 $f_1(x)=\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4}$	$\mathrm{F}_1(k)=\frac{(k+4)!}{k!}\bar{\mathrm{Y}}(k+4)$ $=\frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)(k)!}{(k)!}\bar{\mathrm{Y}}(k+4)$ $=(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+4)$
2	พจน์ที่ 2 $f_2(x)=\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}$	$\mathrm{F}_2(k)=\frac{(k+2)!}{k!}\bar{\mathrm{Y}}(k+2)$ $=\frac{(k+2)(k+1)(k)!}{(k)!}\bar{\mathrm{Y}}(k+2)$ $=(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2)$
3	$f_3(x)=\bar{\mu}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}$ $=\bar{\mu}\left(f_2(x)\right)$	$\mathrm{F}_3(k)=\bar{\mu}\left(\mathrm{F}_2(k)\right)$ $=\bar{\mu}\left((k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2)\right)$ $=\bar{\mu}(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2)$
4	$f_4(x)=\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4}+\bar{\mu}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}$ $=f_1(x)+f_3(x)$	$\mathrm{F}_4(k)=\mathrm{F}_1(k)+\mathrm{F}_3(k)$ $=(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+4)$ $+\bar{\mu}(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2)$

ดังนั้นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4}+\bar{\mu}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=0$$

จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์วิธี DTM คือ

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+4)+\bar{\mu}(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2)=0$$

หรือ

$$\overline{\mathrm{Y}}(k+4) = -\frac{\overline{\mu}\,\overline{\mathrm{Y}}(k+2)}{(k+4)(k+3)} \tag{ก.1}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดเริ่มต้นที่ทราบค่าแสดงในสมการที่ (2.23) - (2.24)

$$\overline{y}(\overline{x}=0)=0 \quad , \quad \overline{y}'(\overline{x}=0)=0$$

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 2, 4 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f_5(x)=\overline{y}(\overline{x}=0)=0$	$\mathrm{F}_5(k)=\overline{\mathrm{Y}}(k)=0$ $\mathrm{F}_5(0)=\overline{\mathrm{Y}}(0)=0$
2	$f_6(x)=\overline{y}'(\overline{x}=0)=0$	$\mathrm{F}_6(k)=(k+1)\,\overline{\mathrm{Y}}(k+1)=0$ $\mathrm{F}_6(0)=(0+1)\,\overline{\mathrm{Y}}(0+1)=0$ $=\overline{\mathrm{Y}}(1)=0$

ดังนั้นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์

$$\overline{y}(\overline{x}=0)=0 \quad , \quad \overline{y}'(\overline{x}=0)=0$$

จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์วิธี DTM คือ

$$\overline{\mathrm{Y}}(0)=0$$
$$\overline{\mathrm{Y}}(1)=0$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดเริ่มต้นที่ไม่ทราบค่า พิจารณาจากลักษณะของจุดรองรับ ที่จุด A มีจุดรองรับแบบยึดแน่น จะได้ $\overline{y}''(\overline{x}=0)=C_1$ และ $\overline{y}'''(\overline{x}=0)=C_2$ โดย C_1 คือ โมเมนต์ที่จุด A และ C_2 คือ แรงเฉือนที่จุด A

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 5, 6 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f_7(x) = \bar{y}''(\bar{x}=0) = C_1$	$\mathrm{F}_7(k) = (k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+2) = C_1$ $\mathrm{F}_7(0) = (2)\bar{\mathrm{Y}}(2) = C_1$ $= 2\bar{\mathrm{Y}}(2) = C_1$ $= \bar{\mathrm{Y}}(2) = \dfrac{C_1}{2}$
2	$f_8(x) = \bar{y}'''(\bar{x}=0) = C_2$	$\mathrm{F}_8(k) = (k+3)(k+2)(k+1)\bar{\mathrm{Y}}(k+3) = C_2$ $\mathrm{F}_8(0) = (3\times 2)\bar{\mathrm{Y}}(3) = C_2$ $= 6\bar{\mathrm{Y}}(3) = C_2$ $= \bar{\mathrm{Y}}(3) = \dfrac{C_2}{6}$

ดังนั้นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์

$$\bar{y}''(\bar{x}=0) = C_1 \quad , \quad \bar{y}'''(\bar{x}=0) = C_2$$

จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์วิธี DTM คือ

$$\bar{\mathrm{Y}}(2) = \frac{C_1}{2}$$
$$\bar{\mathrm{Y}}(3) = \frac{C_2}{6}$$

สำหรับพจน์ลำดับถัดไปคำนวณจากสมการ (ก.1)

เมื่อ $k = 0$ จะได้

$$\bar{\mathrm{Y}}(0+4) = -\frac{\bar{\mu}\,\bar{\mathrm{Y}}(0+2)}{(0+4)(0+3)}$$
$$\bar{\mathrm{Y}}(4) = -\frac{\bar{\mu}\,\bar{\mathrm{Y}}(2)}{(4)(3)}$$
$$= -\frac{\bar{\mu}\,\bar{\mathrm{Y}}(2)}{12}$$
$$= -\frac{\bar{\mu}}{12}\left(\frac{C_1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{24}\bar{\mu}C_1$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อ $k = 1, 2, 3,\ldots$ จะได้

$$k=1 \rightarrow \quad \bar{Y}(5) = -\frac{1}{120}\bar{\mu}C_2$$

$$k=2 \rightarrow \quad \bar{Y}(6) = \frac{1}{720}\bar{\mu}^2C_1$$

$$k=3 \rightarrow \quad \bar{Y}(7) = \frac{1}{5040}\bar{\mu}^2C_2$$

$$k=4 \rightarrow \quad \bar{Y}(8) = -\frac{1}{40320}\bar{\mu}^3C_1$$

$$k=5 \rightarrow \quad \bar{Y}(9) = -\frac{1}{362880}\bar{\mu}^3C_2$$

$$k=6 \rightarrow \quad \bar{Y}(10) = \frac{1}{3628800}\bar{\mu}^4C_1$$

$$k=7 \rightarrow \quad \bar{Y}(11) = \frac{1}{39916800}\bar{\mu}^4C_2$$

$$k=8 \rightarrow \quad \bar{Y}(12) = -\frac{1}{479001600}\bar{\mu}^5C_1$$

$$k=9 \rightarrow \quad \bar{Y}(13) = -\frac{1}{6227020800}\bar{\mu}^5C_2$$

$$k=10 \rightarrow \quad \bar{Y}(14) = \frac{1}{87178291200}\bar{\mu}^6C_1$$

$$k=11 \rightarrow \quad \bar{Y}(15) = \frac{1}{1307674368000}\bar{\mu}^6C_2$$

$$k=12 \rightarrow \quad \bar{Y}(16) = -\frac{1}{20922789888000}\bar{\mu}^7C_1$$

$$k=13 \rightarrow \quad \bar{Y}(17) = -\frac{1}{355687428096000}\bar{\mu}^7C_2$$

$$k=14 \rightarrow \quad \bar{Y}(18) = \frac{1}{6402373705728000}\bar{\mu}^8C_1$$

$$k=15 \rightarrow \quad \bar{Y}(19) = \frac{1}{121645100408832000}\bar{\mu}^8C_2$$

$$k=16 \rightarrow \quad \bar{Y}(20) = \frac{1}{2432902008176640000}\bar{\mu}^9C_1$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดปลายที่ทราบค่าแสดงในสมการที่ (2.25) - (2.26)

$$\bar{y}''(\bar{x}=1)=0$$

$$\bar{y}'''(\bar{x}=1)+\bar{\mu}.\bar{y}'(\bar{x}=1)=0$$

อาศัยตารางที่ ก.2 โดยใช้สมการที่ 3, 4 จะได้

$$\bar{y}''(\bar{x}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\bar{Y}(k)=0$$

$$\bar{y}'''(\bar{x}=1)+\bar{\mu}.\bar{y}'(\bar{x}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\bar{Y}(k)+\bar{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\bar{Y}(k)=0$$

2. กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

จากสมการที่ (2.27) - (2.29) คือสมการอัตราการเปลี่ยนแปลงเชิงมุม $\theta(\bar{s})$ สมการระยะการเคลื่อนที่ตามแนวแกน $\bar{x}(\bar{s})$ และตามแนวแกน $\bar{y}(\bar{s})$ แบบตัวแปรไร้มิติ ตามลำดับ

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2}+\bar{\mu}.\sin(\theta)=0$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}=\cos(\theta)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}=\sin(\theta)$$

จัดฟังก์ชัน $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ โดยใช้เพียง 3 พจน์แรก ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2}+\bar{\mu}(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!})=0 \tag{ก.2}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!} \tag{ก.3}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!} \tag{ก.4}$$

สำหรับสมการที่ (ก.2)

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 4, 5, 8 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	พจน์ที่ 1 $f_1(x)=\dfrac{d^2\theta}{d\bar{s}^2}$	$F_1(k)=(k+2)(k+1)\Theta(k+2)$
2	พจน์ที่ 2 $f_2(x)=\bar{\mu}\theta$	$F_2(k)=\bar{\mu}\Theta(k)$
3	พจน์ที่ 3 $f_3(x)=-\dfrac{\bar{\mu}}{3!}\theta^3$	$F_3(k)=-\dfrac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)$
4	พจน์ที่ 4 $f_4(x)=\dfrac{\bar{\mu}}{5!}\theta^5$	$F_4(k)=\dfrac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)$

สำหรับสมการที่ (ก.3)

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 4, 7, 8 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	พจน์ที่ 1 $f_5(x)=\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{s}}$	$F_5(k)=(k+1)X(k+1)$
2	พจน์ที่ 2 $f_6(x)=1$	$F_6(k)=\delta(k)$
3	พจน์ที่ 3 $f_7(x)=-\dfrac{\theta^2}{2!}$	$F_7(k)=-\dfrac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right)$
4	พจน์ที่ 4 $f_8(x)=\dfrac{\theta^4}{4!}$	$F_8(k)=\dfrac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)$

สำหรับสมการที่ (ก.4)

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 2, 8 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	พจน์ที่ 1 $f_9(x)=\frac{d\,\bar{y}}{d\,\bar{s}}$	$F_9(k)=(k+1)\,Y(k+1)$
2	พจน์ที่ 2 $f_{10}(x)=\theta$	$F_{10}(k)=\Theta(k)$
3	พจน์ที่ 3 $f_{11}(x)=-\frac{\theta^3}{3!}$	$F_{11}(k)=-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)$
4	พจน์ที่ 4 $f_{12}(x)=\frac{\theta^5}{5!}$	$F_{12}(k)=\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)$

ดังนั้นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์ สมการที่ (ก.2) (ก.3) (ก.4) จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันแปลงเชิงอนุพันธ์ตามลำดับ ดังนี้

$$\Theta(k+2)=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-\bar{\mu}.\Theta(k)+\frac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ -\frac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right] \tag{ก.5}$$

$$X(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\delta(k)-\frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right)\\ +\frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{array}\right] \tag{ก.6}$$

$$Y(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\begin{bmatrix}\Theta(k)-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ +\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{bmatrix} \tag{ก.7}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดเริ่มต้นที่ทราบค่าแสดงในสมการที่ (2.30)

$$\theta'(\bar{s}=0)=0$$

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 4 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f_{13}(x)=\theta'(\bar{s}=0)=0$	$F_{13}(k)=(k+1)\Theta(k+1)=0$ $F_{13}(0)=\Theta(1)=0$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดเริ่มต้นที่ไม่ทราบค่า พิจารณาจากลักษณะของจุดรองรับ ที่จุด B เป็นปลายเสาอิสระ จะได้ $\theta(\bar{s}=0)=C_3$, $\bar{x}(\bar{s}=0)=0$ และ $\bar{y}(\bar{s}=0)=0$ โดย C_3 คือ มุมลาดเอียงที่จุด B

อาศัยตารางที่ ก.1 โดยใช้สมการที่ 2 จะได้

ลำดับที่	ฟังก์ชันเริ่มต้น	ฟังก์ชันแปลง
1	$f_{14}(x)=\theta(\bar{s}=0)=C_3$	$F_{14}(k)=\Theta(k)$ $F_{14}(0)=\Theta(0)=C_3$
2	$f_{15}(x)=\bar{x}(\bar{s}=0)=0$	$F_{15}(k)=Y(k)$ $F_{15}(0)=Y(0)=0$
3	$f_{16}(x)=\bar{y}(\bar{s}=0)=0$	$F_{16}(k)=X(k)$ $F_{16}(0)=X(0)=0$

สำหรับพจน์ลำดับถัดไปคำนวณจากสมการ (ก.5) - (ก.7)

เมื่อ $k=0$

พจน์ของมุมลาดเอียง จะได้

$$\Theta(0+2)=\frac{1}{(0+2)(0+1)}\left[\begin{array}{l}-\bar{\mu}.\Theta(0)+\frac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ -\frac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\Theta(2) &=\frac{1}{2}\left(-\bar{\mu}C_3+\frac{\bar{\mu}}{3!}\left((C_3)^3\right)-\frac{\bar{\mu}}{5!}(C_3)^5\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(-\bar{\mu}C_3+\frac{\bar{\mu}}{6}\left((C_3)^3\right)-\frac{\bar{\mu}}{120}(C_3)^5\right)\\ &=-\frac{1}{240}\bar{\mu}C_3\left(-20C_3^{\ 2}+C_3^{\ 4}+120\right)\end{aligned}$$

พจน์ของระยะเคลื่อนตัวทางแกน X จะได้

$$\mathrm{X}(0+1)=\frac{1}{(0+1)}\left[\begin{array}{l}\delta(0)-\frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\Theta(k_1)\right)\\ +\frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(1)&=1-\frac{1}{2}\left((C_3)^2\right)+\frac{1}{24}\left((C_3)^4\right)\\ &=1-\frac{1}{2}C_3^{\ 2}+\frac{1}{24}C_3^{\ 4}\end{aligned}$$

พจน์ของระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y จะได้

$$\mathrm{Y}(0+1)=\frac{1}{(0+1)}\left[\begin{array}{l}\Theta(0)-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\+\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{0}\Theta(0-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\\left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(1)&=C_3-\frac{1}{6}(C_3)^3+\frac{1}{120}(C_3)^5\\&=C_3-\frac{1}{6}C_3^{\,3}+\frac{1}{120}C_3^{\,5}\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อ $k=1, 2, 3,\ldots$ จะได้

$$k=1\rightarrow\quad \Theta(3)=0$$

$$\mathrm{X}(2)=0$$

$$\mathrm{Y}(2)=0$$

$$k=2\rightarrow\quad \Theta(4)=\frac{1}{69120}\bar{\mu}^2C_3\left(-1920C_3^{\,2}+384C_3^{\,4}-32C_3^{\,6}+C_3^{\,8}+2880\right)$$

$$\mathrm{X}(3)=\frac{1}{6}\bar{\mu}C_3^{\,2}-\frac{1}{18}\bar{\mu}C_3^{\,4}+\frac{13}{2160}\bar{\mu}C_3^{\,6}-\frac{1}{4320}\bar{\mu}C_3^{\,8}$$

$$\mathrm{Y}(3)=-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_3+\frac{1}{9}\bar{\mu}C_3^{\,3}-\frac{1}{45}\bar{\mu}C_3^{\,5}+\frac{1}{540}\bar{\mu}C_3^{\,7}-\frac{1}{17280}\bar{\mu}C_3^{\,9}$$

$$k=3\rightarrow\quad \Theta(5)=0$$

$$\mathrm{X}(4)=0$$

$$\mathrm{Y}(4)=0$$

$$k=4\rightarrow\quad \Theta(6)=-\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^3C_3\begin{pmatrix}-1440000C_3^{\,2}+694080C_3^{\,4}-140160C_3^{\,6}\\+14520C_3^{\,8}-772C_3^{\,10}+17C_3^{\,12}+345600\end{pmatrix}$$

$$X(5)=-\frac{1}{30}\bar{\mu}^2C_3^{\,2}+\frac{1}{36}\bar{\mu}^2C_3^{\,4}-\frac{79}{10800}\bar{\mu}^2C_3^{\,6}+\frac{13}{14400}\bar{\mu}^2C_3^{\,8}-\frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2C_3^{\,10}+\frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2C_3^{\,12}$$

$$Y(5)=\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_3-\frac{5}{144}\bar{\mu}^2C_3^{\,3}+\frac{241}{14400}\bar{\mu}^2C_3^{\,5}-\frac{73}{21600}\bar{\mu}^2C_3^{\,7}+\frac{121}{345600}\bar{\mu}^2C_3^{\,9}-\frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2C_3^{\,11}+\frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2C_3^{\,13}$$

$k=5\rightarrow\quad \Theta(7)=0$

$X(6)=0$

$Y(6)=0$

$$k=6\rightarrow\quad \Theta(8)=\frac{1}{334430208000}\bar{\mu}^4C_3\begin{pmatrix}-287539200C_3^{\,2}+283115520C_3^{\,4}\\ -106444800C_3^{\,6}+21156480C_3^{\,8}\\ -2469888C_3^{\,10}+172032C_3^{\,12}\\ -6688C_3^{\,14}+113C_3^{\,16}\\ +8294400\end{pmatrix}$$

$$X(7)=\frac{1}{315}\bar{\mu}^3C_3^{\,2}-\frac{59}{7560}\bar{\mu}^3C_3^{\,4}+\frac{911}{226800}\bar{\mu}^3C_3^{\,6}-\frac{109}{113400}\bar{\mu}^3C_3^{\,8}+\frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3C_3^{\,10}-\frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3C_3^{\,12}+\frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3C_3^{\,14}-\frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3C_3^{\,16}$$

$$Y(7)=-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_3+\frac{13}{1890}\bar{\mu}^3C_3^{\,3}-\frac{32}{4725}\bar{\mu}^3C_3^{\,5}+\frac{11}{4320}\bar{\mu}^3C_3^{\,7}-\frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3C_3^{\,9}+\frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3C_3^{\,11}-\frac{1}{243000}\bar{\mu}^3C_3^{\,13}+\frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3C_3^{\,15}-\frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3C_3^{\,17}$$

$k=7\rightarrow\quad \Theta(9)=0$

$X(8)=0$

$Y(8)=0$

$$k=8 \rightarrow \quad \Theta(10) = -\frac{1}{3611846246400000}\bar{\mu}^5 C_3 \begin{pmatrix} -306726912000C_3^{\,2} \\ +646971494400C_3^{\,4} \\ -417186201600C_3^{\,6} \\ +136720051200C_3^{\,8} \\ -26896734720C_3^{\,10} \\ +3398129280C_3^{\,12} \\ -280500480C_3^{\,14} \\ +14749944C_3^{\,16} \\ -451988C_3^{\,18} + 6193C_3^{\,20} \\ +995328000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(9) = &-\frac{1}{5670}\bar{\mu}^4 C_3^{\,2} + \frac{103}{68040}\bar{\mu}^4 C_3^{\,4} - \frac{2839}{2041200}\bar{\mu}^4 C_3^{\,6} \\ &+\frac{4559}{8164800}\bar{\mu}^4 C_3^{\,8} - \frac{20659}{163296000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,10} + \frac{34897}{1959552000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,12} \\ &-\frac{629}{391910400}\bar{\mu}^4 C_3^{\,14} + \frac{21379}{235146240000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,16} \\ &-\frac{1049}{352719360000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,18} + \frac{61}{1410877440000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(9) = &\frac{1}{362880}\bar{\mu}^4 C_3 - \frac{1849}{2177280}\bar{\mu}^4 C_3^{\,3} + \frac{11143}{6220800}\bar{\mu}^4 C_3^{\,5} \\ &-\frac{5389}{4665600}\bar{\mu}^4 C_3^{\,7} + \frac{197801}{522547200}\bar{\mu}^4 C_3^{\,9} - \frac{389131}{5225472000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,11} \\ &+\frac{28093}{2985984000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,13} - \frac{24349}{31352832000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,15} \\ &+\frac{614581}{15049359360000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,17} - \frac{112997}{90296156160000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,19} \\ &+\frac{6193}{361184624640000}\bar{\mu}^4 C_3^{\,21} \end{aligned}$$

$$k=9 \rightarrow \quad \Theta(11) = 0$$

$$\mathrm{X}(10) = 0$$

$$\mathrm{Y}(10) = 0$$

$$
k=10 \rightarrow \quad \Theta(12)=\frac{1}{57211644542976000000}\bar{\mu}^{6}C_3\begin{pmatrix}
-330687774720000C_3^{2}\\
+1651145637888000C_3^{4}\\
-1759280726016000C_3^{6}\\
+887562634752000C_3^{8}\\
-265252777574400C_3^{10}\\
+51804378316800C_3^{12}\\
-6924488601600C_3^{14}\\
+643495538880C_3^{16}\\
-41173065600C_3^{18}\\
+1740604800C_3^{20}\\
-44020480C_3^{22}\\
+507221C_3^{24}+119439360000
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(11)=&\frac{1}{155925}\bar{\mu}^{5}C_3^{2}-\frac{157}{748440}\bar{\mu}^{5}C_3^{4}+\frac{9629}{28066500}\bar{\mu}^{5}C_3^{6}\\
&-\frac{2621}{11975040}\bar{\mu}^{5}C_3^{8}+\frac{412663}{5388768000}\bar{\mu}^{5}C_3^{10}\\
&-\frac{129467}{7698240000}\bar{\mu}^{5}C_3^{12}\frac{106361}{43110144000}\bar{\mu}^{5}C_3^{14}\\
&-\frac{71177}{287400960000}\bar{\mu}^{5}C_3^{16}+\frac{218927}{12933043200000}\bar{\mu}^{5}C_3^{18}\\
&-\frac{6539}{8622028800000}\bar{\mu}^{5}C_3^{20}+\frac{9409}{465589555200000}\bar{\mu}^{5}C_3^{22}\\
&-\frac{13}{53210234880000}\bar{\mu}^{5}C_3^{24}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(11)=&-\frac{1}{39916800}\bar{\mu}^{5}C_3+\frac{4153}{59875200}\bar{\mu}^{5}C_3^{3}-\frac{103681}{299376000}\bar{\mu}^{5}C_3^{5}\\
&+\frac{60257}{163296000}\bar{\mu}^{5}C_3^{7}-\frac{21401491}{114960384000}\bar{\mu}^{5}C_3^{9}\\
&+\frac{311491}{5598720000}\bar{\mu}^{5}C_3^{11}-\frac{4684279}{431101440000}\bar{\mu}^{5}C_3^{13}\\
&+\frac{834839}{574801920000}\bar{\mu}^{5}C_3^{15}-\frac{223435951}{1655429529600000}\bar{\mu}^{5}C_3^{17}\\
&+\frac{4288861}{496628858880000}\bar{\mu}^{5}C_3^{19}-\frac{16483}{45148078080000}\bar{\mu}^{5}C_3^{21}\\
&+\frac{4913}{532102348800000}\bar{\mu}^{5}C_3^{23}-\frac{46111}{433421549568000000}\bar{\mu}^{5}C_3^{25}
\end{aligned}
$$

$$k=11\rightarrow\quad \Theta(13)=0$$

$$X(12)=0$$

$$Y(12)=0$$

$$k=12\rightarrow\quad \Theta(14)=-\frac{1}{24990046336371916800000}\bar{\mu}^{7}C_3\left(\begin{array}{l}-71411837829120000{C_3}^{2}\\+912317987192832000{C_3}^{4}\\-1598615235919872000{C_3}^{6}\\+1202088563380224000{C_3}^{8}\\-517923932593766400{C_3}^{10}\\+145063474756300800{C_3}^{12}\\-28186272796262400{C_3}^{14}\\+3930231859868160{C_3}^{16}\\-398753513061120{C_3}^{18}\\+29353445046720{C_3}^{20}\\-1534640066688{C_3}^{22}\\+54258287928{C_3}^{24}\\-1168054468{C_3}^{26}\\+11610401{C_3}^{28}+2866544640000\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}X(13)=&-\frac{1}{6081075}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{2}+\frac{773}{36486450}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{4}-\frac{25813}{398034000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{6}\\&+\frac{2251621}{35026992000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{8}-\frac{4964197}{150115680000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{10}+\frac{56753}{5388768000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{12}\\&-\frac{57030209}{25219434240000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{14}+\frac{172543331}{504388684800000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{16}\\&-\frac{5357579}{144111052800000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{18}+\frac{11720167}{4035109478400000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{20}\\&-\frac{908261}{5674372704000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{22}+\frac{574661}{96842627481600000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{24}\\&-\frac{5191}{38909984256000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{26}+\frac{547}{396174385152000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{28}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(13) = {} & \frac{1}{6227020800}\bar{\mu}^{6}C_3 - \frac{149473}{37362124800}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{3} + \frac{3471971}{67931136000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{5} \\ & - \frac{33460813}{373621248000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{7} + \frac{92902391}{1379524608000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{9} \\ & - \frac{44474789}{1532805120000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{11} + \frac{2498475301}{307436912640000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{13} \\ & - \frac{2548671947}{1614043791360000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{15} + \frac{738454459}{3353857228800000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{17} \\ & - \frac{4944860033}{221354577100800000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{19} + \frac{3397389473}{2065976052940800000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{21} \\ & - \frac{3996458507}{46484461191168000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{23} + \frac{173904769}{57211644542976000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{25} \\ & - \frac{41716231}{637501182050304000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{27} + \frac{1055491}{16227302815825920000000}\bar{\mu}^{6}{C_3}^{29}\end{aligned}$$

$$k = 13 \rightarrow \quad \Theta(15) = 0$$

$$\mathrm{X}(14) = 0$$

$$\mathrm{Y}(14) = 0$$

$$k = 14 \rightarrow \quad \Theta(16) = \frac{1}{7197133344875112038400000000}\bar{\mu}^{8}C_3 \begin{pmatrix} -7712243428884480000{C_3}^{2} \\ +26351927476774502400000{C_3}^{4} \\ -77718173278902681600000{C_3}^{6} \\ +85932044557752729600000{C_3}^{8} \\ -51830472115649249280000{C_3}^{10} \\ +19957020651631411200000{C_3}^{12} \\ -5322973320821145600000{C_3}^{14} \\ +1030023669010102272000{C_3}^{16} \\ -148403524991385600000{C_3}^{18} \\ +16112656583884800000{C_3}^{20} \\ -1318846038853017600{C_3}^{22} \\ +80437634054208000{C_3}^{24} \\ -3556586014771200{C_3}^{26} \\ +108070557388800{C_3}^{28} \\ -2025073343360{C_3}^{30} \\ +17697139570{C_3}^{32} \\ +343985356800000 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(15) = {} & \frac{2}{638512875}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,2} - \frac{947}{589396500}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,4} + \frac{2250341}{229864635000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,6} \\
& - \frac{55070857}{3677834160000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,8} + \frac{5793857}{525404880000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,10} \\
& - \frac{166000603}{33949238400000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,12} + \frac{427455583}{294226732800000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,14} \\
& - \frac{1623939523}{5296081190400000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,16} + \frac{1160995169}{24443451648000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,18} \\
& - \frac{996348667}{181579926528000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,20} + \frac{1808199451}{3813178457088000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,22} \\
& - \frac{4629960653}{152527138283520000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,24} + \frac{80198477}{5719767685632000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,26} \\
& - \frac{40582733}{915162829701120000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,28} + \frac{23675711}{27454884891033600000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,30} \\
& - \frac{779}{998359450583040000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(15) = {} & -\frac{1}{1307674368000}\bar{\mu}^{7} C_3 + \frac{21019}{122594472000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,3} - \frac{256499}{43783740000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,5} \\
& + \frac{1016705429}{58845346560000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,7} - \frac{1635140219}{85593231360000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,9} \\
& + \frac{13560875189}{1176906931200000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,11} - \frac{522153581}{117690693120000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,13} \\
& + \frac{1028453651}{869100503040000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,15} - \frac{564468288029}{2465085063168000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,17} \\
& + \frac{3354752717}{101684758855680000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,19} - \frac{60706081}{16947459809280000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,21} \\
& + \frac{238506589781}{813478070845440000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,23} - \frac{139648670233}{7809389480116224000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,25} \\
& + \frac{23154856867}{29285210550435840000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,27} - \frac{351792179}{14642605275217920000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,29} \\
& + \frac{3164177099}{702845053210460160000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,31} \\
& - \frac{160883087}{408928030958813184000000000}\bar{\mu}^{7} C_3^{\,33}
\end{aligned}
$$

$k = 15 \rightarrow \quad \Theta(17) = 0$

$\mathrm{X}(16) = 0$

$\mathrm{Y}(16) = 0$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จุดปลายที่ทราบค่าแสดงในสมการที่ (2.31) - (2.33)

$\theta(\overline{s}=1)=0$

$\overline{x}(\overline{s}=1)=1-\overline{x}_B;$

$\overline{y}(\overline{s}=1)=\overline{y}_B$

อาศัยตารางที่ ก.2 โดยใช้สมการที่ 1 จะได้

$$\theta(\overline{s}=1)=0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)=0$$

$$\overline{x}(\overline{s}=1)=1-\overline{x}_B \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{X}(k)=1-\overline{x}_B$$

$$\overline{y}(\overline{s}=1)=\overline{y}_B \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Y}(k)=\overline{y}_B$$

ภาคผนวก ข

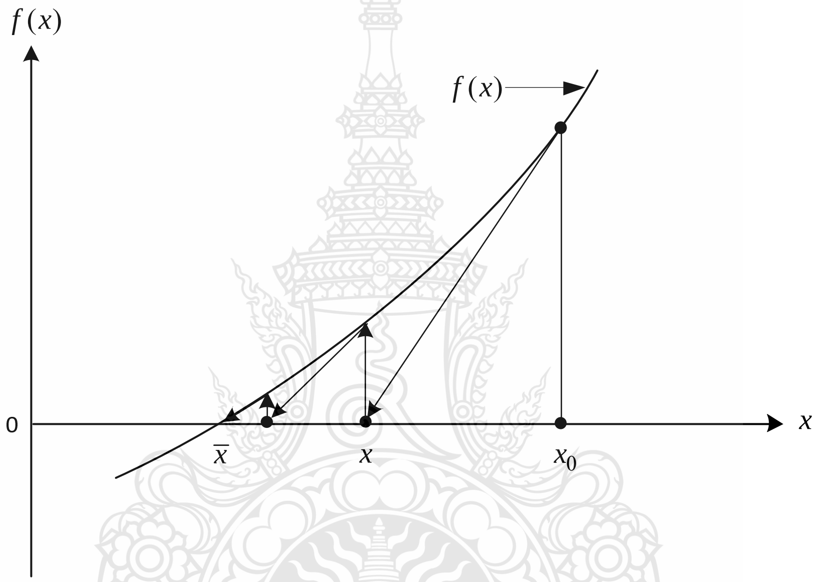
การคำนวณค่ารากสมการด้วยระเบียบวิธีของ Newton-Raphson

พื้นฐานความเข้าใจในอนุกรมเทย์เลอร์ได้ถูกนำมาใช้ในระเบียบวิธีของ Newton-Raphson เพื่อหารากของสมการ $f(\mathrm{x})=0$ โดยใช้การประมาณฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ที่ประกอบด้วยพจน์เพียง 2 พจน์ คือ

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0) = 0 \qquad (ข.\ 1)$$

$$(x-x_0)f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$(x-x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (ข.2)$$



หลักการของระเบียบวิธี Newton-Raphson เริ่มจากการกำหนดค่าเริ่มต้น x_0 แล้วทำการคำนวณค่าของฟังก์ชัน $f(x_0)$ และค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x_0)$ ที่ตำแหน่ง x_0 จากนั้นนำค่าแทนลงในสมการ (ข. 2) ก่อให้เกิดค่า x ณ ตำแหน่งใหม่ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ราก $\bar{x}$ มากขึ้น จากนั้นก็ใช้วิธีการทำซ้ำเพื่อหาค่า x ต่างๆ ที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำนี้จะลู่เข้าหาราก $\bar{x}$ ที่แท้จริง

หากกำหนดให้ Δx แทนความแตกต่างระหว่างค่า x ใหม่กับค่า x เก่า จึงเขียนได้ว่า

$$\Delta x = x-x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้คำนวณโดยวิธีการทำซ้ำ โดยประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้ คือ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> คำนวณค่าของฟังก์ชันและค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นที่ตำแหน่ง x เก่า แล้วคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์จาก

$$\Delta x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{ข. 3}$$

โดยที่ *k, k+1* แทนการทำซ้ำครั้งที่ *k* และ *k+1* ตามลำดับ

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณหาตำแหน่ง x ใหม่จาก

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้นั้นลู่เข้าถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้แล้วหรือไม่ ค่าของเกณฑ์การลู่เข้าที่ยอมรับได้อาจอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

(ก) $$\left|\Delta x_{k+1}\right| < \varepsilon_1$$

โดย ε_1 แทนค่าความผิดพลาดสมบูรณ์ (absolute error) หรือ

(ข) $$\left|\frac{\Delta x_{k+1}}{x_{k+1}}\right| < \varepsilon_2$$

โดย ε_2 แทนค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ (relative error) หรือ

(ค) $$\left|\frac{\Delta x_{k+1}}{x_{k+1}}\right| \times 100\% < \varepsilon_3$$

โดย ε_3 แทนค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ร้อยละ (percentage relative error)

หากค่าของผลลัพธ์ที่ได้มีค่ายังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ให้ย้อนกลับไปยังขั้นตอนที่ 1 เพื่อทำซ้ำใหม่

สำหรับรายละเอียดของระเบียบวิธี Newton-Raphson สามารถศึกษาได้จาก ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม., 2546.

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Maple)

1) กรณีศึกษาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จากสมการที่ (3.1 b) $\bar{Y}(k+4) = -\dfrac{\bar{\mu}\,\bar{Y}(k+2)}{(k+4)(k+3)}$

ตัวอย่าง Source Code in Maple

```
restart :
with(LinearAlgebra) :
EQ31b := proc(nk)     # nk = Number of term in DTM
        local str, s1, s2;
        local Start_K, Max_Eq, GenY, BC1, BC2, BC21, BC22, R1, R2, Ans;
        local a, k, temp;
        local μ, C1, C2, BL;
    Digits := 17;
    Y := Array(1 ..100, fill = 0);
    Start_K := 0;
    Max_Eq := nk − 5;

    #---------- setup initial conditions -----------
    Y(1) := 0;
    Y(2) := 0;
    Y(3) := C1/2;
    Y(4) := C2/6;
    for k from Start_K to Max_Eq do
        temp := 0;
        a := 1/((k + 4)·(k + 3));
        temp := -(μ·Y(k + 2 + 1));
        Y(k + 4 + 1) := simplify(a·(temp));
    end do;
    #---------- show DTM eq. in each term ----------
    for k from 1 to Max_Eq + 5 do
        str := simplify(Y(k));
        printf("-- %a --\n", k − 1);
        printf("%a\n", str);
        printf("\n");
    end do;
```

```
GenY := 0;
BC1 := 0;
BC2 := 0;
BC21 := 0;
BC22 := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 5 do
    GenY := GenY + (Y(k)·x^(k-1));
    BC1  := BC1 + ((k-1)·(k-2)·Y(k));
    BC21  := BC21 + ((k-1)·(k-2)·(k-3)· Y(k));
    BC22  := BC22 + ((k-1)·Y(k));
 end do;
 BC2 := BC21 + (μ·BC22);

 temp := BC1;
 Ans := %;
 s1 := Ans;
 temp := BC2;
 Ans := %;
 s2 := Ans;

 α1 := coeff(s1, C1) ;
 γ1 := coeff(s1, C2);
 α2 := coeff(s2, C1);
 γ2 := coeff(s2, C2);

 #---------- show results ----------
 printf("\n========== General Form of  Y(x) ==========\n");
 printf("%a\n", GenY);
 printf("========== Boundary Condition #1 (eq. 3.4) ==========\n");
 printf("%a\n", BC1);
 printf("========== Boundary Condition #2 (eq. 3.5) ==========\n");
 printf("%a\n", BC2);
 printf("\n==========   coefficial  for C1&C2    ==========\n");
 printf("α1 =\n %a\n", α1);
 printf("γ1 =\n %a\n", γ1 );
 printf("α2 =\n %a\n", α2);
 printf("γ2 =\n %a\n\n", γ2 );

 R1 := Matrix([[α1, γ1 ], [α2, γ2 ]]);
 R2 := Determinant(R1);
 BL := fsolve(R2);     #---> finding Buckling Load

end proc;
```

2) กรณีศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

จากสมการที่ (3.55 b)

$$\Theta(k+2)=\frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l}-\bar{\mu}.\Theta(k)+\frac{\bar{\mu}}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ -\frac{\bar{\mu}}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

จากสมการที่ (3.56 c)

$$X(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\delta(k)-\frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right)\\ +\frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

จากสมการที่ (3.57 c)

$$Y(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\Theta(k)-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ +\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

ตัวอย่างคำสั่งสำหรับการคำนวณวิธี DTM โดยใช้ Maple

1. โปรแกรมสมการที่ 3.55 b

```
restart:
EQ_3_55_b := proc(nk)     # nk = Number of term in DTM

    local μ, C3;                    #----> finding variable
    local str, sol, Gen_Ceta;       #----> general variable
    local Start_K, Max_Eq, BC3, R1, Ans;
    local k1, k2, k3, k4, k;
    local a, term1, term2, term3;
    local temp1, temp2, temp3, temp4, temp5, temp6, temp7, temp8, temp9;

    Digits := 17;
    θ := Array(1..100, fill = 0);
    Start_K := 0;
    Max_Eq := nk − 2;

    #---------- setup initial conditions ----------
    θ(1) := C3;   #------> cetaB;
    θ(2) := 0;

    for k from Start_K to Max_Eq do
      term1 := 0;
      term2 := 0;
      term3 := 0;
      a := 1/((k + 2)·(k + 1));
      term1 := θ(k + 1);
      temp5 := 0;
      for k1 from 0 to k do
        temp1 := θ(k − k1 + 1);
        temp4 := 0;
        for k2 from 0 to k1 do
          temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
          temp3 := θ(k2 + 1);
          temp4 := temp4 + (temp2·temp3);
        end do;
        temp5 := temp5 + (temp1·temp4);
      end do;
      term2 := −(1/6)·temp5;
```

```
temp9 := 0;
for k1 from 0 to k do
    temp1 := θ(k − k1 + 1);
    temp8 := 0;
    for k2 from 0 to k1 do
        temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
        temp7 := 0;
        for k3 from 0 to k2 do
            temp3 := θ(k2 − k3 + 1);
            temp6 := 0;
            for k4 from 0 to k3 do
                temp5 := θ(k3 − k4 + 1);
                temp4 := θ(k4 + 1);
                temp6 := temp6 + (temp5·temp4);
            end do;
            temp7 := temp7 + (temp6·temp3);
        end do;
        temp8 := temp8 + (temp7·temp2);
    end do;
    temp9 := temp9 + (temp8·temp1);
end do;
term3 := (1/120)·temp9;

θ(k + 2 + 1) := simplify(−μ·a·(term1 + term2 + term3));

end do;

#---------- make general form equation with s-power ----------
Gen_Ceta := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    Gen_Ceta := Gen_Ceta + (θ(k)·s^(k − 1));
end do;

#---------- make BC ----------
BC3 := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    BC3 := BC3 + (θ(k));
end do;
```

```
#========== show result ==========

 #---------- show DTM eq. in each term ----------
 for k from 1 to Max_Eq + 2 do
       str := simplify(θ(k));
       printf("----- term #%a -----\n", k − 1);
       printf("ceta =  %a\n", str);
       printf("\n");
 end do;

#---------- show general form of ceta ----------
printf("General ceta form =   %a\n", Gen_Ceta);
printf("\n");

#       assign(μ = xxx);
        assign(C3 = 0.001);
        R1 := BC3;
        Ans := %;
        sol := fsolve({Ans = 0}, μ);   #-----> finding Buckling Load

end proc;
```

2. โปรแกรมสมการที่ 3.56 c

```
restart :
EQ_3_56_c := proc(nk)     # nk = Number of term in DTM

    local μ, C3, C4;                    #----> finding variable
    local str, sol, Gen_X;              #----> general variable
    local Start_K, Max_Eq, BC4, R1, Ans;
    local k1, k2, k3, k4, k;
    local a, term1, term2, term3;
    local temp1, temp2, temp3, temp4, temp5, temp6, temp7, temp8, temp9;

    Digits := 17;
    θ := Array(1 ..100, fill = 0);
    X := Array(1 ..100, fill = 0);
    Start_K := 0;
    Max_Eq := nk − 2;

    #---------- setup initial conditions ----------
    θ(1) := C3;   #------> cetaB;
    θ(2) := 0;
    X(1) := C4;   #------> xB;

    for k from Start_K to Max_Eq do
      term1 := 0;
      term2 := 0;
      term3 := 0;
      a := 1/((k + 2)·(k + 1));
      term1 := θ(k + 1);
      temp5 := 0;
      for k1 from 0 to k do
        temp1 := θ(k − k1 + 1);
        temp4 := 0;
        for k2 from 0 to k1 do
          temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
          temp3 := θ(k2 + 1);
          temp4 := temp4 + (temp2·temp3);
        end do;
        temp5 := temp5 + (temp1·temp4);
      end do;
      term2 := -(1/6)·temp5;
```

```
temp9 := 0;
for k1 from 0 to k do
    temp1 := θ(k − k1 + 1);
    temp8 := 0;
    for k2 from 0 to k1 do
        temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
        temp7 := 0;
        for k3 from 0 to k2 do
            temp3 := θ(k2 − k3 + 1);
            temp6 := 0;
            for k4 from 0 to k3 do
                temp5 := θ(k3 − k4 + 1);
                temp4 := θ(k4 + 1);
                temp6 := temp6 + (temp5·temp4);
            end do;
            temp7 := temp7 + (temp6·temp3);
        end do;
        temp8 := temp8 + (temp7·temp2);
    end do;
    temp9 := temp9 + (temp8·temp1);
end do;
term3 := (1/120)·temp9;

θ(k + 2 + 1) := simplify(−μ·a·(term1 + term2 + term3));

end do;

for k from Start_K to Max_Eq do
    term1 := 0;
    term2 := 0;
    term3 := 0;
    a := 1/(k + 1);

    if k = 0 then
        term1 := 1;
    else
        term1 := 0;
    end if;
```

```
temp4 := 0;
    for k1 from 0 to k do
        temp2 := θ(k − k1 + 1);
        temp3 := θ(k1 + 1);
        temp4 := temp4 + (temp2·temp3);
    end do;
term2 := -(1/2)·temp4;

temp8 := 0;
for k1 from 0 to k do
    temp1 := θ(k − k1 + 1);
    temp7 := 0;
    for k2 from 0 to k1 do
        temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
        temp6 := 0;
        for k3 from 0 to k2 do
                temp3 := θ(k2 − k3 + 1);
                temp4 := θ(k3 + 1);
                temp6 := temp6 + (temp3·temp4);
          end do;
          temp7 := temp7 + (temp6·temp2);
    end do;
    temp8 := temp8 + (temp7·temp1);
end do;
term3 := (1/24)·temp8;

X(k + 1 + 1) := simplify(a·(term1 + term2 + term3));

end do;

#---------- make general form equation with s-power ----------
Gen_X := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    Gen_X := Gen_X + (X(k)·s^(k − 1));
end do;

#---------- make BC ----------
BC4 := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    BC4 := BC4 + (X(k));
end do;
BC4 := BC4 − 1;
```

```
#========== show result ==========

#---------- show DTM eq. in each term ----------
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    printf ("----- term #%a -----\n", k - 1);
    str := simplify( X(k) );
   printf ("x =  %a\n", str);
    printf ("\n");
end do;

#---------- show general form of X ----------
printf ("General X =   %a\n", Gen_X);
printf ("\n");

assign(μ = 2.624457125);      #  for ceta=40 degree
assign( C3 = -0.6981317);     #  for ceta=40 degree
R1 := BC4;
Ans := %;
sol := fsolve( {Ans = 0}, C4);   #-----> finding XB

end proc;
```

3. โปรแกรมสมการที่ 3.57 c

```
restart :
EQ_3_57_c := proc(nk)      # nk = Number of term in DTM

    local μ, C3, C5;                    #----> finding variable
    local str, sol, Gen_Y;              #----> general variable
    local Start_K, Max_Eq, BC5, R1, Ans;
    local k1, k2, k3, k4, k;
    local a, term1, term2, term3;
    local temp1, temp2, temp3, temp4, temp5, temp6, temp7, temp8, temp9;

    Digits := 17;
    θ := Array(1 ..100, fill = 0);
    Y := Array(1 ..100, fill = 0);
    Start_K := 0;
    Max_Eq := nk − 2;

    #---------- setup initial conditions ----------
    θ(1) := C3;   #------> cetaB;
    θ(2) := 0;
    Y(1) := C5;   #------> yB;

    for k from Start_K  to Max_Eq do
      term1 := 0;
      term2 := 0;
      term3 := 0;
      a := 1/((k + 2)·(k + 1));
      term1 := θ(k + 1);
      temp5 := 0;
      for k1 from 0 to k do
         temp1 := θ(k − k1 + 1);
         temp4 := 0;
         for k2 from 0 to k1 do
            temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
            temp3 := θ(k2 + 1);
            temp4 := temp4 + (temp2·temp3);
         end do;
         temp5 := temp5 + (temp1·temp4);
      end do;
      term2 := −(1/6)·temp5;
```

```
temp9 := 0;
for k1 from 0 to k do
    temp1 := θ(k − k1 + 1);
    temp8 := 0;
    for k2 from 0 to k1 do
        temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
        temp7 := 0;
        for k3 from 0 to k2 do
            temp3 := θ(k2 − k3 + 1);
            temp6 := 0;
            for k4 from 0 to k3 do
                temp5 := θ(k3 − k4 + 1);
                temp4 := θ(k4 + 1);
                temp6 := temp6 + (temp5·temp4);
            end do;
            temp7 := temp7 + (temp6·temp3);
        end do;
        temp8 := temp8 + (temp7·temp2);
    end do;
    temp9 := temp9 + (temp8·temp1);
end do;
term3 := (1/120)·temp9;

θ(k + 2 + 1) := simplify(−μ·a·(term1 + term2 + term3));

end do;

for k from Start_K to Max_Eq do
    term1 := 0;
    term2 := 0;
    term3 := 0;
    a := 1/(k + 1);

    term1 := θ(k + 1);
    temp5 := 0;
    for k1 from 0 to k do
        temp1 := θ(k − k1 + 1);
        temp4 := 0;
```

```
    for k2 from 0 to k1 do
      temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
      temp3 := θ(k2 + 1);
      temp4 := temp4 + (temp2·temp3);
    end do;
    temp5 := temp5 + (temp1·temp4);
  end do;
  term2 := -(1/6)·temp5;

  temp9 := 0;
  for k1 from 0 to k do
    temp1 := θ(k − k1 + 1);
    temp8 := 0;
    for k2 from 0 to k1 do
      temp2 := θ(k1 − k2 + 1);
      temp7 := 0;
      for k3 from 0 to k2 do
          temp3 := θ(k2 − k3 + 1);
          temp6 := 0;
          for k4 from 0 to k3 do
            temp5 := θ(k3 − k4 + 1);
            temp4 := θ(k4 + 1);
            temp6 := temp6 + (temp5·temp4);
          end do;
          temp7 := temp7 + (temp6·temp3);
      end do;
      temp8 := temp8 + (temp7·temp2);
    end do;
    temp9 := temp9 + (temp8·temp1);
  end do;
  term3 := (1/120)·temp9;

  Y(k + 1 + 1) := simplify(a·(term1 + term2 + term3));

end do;

#---------- make general form equation with s-power ----------
Gen_Y := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
  Gen_Y := Gen_Y + (Y(k)·s^(k − 1));
end do;
```

```
#---------- make BC ----------
BC5 := 0;
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
   BC5 := BC5 + (Y(k)) ;
end do;

#========== show result ==========

#---------- show DTM eq. in each term ----------
for k from 1 to Max_Eq + 2 do
    printf("----- term #%a -----\n", k − 1);
    str := simplify(Y(k));
   printf("y =  %a\n", str);
    printf("\n");
end do;

#---------- show general form of Y ----------
printf("General Y =   %a\n", Gen_Y);
printf("\n");

assign(μ = 2.624457125);      # for ceta=40 degree
assign(C3 = −0.6981317);      # for ceta=40 degree
R1 := BC5;
Ans := %;
sol := fsolve({Ans = 0}, C5);   #-----> finding YB

end proc;
```

ภาคผนวก ง

ผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ตารางที่ ง.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}$ กับ θ สำหรับแรงกระทำ $\bar{\mu} = 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5$ กรณีศึกษามุมลาดเอียง

$\bar{s}$	θ				
	$\bar{\mu} = 2.5$	$\bar{\mu} = 3.0$	$\bar{\mu} = 3.5$	$\bar{\mu} = 4.0$	$\bar{\mu} = 4.5$
0	0.323591	1.226114	1.614012	1.873329	2.070111
0.025	0.323343	1.225231	1.612913	1.872117	2.068833
0.050	0.322598	1.222582	1.609617	1.868479	2.064999
0.075	0.321358	1.218169	1.604123	1.862413	2.058605
0.100	0.319624	1.211996	1.596432	1.853916	2.049643
0.125	0.317400	1.204066	1.586542	1.842983	2.038105
0.150	0.314688	1.194384	1.574455	1.829607	2.023979
0.175	0.311492	1.182957	1.560171	1.813783	2.007251
0.200	0.307818	1.169793	1.543689	1.795501	1.987904
0.225	0.303670	1.154902	1.525012	1.774753	1.965921
0.250	0.299055	1.138296	1.504143	1.751531	1.941283
0.275	0.293980	1.119986	1.481083	1.725825	1.913967
0.300	0.288452	1.099987	1.455838	1.697628	1.883953
0.325	0.282480	1.078318	1.428414	1.666932	1.851218
0.350	0.276072	1.054995	1.398820	1.633730	1.815742
0.375	0.269238	1.030041	1.367067	1.598018	1.777502
0.400	0.261989	1.003480	1.333167	1.559795	1.736479
0.425	0.254335	0.975337	1.297139	1.519062	1.692658
0.450	0.246288	0.945642	1.259003	1.475823	1.646024
0.475	0.237860	0.914426	1.218783	1.430089	1.596568
0.500	0.229064	0.881725	1.176508	1.381874	1.544287
0.525	0.219914	0.847577	1.132212	1.331000	1.489184
0.550	0.210422	0.812023	1.085936	1.278094	1.431269
0.575	0.200604	0.775109	1.037724	1.222592	1.370564
0.600	0.190475	0.736884	0.987628	1.164740	1.307099
0.625	0.180050	0.697398	0.935706	1.104590	1.240915
0.650	0.169346	0.656709	0.882024	1.042207	1.172070

ตารางที่ ง.1 (ต่อ)

$\overline{s}$	θ				
	$\overline{\mu} = 2.5$	$\overline{\mu} = 3.0$	$\overline{\mu} = 3.5$	$\overline{\mu} = 4.0$	$\overline{\mu} = 4.5$
0.675	0.158378	0.614875	0.826654	0.977666	1.100633
0.700	0.147163	0.571959	0.769675	0.911054	1.026689
0.725	0.135720	0.52803	0.711175	0.842469	0.950340
0.750	0.124065	0.483155	0.651250	0.772023	0.871706
0.775	0.112217	0.437410	0.590000	0.699838	0.790924
0.800	0.100194	0.390870	0.527538	0.626054	0.708150
0.825	0.088014	0.343616	0.463981	0.550822	0.623558
0.850	0.075698	0.295730	0.399454	0.474307	0.537345
0.875	0.063263	0.247297	0.334091	0.396693	0.449727
0.900	0.050729	0.198403	0.268034	0.318180	0.360943
0.925	0.038116	0.149137	0.201431	0.238989	0.271259
0.950	0.025444	0.099588	0.134442	0.159368	0.180973
0.975	0.012732	0.049846	0.067238	0.079597	0.090423
1.000	0	0	0	0	0

ตารางที่ ง.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}$ กับ $\bar{x}, \bar{y}$ สำหรับมุม $\theta_B = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ กรณีศึกษาระยะโก่งตัว วิธีคำนวณ DTM แบบ DTM(3)(17)

$\bar{s}$	θ_B					
	10°		20°		30°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0.007603	0.110759	0.030268	0.219411	0.067551	0.323897
0.025	0.032224	0.106419	0.053761	0.210863	0.089204	0.311400
0.050	0.056845	0.102085	0.077259	0.202327	0.110867	0.298920
0.075	0.081469	0.097765	0.100766	0.193817	0.132550	0.286474
0.100	0.106097	0.093465	0.124286	0.185344	0.154262	0.274081
0.125	0.130729	0.089190	0.147825	0.176921	0.176014	0.261756
0.150	0.155366	0.084949	0.171386	0.168561	0.197814	0.249518
0.175	0.180011	0.080747	0.194973	0.160276	0.219673	0.237384
0.200	0.204663	0.076591	0.218591	0.152078	0.241597	0.225371
0.225	0.229323	0.072488	0.242243	0.14398	0.263597	0.213496
0.250	0.253994	0.068442	0.265933	0.135994	0.285681	0.201776
0.275	0.278675	0.064461	0.289664	0.128132	0.307854	0.190228
0.300	0.303367	0.060551	0.313440	0.120405	0.330126	0.178871
0.325	0.328072	0.056718	0.337264	0.112826	0.352501	0.167720
0.350	0.352789	0.052968	0.361138	0.105407	0.374987	0.156792
0.375	0.377519	0.049306	0.385063	0.098157	0.397588	0.146106
0.400	0.402263	0.045738	0.409044	0.091090	0.420308	0.135676
0.425	0.427021	0.042269	0.433080	0.084216	0.443153	0.125520
0.450	0.451794	0.038906	0.457174	0.077546	0.466124	0.115655
0.475	0.476582	0.035653	0.481325	0.071089	0.489224	0.106095
0.500	0.501384	0.032515	0.505536	0.064858	0.512454	0.096858
0.525	0.526201	0.029498	0.529806	0.058861	0.535817	0.087958
0.550	0.551033	0.026605	0.554135	0.053108	0.559310	0.079412
0.575	0.57588	0.023842	0.578523	0.047610	0.582934	0.071233
0.600	0.600741	0.021212	0.602968	0.042373	0.606687	0.063436
0.625	0.625617	0.018720	0.627470	0.037409	0.630566	0.056035
0.650	0.650506	0.016371	0.652027	0.032723	0.654568	0.049044

ตารางที่ ง.2 (ต่อ)

$\overline{s}$	θ_B					
	10°		20°		30°	
	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$
0.675	0.675409	0.014166	0.676637	0.028326	0.678690	0.042475
0.700	0.700324	0.012111	0.701298	0.024223	0.702925	0.036340
0.725	0.725251	0.010208	0.726007	0.020422	0.727269	0.030651
0.750	0.75019	0.008460	0.750762	0.016929	0.751715	0.025419
0.775	0.775139	0.006870	0.775559	0.013750	0.776256	0.020654
0.800	0.800098	0.005440	0.800395	0.010891	0.800885	0.016365
0.825	0.825066	0.004173	0.825266	0.008356	0.825594	0.012560
0.850	0.850042	0.003071	0.850168	0.006150	0.850373	0.009247
0.875	0.875024	0.002136	0.875097	0.004278	0.875214	0.006433
0.900	0.900013	0.001369	0.900050	0.002741	0.900107	0.004122
0.925	0.925005	0.000771	0.925021	0.001543	0.925042	0.002320
0.950	0.950002	0.000343	0.950006	0.000686	0.950010	0.001031
0.975	0.975000	0.000086	0.975001	0.000171	0.974999	0.000257
1.000	1	0	1	0	1	0

ตารางที่ ง.3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}$ กับ $\bar{x}, \bar{y}$ สำหรับมุม $\theta_B = 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ กรณีศึกษาระยะโก่งตัว วิธีคำนวณ DTM แบบ DTM(3)(17)

$\bar{s}$	θ_B					
	40°		50°		60°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0.118709	0.422266	0.182738	0.51274	0.258455	0.593666
0.025	0.137866	0.406199	0.198827	0.493591	0.271006	0.572012
0.050	0.157041	0.390153	0.214941	0.474462	0.283589	0.550377
0.075	0.176250	0.374147	0.231104	0.455375	0.296238	0.528781
0.100	0.195509	0.358201	0.247341	0.436352	0.308985	0.507244
0.125	0.214834	0.342337	0.263676	0.417413	0.321863	0.485785
0.150	0.234242	0.326574	0.280133	0.398581	0.334902	0.464425
0.175	0.253749	0.310934	0.296735	0.379876	0.348136	0.443186
0.200	0.273369	0.295436	0.313504	0.361323	0.361593	0.422090
0.225	0.293117	0.280102	0.330462	0.342943	0.375303	0.401159
0.250	0.313007	0.264953	0.347631	0.324760	0.389296	0.380418
0.275	0.333052	0.250010	0.365029	0.306797	0.403599	0.359891
0.300	0.353265	0.235295	0.382676	0.289081	0.418237	0.339605
0.325	0.373656	0.220828	0.400590	0.271634	0.433237	0.319585
0.350	0.394236	0.206633	0.418786	0.254483	0.448621	0.299862
0.375	0.415015	0.192730	0.437279	0.237655	0.464410	0.280464
0.400	0.436000	0.179141	0.456083	0.221175	0.480625	0.261422
0.425	0.457200	0.165889	0.475209	0.205071	0.497282	0.242768
0.450	0.478619	0.152995	0.494667	0.189370	0.514396	0.224535
0.475	0.500262	0.140482	0.514465	0.174101	0.531981	0.206756
0.500	0.522133	0.128371	0.534608	0.159292	0.550046	0.189468
0.525	0.544233	0.116684	0.555101	0.144971	0.568599	0.172705
0.550	0.566563	0.105442	0.575945	0.131166	0.587643	0.156505
0.575	0.589121	0.094666	0.597139	0.117907	0.607179	0.140903
0.600	0.611906	0.084378	0.618681	0.105221	0.627206	0.125938
0.625	0.634913	0.074598	0.640566	0.093137	0.647719	0.111646
0.650	0.658137	0.065345	0.662787	0.081681	0.668708	0.098065

ตารางที่ ง.3 (ต่อ)

$\bar{s}$	θ_B					
	40°		50°		60°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0.675	0.681571	0.056638	0.685333	0.070882	0.690161	0.085230
0.700	0.705207	0.048495	0.708194	0.060764	0.712064	0.073178
0.725	0.729036	0.040935	0.731354	0.051353	0.734396	0.061944
0.750	0.753047	0.033973	0.754798	0.042673	0.757136	0.051560
0.775	0.777227	0.027624	0.778507	0.034745	0.780259	0.042059
0.800	0.801563	0.021904	0.802462	0.027592	0.803736	0.033469
0.825	0.826042	0.016825	0.826639	0.021231	0.827535	0.025817
0.850	0.850647	0.012398	0.851016	0.015679	0.851623	0.019127
0.875	0.875363	0.008634	0.875568	0.010952	0.875961	0.013420
0.900	0.900173	0.005541	0.900268	0.007061	0.900513	0.008711
0.925	0.925059	0.003127	0.925088	0.004016	0.925235	0.005012
0.950	0.950004	0.001396	0.950002	0.001823	0.950087	0.002329
0.975	0.974990	0.000354	0.974982	0.000485	0.975023	0.000661
1.000	1	0	1	0	1	0

ตารางที่ ง.4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}$ กับ $\bar{x}, \bar{y}$ สำหรับมุม $\theta_B = 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ กรณีศึกษาระยะโก่งตัว วิธีคำนวณ DTM แบบ DTM(3)(17)

$\bar{s}$	θ_B					
	70°		80°		90°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0.344512	0.663316	0.439158	0.719670	0.539399	0.760342
0.025	0.353181	0.639807	0.443755	0.695002	0.539907	0.735229
0.050	0.361891	0.616313	0.448399	0.670342	0.540464	0.710117
0.075	0.370682	0.592849	0.453135	0.645701	0.541121	0.685008
0.100	0.379594	0.569433	0.458011	0.621088	0.541928	0.659903
0.125	0.388666	0.546079	0.463071	0.596515	0.542935	0.634807
0.150	0.397938	0.522806	0.468362	0.571992	0.544192	0.609723
0.175	0.407450	0.499632	0.473931	0.547533	0.545751	0.584656
0.200	0.417239	0.476577	0.479821	0.523153	0.547662	0.559617
0.225	0.427343	0.453660	0.486080	0.498868	0.549977	0.534613
0.250	0.437799	0.430905	0.492750	0.474697	0.552746	0.509659
0.275	0.448643	0.408335	0.499875	0.450660	0.556021	0.484770
0.300	0.459909	0.385977	0.507500	0.426782	0.559853	0.459965
0.325	0.471629	0.363857	0.515664	0.403089	0.564293	0.435267
0.350	0.483837	0.342006	0.524409	0.379608	0.569389	0.410702
0.375	0.496559	0.320455	0.533773	0.356374	0.575190	0.386300
0.400	0.509825	0.299237	0.543792	0.333420	0.581744	0.362097
0.425	0.523659	0.278389	0.554499	0.310785	0.589094	0.338131
0.450	0.538082	0.257948	0.565928	0.288511	0.597284	0.314447
0.475	0.553115	0.237955	0.578104	0.266643	0.606351	0.291093
0.500	0.568772	0.218450	0.591052	0.245229	0.616331	0.268123
0.525	0.585067	0.199478	0.604792	0.224319	0.627254	0.245594
0.550	0.602008	0.181083	0.619339	0.203968	0.639146	0.223569
0.575	0.619599	0.163312	0.634705	0.184233	0.652027	0.202115
0.600	0.637840	0.146212	0.650893	0.165170	0.665909	0.181302
0.625	0.656728	0.12983	0.667904	0.146842	0.680798	0.161204
0.650	0.676254	0.114216	0.685730	0.129310	0.696693	0.760342

ตารางที่ ง.4 (ต่อ)

$\bar{s}$	θ_B					
	70°		80°		90°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0.675	0.696404	0.099418	0.704358	0.112635	0.696693	0.141898
0.700	0.717159	0.085484	0.723768	0.096882	0.713584	0.123464
0.725	0.738496	0.072460	0.743932	0.082112	0.731450	0.105981
0.750	0.760387	0.060392	0.764818	0.068386	0.750264	0.089532
0.775	0.782799	0.049324	0.786382	0.055765	0.769986	0.074198
0.800	0.805692	0.039296	0.808576	0.044305	0.790569	0.060060
0.825	0.829025	0.030346	0.831343	0.034060	0.811951	0.047200
0.850	0.852749	0.022508	0.854618	0.025081	0.834061	0.035696
0.875	0.876811	0.015811	0.878326	0.017413	0.856815	0.025627
0.900	0.901154	0.010278	0.902384	0.011099	0.880115	0.017071
0.925	0.925715	0.005926	0.926698	0.006173	0.903846	0.010109
0.950	0.950427	0.002764	0.951158	0.002667	0.927874	0.004822
0.975	0.975216	0.000793	0.975640	0.000603	0.952041	0.001303
1.000	1	0	1	0	1	0

ตารางที่ ง.5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{s}$ กับ $\bar{x}, \bar{y}$ สำหรับมุม $\theta_B = 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ$ กรณีศึกษาระยะโก่งตัว วิธีคำนวณ DTM แบบ DTM(3)(17)

$\bar{s}$	θ_B					
	100°		110°		120°	
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0.641023	0.785372	0.736211	0.796010	0.819875	0.802635
0.025	0.637620	0.760516	0.729296	0.772061	0.810093	0.780154
0.050	0.634267	0.735652	0.722428	0.748096	0.800348	0.757649
0.075	0.631014	0.710773	0.715651	0.724097	0.790675	0.735094
0.100	0.627910	0.685871	0.709013	0.700048	0.781114	0.712464
0.125	0.625009	0.660942	0.702561	0.675936	0.771705	0.689737
0.150	0.622361	0.635981	0.696346	0.651745	0.762490	0.666889
0.175	0.620019	0.610985	0.690418	0.627464	0.753514	0.643900
0.200	0.618037	0.585954	0.684831	0.603083	0.744827	0.620751
0.225	0.61647	0.560890	0.679641	0.578596	0.736480	0.597425
0.250	0.615375	0.535798	0.674907	0.553998	0.728531	0.573908
0.275	0.614808	0.510687	0.670688	0.529289	0.721040	0.550189
0.300	0.614828	0.485570	0.667049	0.504473	0.714074	0.526261
0.325	0.615492	0.460461	0.664055	0.479557	0.707701	0.502123
0.350	0.616860	0.435384	0.661773	0.454556	0.701996	0.477777
0.375	0.618990	0.410364	0.660273	0.429488	0.697037	0.453233
0.400	0.621942	0.385433	0.659624	0.404380	0.692906	0.428508
0.425	0.625771	0.360628	0.659897	0.379265	0.689686	0.403626
0.450	0.630532	0.335994	0.661162	0.354183	0.687464	0.378619
0.475	0.636280	0.311580	0.663487	0.329182	0.686327	0.353532
0.500	0.643061	0.287443	0.666940	0.304321	0.686360	0.328416
0.525	0.650922	0.263646	0.671583	0.279664	0.687650	0.303336
0.550	0.659901	0.240258	0.677474	0.255286	0.690276	0.278368
0.575	0.670032	0.217357	0.684662	0.231273	0.694313	0.253601
0.600	0.681340	0.195024	0.693193	0.207716	0.699829	0.229133
0.625	0.693841	0.173346	0.703100	0.184717	0.706882	0.205078
0.650	0.707545	0.152418	0.714407	0.162386	0.715520	0.181560

ตารางที่ ง.5 (ต่อ)

$\overline{s}$	θ_B					
	100°		110°		120°	
	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$
0.675	0.722448	0.132337	0.727124	0.140841	0.725775	0.158713
0.700	0.738537	0.113204	0.741249	0.120204	0.737665	0.136682
0.725	0.755785	0.095124	0.756765	0.100607	0.751194	0.115622
0.750	0.774154	0.078203	0.773641	0.082184	0.766347	0.095692
0.775	0.793591	0.062551	0.791829	0.065076	0.783096	0.077058
0.800	0.814031	0.048280	0.811267	0.049428	0.801397	0.059894
0.825	0.835392	0.035503	0.831878	0.035394	0.821200	0.044373
0.850	0.857578	0.024340	0.853570	0.023138	0.842449	0.030679
0.875	0.880473	0.014920	0.876240	0.012840	0.865095	0.019004
0.900	0.903945	0.007383	0.899774	0.004708	0.889109	0.009560
0.925	0.927837	0.001896	0.924049	0.001008	0.914495	0.002590
0.950	0.951965	0.001343	0.948936	0.000994	0.941318	0.001607
0.975	0.976108	0.000084	0.974300	0.000842	0.969729	0.000644
1.000	1	0	1	0	1	0

ภาคผนวก จ

วิธีการยิงเป้า

กระบวนการยิงเป้า

1. สมการครอบคลุมปัญหา ประกอบไปด้วย

1) ความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งและโมเมนต์ดัดในรูปไร้หน่วยดังนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = -\bar{\mu}\bar{y} \qquad (จ.1)$$

2) ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ซึ่งแสดงไว้ในสมการที่ (2.15) คือ

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \qquad (จ.2)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \qquad (จ.3)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่ $\bar{s} = 1$ ดังต่อไปนี้

$$\theta = \theta_A = 0,\ \bar{x} + \bar{x}_B = 1$$

2. ขั้นตอนการศึกษา

1) กำหนดค่ามุม θ_B ที่ต้องการทราบค่า และทำการประมาณค่า $\bar{\mu}$ และระยะ $\bar{x}_B$ ในรอบแรก

2) อินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรุงเง-คุตตา อันดับ 4 ในชุดสมการที่ (จ.1), (จ.2) และ (จ.3) จาก $\bar{s} = 0$ จนถึง $\bar{s} = 1$

3) ปรับแก้ค่าที่ทำการประมาณไว้ในขั้นตอนที่ 1) ด้วยกระบวนการทำซ้ำโดยวิธี Newton-Raphson จนกระทั่งฟังก์ชัน Φ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$$\text{Min. } \Phi = \left|\theta(\bar{s}=1)\right| + \left|\bar{x}(\bar{s}=1) + \bar{x}_B - 1\right| \qquad (จ.4)$$

4) หลังจากได้คำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไขแล้วสามารถนำไปสร้างความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับระยะโก่งตัวรวมถึงตำแหน่งสมดุลต่างๆ ได้

ภาคผนวก ฉ

ผลงานตีพิมพ์เผยแพร่

วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ.

ปีที่ 40 ฉบับที่ 1 มกราคม - มีนาคม 2560

บทความวิจัย

บทความคัดเลือกจากการประชุมวิชาการเครือข่ายงานวิจัย สาขาการบริหารเทคโนโลยีและนวัตกรรม ครั้งที่ 6 (ThaiTIMA 2014)

การประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย

สุรชัย ทรัพย์เพิ่ม[1] และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม[2,*]
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ถ.รังสิต-นครนายก (คลองหก) อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12110

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดของเสายื่นที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่ปลายเสา ซึ่งได้คำนึงถึงความไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิตอันเนื่องมาจากการโก่งตัวมากของเสา สมการครอบคลุมปัญหาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้นซึ่งสร้างขึ้นโดยอาศัยสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ระบบสมการอนุพันธ์สามารถจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันแปลงได้โดยใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ หลังจากนั้นสามารถแสดงสมการของมุมลาดเอียง การเคลื่อนตัวในแนวราบ และการเคลื่อนตัวในแนวดิ่งได้โดยอาศัยกระบวนการผกผันของการแปลงฟังก์ชัน ผลเฉลยของปัญหาสามารถคำนวณได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดยจากการคำนวณซึ่งควบคุมให้มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 10^{-10} พบว่าปัจจัยที่มีผลกระทบต่อค่าความถูกต้องมีอยู่ด้วยกันสองปัจจัย คือ จำนวนเทอมที่ใช้ในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine และจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งในบทความนี้ได้ใช้จำนวนเทอมในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน sine และ cosine จำนวน 3 เทอม และใช้จำนวนเทอมในการคำนวณด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์จำนวน 17 เทอม การใช้วิธีการดังกล่าวทำให้สามารถแสดงสมการที่ใช้อธิบายรูปร่างสมดุลของเสายื่นในรูปแบบปิดอย่างง่ายได้ และพบว่าผลการคำนวณโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ให้ผลสอดคล้องกันเป็นอย่างดีเมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยใช้วิธีการยิงเป้า และวิธีอิลิปติกอินทิกรัล เมื่อมุมที่ปลายเสาอยู่ในช่วงระหว่าง 0 ถึง 100 องศา

คำสำคัญ : การแปลงเชิงอนุพันธ์ / เสายื่น / การโก่งตัวมาก / หลังการโก่งเดาะ

* *Corresponding Author : boonchai__p@rmutt.ac.th*

1 *นักศึกษาระดับปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์*

2 *อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์*

Application of Differential Transformation Method to Study Postbuckling Behavior of Cantilever Column under End Loading

Surachai Supperm[1] and Boonchai Phungpaingam[2*]

Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Rangsit-Nakhonnayok Rd. (Klong6), Thanyaburi, Pathum Thani 12110

Abstract

This paper presents approximate closed-form solutions of a problem dealing with cantilever column subjected to a concentrated load at the tip where the geometric nonlinearity due to the large deflection is taken into account. A set of nonlinear governing differential equations is formulated from equilibrium equations, moment-curvature relation, and geometric relations. The differential transformation method (DTM) is employed to transform the differential equations into transformed functions. Afterwards, the expressions for the slope, horizontal displacement, and vertical displacement can be obtained by using the inverse process of the transformation. The results of the problems can be computed by imposing the boundary conditions. From the computation by controlling the relative error $\leq 10^{-10}$, there are 2 factors that affect the accuracy of the results. One is the number of the considered terms in the Taylor's series of sine and cosine functions. The others is the number of terms used in the DTM. In this paper, the first three terms in the Taylor's series of functions sine and cosine are taken into account while 17 terms are used in the calculation by DTM. By using this approach, it is possible to derive simple expressions to describe the equilibrium configurations of the column. Ranging from to of the end slope, the results from DTM are in good agreement with those obtained from the shooting method and elliptic integral method.

Keywords : Differential Transformation Method / Cantilever Column / Large Deflection / Postbuckling

* Corresponding Author : boonchai__p@rmutt.ac.th

1 *Master of Engineering Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.*

2 *Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.*

1. บทนำ

พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของโครงสร้างที่มีความชะลูดมาก จัดเป็นปัญหาที่มีสมการครอบคลุมปัญหาอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้น ซึ่งมีการศึกษาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ไขปัญหาที่โครงสร้างสามารถแอ่นตัวได้มาก อาทิเช่น การศึกษาสภาวะสมดุลของสายยึดโยงใต้ทะเลที่มีอิทธิพลมาจากกระแสน้ำและน้ำหนักของตัวเอง [1] การศึกษาแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึก [2] และเมื่อโครงสร้างชะลูดที่อยู่ภายใต้แรงอัด ซึ่งส่วนใหญ่จะพบกับปัญหาเกี่ยวกับการโก่งเดาะ นอกจากนั้นพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาเช่นกัน อาทิเช่น การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายืดหยุ่น [3, 4] ซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาที่มีจุดรองรับแบบยึดหมุนทั้งสองด้านโดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล [3] และเสาที่มีจุดรองรับแบบสปริงหมุนทั้งสองด้านโดยวิธียิงเป้า [4] จากงานวิจัยที่ผ่านมามีหลายวิธีที่สามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยได้ ที่พบได้บ่อยมีอยู่ด้วยกัน 3 วิธีด้วยกันคือ วิธีอิลิปติกอินทิกรัล [3] วิธียิงเป้า [2, 4] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [2, 5] โดยที่วิธีอิลิปติกอินทิกรัลเป็นวิธีที่ให้ผลแบบแม่นตรงในรูปแบบปิด แต่อย่างไรก็ตามมีข้อจำกัดบางอย่างที่ทำให้ไม่สามารถใช้วิธีอิลิปติกอินทิกรัลได้ เช่น ในกรณีที่มีน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายกระทำกับโครงสร้าง นอกจากนั้นผลเฉลยในรูปของอิลิปติกอินทิกรัลนั้นจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันพิเศษ (อิลิปติกฟังก์ชัน) ซึ่งอาจไม่สะดวกในการนำไปใช้งาน ในขณะที่หากไม่สามารถใช้วิธีอิลิปติกอินทิกรัลในการแก้ไขปัญหายังคงมีวิธีการเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาแบบค่าขอบเขตสองจุด (Two-point boundary value problem) คือวิธียิงเป้า และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีงานวิจัยอีกจำนวนหนึ่งได้นำเสนอวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างเสา-คาน ด้วยวิธีการประมาณค่าจากผลการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังหรือโพลิโนเมียล [6-8] ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในรูปของผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิด โดยค่าความถูกต้องของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมที่นำมาพิจารณาในการคำนวณ แต่อย่างไรก็ตามวิธีการดังกล่าวยังต้องอาศัยเทคนิคการอินทิเกรตและการดิฟเฟอเรนชิเอท นอกจากนี้ในจำนวนวิธีการประมาณค่าคำตอบยังมีอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจคือ วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าวิธี DTM มีนักวิจัยจำนวนหนึ่งได้นำวิธีการนี้การศึกษาปัญหาของความถี่ธรรมชาติของคานยื่น [9] และน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาในแบบต่างๆ [10-12] และต่อมาได้มีการประยุกต์ใช้วิธี DTM ในศึกษาการโก่งตัวมากของคาน อาทิเช่น งานวิจัยของ Salehi และคณะ [13] ซึ่งได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานยื่นโดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกับการแอ่นตัวที่ปลายคานยื่น โดยมีการเปรียบเทียบผลกับวิธี Variational Iteration Method

งานวิจัยด้วยวิธี DTM เหล่านี้มีวัตถุประสงค์คล้ายคลึงกันคือการอธิบายพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะด้วยการแสดงความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปของสมการแบบประมาณในรูปแบบปิดอย่างง่าย ซึ่งมีความสะดวกในการนำไปใช้งาน โดยที่ในงานวิจัยนี้ได้นำวิธี DTM ไปประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาปัญหาของการโก่งตัวมากของเสายื่นภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่ปลายเสา ซึ่งแบบจำลองของปัญหาในลักษณะดังกล่าวมีการนำไปใช้อย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก อาทิเช่นในส่วนของ Micro-Electromechanical Systems (MEMS) ซึ่งโครงสร้างที่เป็นเสายื่นจะพบได้มากในอุปกรณ์เซนเซอร์ต่างๆ โดยส่วนใหญ่แล้ว อุปกรณ์เซนเซอร์เหล่านี้ใช้สำหรับการตรวจวัดที่ละเอียดอ่อนซึ่งเหมาะกับการใช้ทฤษฎีการแอ่นตัวทั่วไปที่เป็นการแอ่นตัวน้อยได้ แต่ในบางกรณีเช่นอุปกรณ์ในการจับยึดเลนส์ขนาดเล็กในแนวดิ่ง ซึ่งทำการศึกษา โดยการนำเสายื่นขนาดเล็ก (Microcantilever) มาประยุกต์ใช้เป็นอุปกรณ์จับยึด ในกรณีนี้เสายื่นสามารถแอ่นตัวได้มากโดยที่มุมที่ปลายเสาสามารถเอียงได้สูงสุดถึง 90 องศา [14] การนำเสนอผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดโดยวิธี DTM นี้จะทำให้การทำนายพฤติกรรมการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะของเสาเป็นไปได้อย่างสะดวก อันเนื่องมาจากการที่ไม่จำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันพิเศษ เช่น อิลิปติกฟังก์ชัน เป็นต้น ในขณะที่ความถูกต้องของผลเฉลยก็ยังคงให้ผลที่ใกล้เคียงกับอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้า ภายในช่วงของการเคลื่อนตัวโดยวัดจากมุมลาดเอียงที่ปลายที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 100 องศา ซึ่งเพียงพอต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก MEMS [14]

2. สมการการแปลงเชิงอนุพันธ์

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method) เป็นวิธีการกึ่งวิเคราะห์ (Semi-analytical Method) ที่มีพื้นฐานมาจากอนุกรมเทย์-เลอร์ ใช้การแปลงส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันขยายของอนุกรม จัดอยู่ในรูปของสมการพีชคณิต ที่อาศัยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาในการสร้างระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยของคำตอบ ประโยชน์ที่ได้รับจากการใช้กระบวนการนี้คือสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิด (Approximate Closed-form Solution) ของปัญหาได้ วิธี DTM ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Pukhov [15] ชาวรัสเซียในปี 1982 ศึกษาเกี่ยวกับด้านวงจรไฟฟ้า ต่อมาในปี 1986 นักวิจัยชาวจีน Zhou [16] ได้นำมาศึกษาปัญหาด้านวงจรไฟฟ้าแบบไร้เชิงเส้นที่มีสมการอยู่ในรูปของอนุพันธ์ย่อย หลังจากนั้นมีผู้นำวิธี DTM มาประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ อีกเช่น ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน [17-19] ซึ่งพบว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมาก โดยให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลโดยวิธีแม่นตรง นอกเหนือจากนั้นวิธี DTM ยังนำไปประยุกต์ใช้ได้ดีกับปัญหาด้านเสถียรภาพของชิ้นส่วนเสาและคาน [10-13] และปัญหาด้านการสั่นสะเทือนของคาน [9, 20] เป็นต้น ซึ่งพื้นฐานวิธี DTM เริ่มต้นจากฟังก์ชันการประมาณค่าของอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \quad \textbf{(1)}$$

ถ้า $x_0 = 0$ อนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (1) จะเรียกว่าอนุกรมแมคลอริน ดังแสดงในสมการที่ (2)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \quad \textbf{(2)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \quad \textbf{(3)}$$

และจะเรียก $F(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันแปลง (Transformed Function) ดังนั้นสมการที่ (2) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูปต่อไปนี้

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k F(k) \quad \textbf{(4)}$$

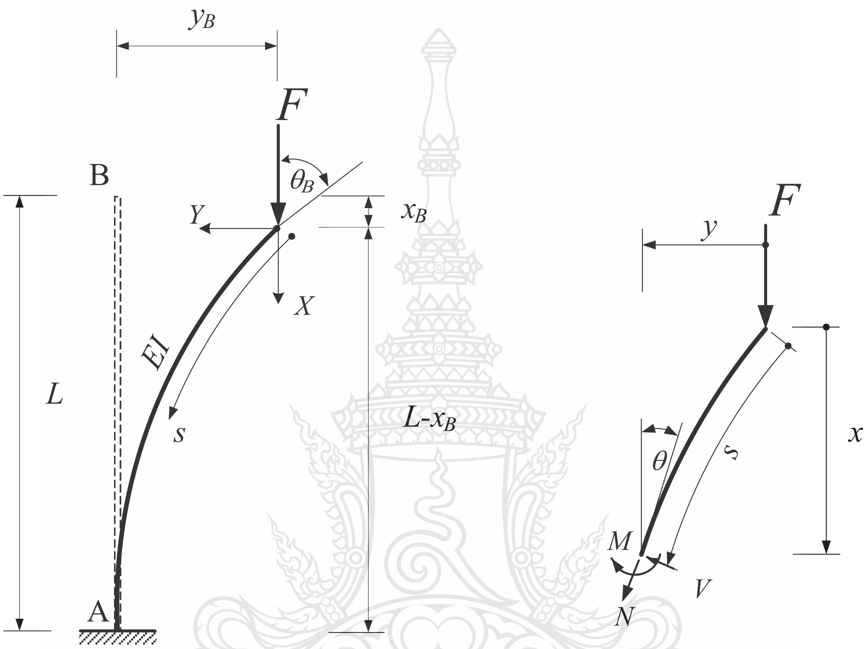
สมการที่ (4) แสดงการผกผันของฟังก์ชัน $F(k)$ ใดๆ โดยการใช้วิธี DTM สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้โดยไม่ต้องอาศัยเทคนิคการอินทิเกรต และสามารถให้คำตอบแบบประมาณในรูปแบบปิดได้ ซึ่งการแปลงฟังก์ชันพื้นฐานจะดำเนินการตามหลักการทางคณิตศาสตร์และสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงการแปลงฟังก์ชัน

Original function	**Transformed function**
$f(x)=g(x)\mp h(x)$	$F(k)=G(k)\mp H(k)$
$f(x)=\alpha g(x)$	$F(k)=\alpha G(k)\ ,\ \alpha\in\Re$
$f(x)=g(x)h(x)$	$F(k)=\sum_{l=0}^{k}G(l)H(k-l)$
$f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$	$F(k)=(k+1)G(k+1)$
$f(x)=\frac{d^2}{dx^2}g(x)$	$F(k)=(k+1)(k+2)G(k+2)$
$f(x)=\frac{d^n}{dx^n}g(x)$	$F(k)=\frac{(k+n)!}{k!}G(k+n)$
$f(x)=x^n$	$F(k)=\delta(k-n)=\begin{cases}0, & if\ k\neq n\\ 1, & if\ k=n\end{cases}$
$f(x)=f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$	$F(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}\ldots\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}F_1(k_1)F_2(k_2-k_1)\ldots F_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})F_n(k-k_{n-1})$

3. ลักษณะปัญหาและสมการครอบคลุมปัญหา

จากรูปที่ 1 ก) พิจารณาเสายื่นที่มีขนาดสม่ำเสมอยาว L มีค่าความแข็งแกร่งต่อการดัดเท่ากับ EI ที่ปลายเสาด้าน A ถูกยึดรั้งเข้ากับจุดรองรับที่ฐานซึ่งเป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น และที่ปลายเสาด้าน B เป็นปลายอิสระมีแรงอัดในแนวดิ่ง F มากระทำซึ่งทำให้เสามีโอกาสเกิดการโก่งเดาะได้ เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตและความสัมพันธ์ของโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยเสา ดังแสดงในรูปที่ 1 ข) จะได้สมการดังนี้



ก) รูปร่างของเสายื่นก่อน (เส้นประ) และหลังการเสียรูป (เส้นทึบ)

ข) ชิ้นส่วนย่อยของเสา

รูปที่ 1 เสายื่นที่มีแรงกระทำที่ปลาย

$$M = -Fy \quad \textbf{(5)}$$

เมื่อ M คือ โมเมนต์ดัด

F คือ แรงกระทำที่ปลาย

L คือ ช่วงความยาวเสา

x_B คือ ระยะจากจุด B ถึงแรงกระทำที่ปลาย ในแกน X

y_B คือ ระยะจากจุด B ถึงแรงกระทำที่ปลาย ในแกน Y

x คือ ระยะจากแรงกระทำที่ปลายถึงตำแหน่งใดๆ ในแกน X

y คือ ระยะจากแรงกระทำที่ปลายถึงตำแหน่งใดๆ ในแกน Y

θ คือ ค่ามุมลาดเอียง ณ ตำแหน่งใดๆ ตามความยาวส่วนโค้ง s

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามทฤษฎีคานของออยเลอร์-แบร์นูลลี (Euler-Bernoulli Beam Theory) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} = \frac{-Fy}{EI} \quad \textbf{(6)}$$

ทำการดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (6) เทียบตัวแปร s ตลอดความยาวเสา จะได้

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \mu\frac{dy}{ds} = 0 \quad \textbf{(7)}$$

เมื่อ

$$\mu = \frac{F}{EI} \tag{8}$$

และจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยเสา ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{9}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{10}$$

เพื่อให้สามารถเขียนสมการต่างๆ ให้อยู่ในรูปทั่วไป ซึ่งง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยเสียก่อนดังนั้นสมการที่ (7), (9), (10) จะเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} + \bar{\mu}\sin\theta = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos\theta \tag{12}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin\theta \tag{13}$$

เมื่อ

$$\bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{y} = \frac{y}{L},\ \bar{s} = \frac{s}{L},\ \bar{\mu} = \mu L^2 \tag{14a-d}$$

สำหรับฟังก์ชัน sine และ cosine เมื่อทำการแปลงให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์จำนวน 3 เทอม ซึ่งครอบคลุมพฤติกรรมการไร้เชิงเส้นในช่วงเริ่มต้นได้ดี การพิจารณาใช้จำนวนเทอมที่มากกว่า 3 เทอมอาจทำได้และให้ผลเฉลยที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น แต่ต้องคำนึงถึงภาระในการคำนวณที่จะมากขึ้นตามจำนวนเทอมที่เพิ่มขึ้น ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้การกระจายอนุกรมของฟังก์ชัน sine และ cosine จำนวน 3 เทอมซึ่งมีความเหมาะสมในการครอบคลุมพฤติกรรมการไร้เชิงเส้นของเสายื่นได้ในระดับหนึ่ง และมีภาระในการคำนวณที่ไม่มากจนเกินไป ดังนั้น สมการที่ (11)-(13) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{s}^2} + \bar{\mu}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \tag{16}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \tag{17}$$

ในการหาผลเฉลยของคำตอบนอกเหนือไปจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการโก่งเดาะของเสาแล้วยังต้องอาศัยเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนี้

$$\theta(\bar{s}=0) = \theta_B;\ \theta'(\bar{s}=0) = 0; \tag{18a-b}$$

$$\bar{x}(\bar{s}=0) = 0;\ \bar{y}(\bar{s}=0) = 0; \tag{18c-d}$$

$$\theta(\bar{s}=1) = 0;\ \bar{x}(\bar{s}=1) = 1 - \bar{x}_B; \tag{19a-b}$$

$$\bar{y}(\bar{s}=1) = \bar{y}_B \tag{19c}$$

โดยในการคำนวณจะกำหนดให้ $C_1 = \theta_B,\ C_2 = \bar{x}_B$ และ $C_3 = -\bar{y}_B$

4. วิธีการคำนวณ

4.1 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธี DTM

จากสมการที่ (15)-(17) โดยอาศัยตารางการแปลงเชิงอนุพันธ์ในตารางที่ 1 สมการที่ (15) (16) และ (17) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันแปลงตามลำดับได้ดังนี้

$$\Theta(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\begin{array}{l} -\bar{\mu}\Theta(k) + \dfrac{\bar{\mu}}{3!}\left(\displaystyle\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right) \\ -\dfrac{\bar{\mu}}{5!}\left(\displaystyle\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left(\displaystyle\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right) \end{array}\right] \tag{20}$$

$$X(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\delta(k)-\frac{1}{2!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\Theta(k_1)\right)\\ +\frac{1}{4!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\Theta(k_3)\right)\right)\right)\end{array}\right] \quad (21)$$

$$Y(k+1)=\frac{1}{(k+1)}\left[\begin{array}{l}\Theta(k)-\frac{1}{3!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\Theta(k_2)\right)\right)\\ +\frac{1}{5!}\left(\sum_{k_1=0}^{k}\Theta(k-k_1)\left(\sum_{k_2=0}^{k_1}\Theta(k_1-k_2)\left(\sum_{k_3=0}^{k_2}\Theta(k_2-k_3)\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left(\sum_{k_4=0}^{k_3}\Theta(k_3-k_4)\Theta(k_4)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right] \quad (22)$$

โดยที่ k = $0,1,2,3,\ldots,n_k$

k_1 = $0,1,2,3,\ldots,k$

$k_{2,3,4}$ = $0,1,2,3,\ldots,k_{1,2,3}$

n_k = จำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงในวิธี DTM

$\Theta(k+2)$ = ฟังก์ชันแปลงมุมลาดเอียงในลำดับเทอมที่ $k+2$

$X(k+1)$ = ฟังก์ชันแปลงระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ในลำดับเทอมที่ $k+1$

$Y(k+1)$ = ฟังก์ชันแปลงระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ในลำดับเทอมที่ $k+1$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (19) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันแปลงได้เช่นกัน โดยสมการที่ (19a,b,c) สามารถเขียนใหม่ตามลำดับได้ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Theta(k)=0 \quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}X(k)=1-\bar{x}_B \quad (24)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)=\bar{y}_B \quad (25)$$

จากสมการที่ (3) สมการฟังก์ชันแปลง $F(k)$ ในลำดับที่ $k=0,1,2,3,\ldots,n_k$ ใดๆ มีลักษณะดังนี้

เมื่อ $k=0;\quad F(0)=f(x)\big|_{x=0}$ **(26a)**

$k=1;\quad F(1)=\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=0}$ **(26b)**

ดังนั้นการกระจายเทอมที่ 1 หรือ 2 ของสมการที่ (23)-(25) สามารถเขียนได้โดยอาศัยสมการที่ (26) ดังแสดงต่อไปนี้

สมการมุมลาดเอียง ฟังก์ชันแปลงของมุมลาดเอียง Θ สามารถแสดงได้ โดยมีเทอมที่ 1 และ 2 ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18a-b) คือ

เมื่อ $k=0$ จะได้

$$\Theta(0)=C_1=\theta_B \quad (27a)$$

เมื่อ $k=1$ จะได้

$$\Theta(1)=\left.\frac{d\theta}{d\bar{s}}\right|_{\bar{s}=0}=0 \quad (27b)$$

ตั้งแต่เทอมที่ 3 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (20) ดังนี้

$$\Theta(2)=-\frac{1}{240}\bar{\mu}C_1\left(-20C_1^{\,2}+C_1^{\,4}+120\right) \quad (27c)$$

$$\Theta(4)=\frac{1}{69120}\bar{\mu}^{2}C\left(-1920C_1^{2}+384C_1^{4}-32C_1^{6}+C_1^{8}+2880\right) \quad \textbf{(27d)}$$

$$\Theta(6)=-\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^{3}C_1\left(-1440000C_1^{2}+694080C_1^{4}-140160C_1^{6}+14520C_1^{8}-772C_1^{10}+17C_1^{12}+345600\right) \quad \textbf{(27e)}$$

เทอมที่เป็นเลขคี่จะมีค่าเป็นศูนย์

สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ฟังก์ชันแปลงของระยะเคลื่อนตัวทางแกน X สามารถเขียนได้ โดยเทอมที่ 1 ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18c) คือ
เมื่อ $k=0$ จะได้

$$X(0)=0 \quad \textbf{(28a)}$$

ตั้งแต่เทอมที่ 2 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (21) ดังนี้

$$X(1)=1-\frac{1}{2}C_1^{2}+\frac{1}{24}C_1^{4} \quad \textbf{(28b)}$$

$$X(3)=\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1^{2}-\frac{1}{18}\bar{\mu}C_1^{4}+\frac{13}{2160}\bar{\mu}C_1^{6}-\frac{1}{4320}\bar{\mu}C_1^{8} \quad \textbf{(28c)}$$

$$X(5)=-\frac{1}{30}\bar{\mu}^{2}C_1^{2}+\frac{1}{36}\bar{\mu}^{2}C_1^{4}-\frac{79}{10800}\bar{\mu}^{2}C_1^{6}+\frac{13}{14400}\bar{\mu}^{2}C_1^{8}-\frac{71}{1296000}\bar{\mu}^{2}C_1^{10}+\frac{7}{5184000}\bar{\mu}^{2}C_1^{12} \quad \textbf{(28d)}$$

$$X(7)=\frac{1}{315}\bar{\mu}^{3}C_1^{2}-\frac{59}{7560}\bar{\mu}^{3}C_1^{4}+\frac{911}{226800}\bar{\mu}^{3}C_1^{6}-\frac{109}{113400}\bar{\mu}^{3}C_1^{8}+\frac{697}{5443200}\bar{\mu}^{3}C_1^{10}-\frac{359}{36288000}\bar{\mu}^{3}C_1^{12}+\frac{137}{326592000}\bar{\mu}^{3}C_1^{14}-\frac{1}{130636800}\bar{\mu}^{3}C_1^{16} \quad \textbf{(28e)}$$

เทอมที่เป็นเลขคู่จะมีค่าเป็นศูนย์

สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ฟังก์ชันแปลงของระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y สามารเขียนได้โดยเทอมแรกได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18d) มีรายละเอียดเทอมต่างๆ ดังนี้
เมื่อ $k=0$ จะได้

$$Y(0)=0 \quad \textbf{(29a)}$$

ตั้งแต่เทอมที่ 2 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (22) ดังนี้

$$Y(1)=C_1-\frac{1}{6}C_1^{3}+\frac{1}{120}C_1^{5} \quad \textbf{(29b)}$$

$$Y(3)=-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1+\frac{1}{9}\bar{\mu}C_1^{3}-\frac{1}{45}\bar{\mu}C_1^{5}+\frac{1}{540}\bar{\mu}C_1^{7}-\frac{1}{17280}\bar{\mu}C_1^{9} \quad \textbf{(29c)}$$

$$Y(5)=\frac{1}{120}\bar{\mu}^{2}C_1-\frac{5}{144}\bar{\mu}^{2}C_1^{3}+\frac{241}{14400}\bar{\mu}^{2}C_1^{5}-\frac{73}{21600}\bar{\mu}^{2}C_1^{7}+\frac{121}{345600}\bar{\mu}^{2}C_1^{9}-\frac{193}{10368000}\bar{\mu}^{2}C_1^{11}+\frac{17}{41472000}\bar{\mu}^{2}C_1^{13} \quad \textbf{(29d)}$$

$$Y(7) = -\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3 C_1 + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^3 C_1^3 - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^3 C_1^5 + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^3 C_1^7 - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3 C_1^9 + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3 C_1^{11} - \frac{1}{243000}\bar{\mu}^3 C_1^{13} + \frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3 C_1^{15} - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3 C_1^{17} \quad \textbf{(29e)}$$

เทอมที่เป็นเลขคู่จะมีค่าเป็นศูนย์

การศึกษามุมลาดเอียงของเสายื่นหลังจากเกิดการโก่งเดาะเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกจะอาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายเสาด้าน A ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น โดยมีค่ามุมลาดเอียงเท่ากับศูนย์ ใช้สมการที่ (23) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (27) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (30)

สำหรับการศึกษาระยะการเคลื่อนตัวทางแกน X ใช้สมการที่ (24) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (28) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (31)

ทำนองเดียวกัน การศึกษาระยะการเคลื่อนตัวทางแกน Y ใช้สมการที่ (25) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (29) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (32)

$$\begin{aligned} & C_1 + \left(-\frac{1}{240}\bar{\mu}C_1\left(-20C_1^2 + C_1^4 + 120\right)\right) \\ & + \left(\frac{1}{69120}\bar{\mu}^2 C_1\left(-1920C_1^2 + 384C_1^4 - 32C_1^6 + C_1^8 + 2880\right)\right) \\ & + \left(-\frac{1}{248832000}\bar{\mu}^3 C_1\left(\begin{aligned} & -1440000C_1^2 + 694080C_1^4 - 140160C_1^6 + 14520C_1^8 \\ & -772C_1^{10} + 17C_1^{12} + 345600 \end{aligned}\right)\right) \\ & + \ldots = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(30)}$$

$$\begin{aligned} & C_2 + \left(1 - \frac{1}{2}C_1^2 + \frac{1}{24}C_1^4\right) \\ & + \left(\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1^2 - \frac{1}{18}\bar{\mu}C_1^4 + \frac{13}{2160}\bar{\mu}C_1^6 - \frac{1}{4320}\bar{\mu}C_1^8\right) \\ & + \left(-\frac{1}{30}\bar{\mu}^2 C_1^2 + \frac{1}{36}\bar{\mu}^2 C_1^4 - \frac{79}{10800}\bar{\mu}^2 C_1^6 + \frac{13}{14400}\bar{\mu}^2 C_1^8 - \frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2 C_1^{10} + \frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2 C_1^{12}\right) \\ & + \left(\begin{aligned} & \frac{1}{315}\bar{\mu}^3 C_1^2 - \frac{59}{7560}\bar{\mu}^3 C_1^4 + \frac{911}{226800}\bar{\mu}^3 C_1^6 - \frac{109}{113400}\bar{\mu}^3 C_1^8 + \frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3 C_1^{10} \\ & - \frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3 C_1^{12} + \frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3 C_1^{14} - \frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3 C_1^{16} \end{aligned}\right) \\ & + \ldots = 1 \end{aligned} \quad \textbf{(31)}$$

$$
\begin{aligned}
&C_3+\left(C_1-\frac{1}{6}C_1{}^3+\frac{1}{120}C_1{}^5\right)\\
&+\left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1+\frac{1}{9}\bar{\mu}C_1{}^3-\frac{1}{45}\bar{\mu}C_1{}^5+\frac{1}{540}\bar{\mu}C_1{}^7-\frac{1}{17280}\bar{\mu}C_1{}^9\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_1-\frac{5}{144}\bar{\mu}^2C_1{}^3+\frac{241}{14400}\bar{\mu}^2C_1{}^5-\frac{73}{21600}\bar{\mu}^2C_1{}^7+\frac{121}{345600}\bar{\mu}^2C_1{}^9-\frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2C_1{}^{11}\\&+\frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2C_1{}^{13}\end{aligned}\right)\\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_1+\frac{13}{1890}\bar{\mu}^3C_1{}^3-\frac{32}{4725}\bar{\mu}^3C_1{}^5+\frac{11}{4320}\bar{\mu}^3C_1{}^7-\frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3C_1{}^9+\frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3C_1{}^{11}\\&-\frac{1}{243000}\bar{\mu}^3C_1{}^{13}+\frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3C_1{}^{15}-\frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3C_1{}^{17}\end{aligned}\right)\\
&+\ldots\ =\ 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(32)}
$$

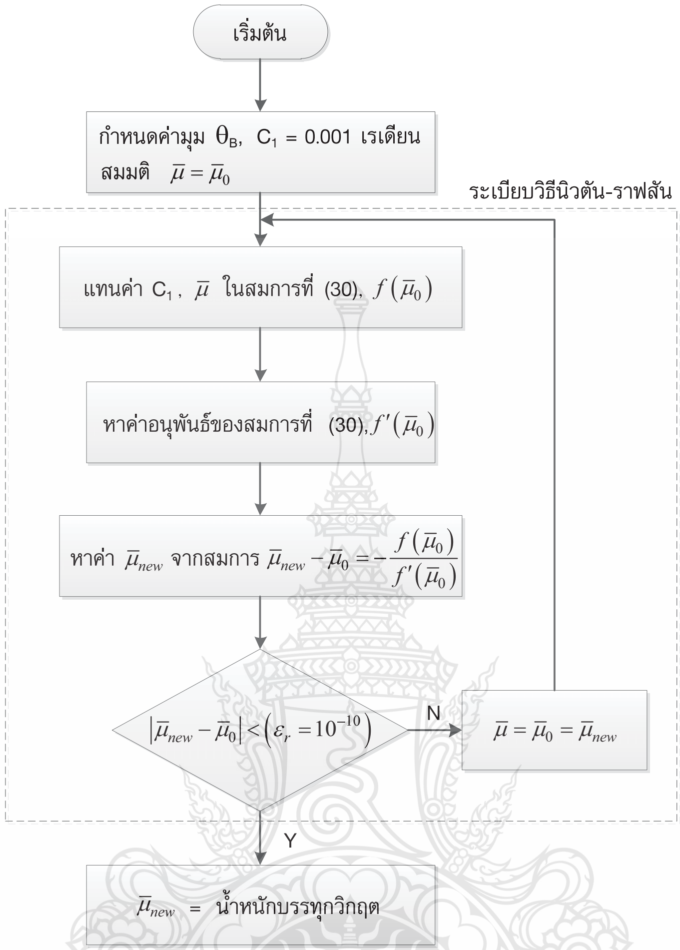
4.2 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนและวิธีการคำนวณเพื่อศึกษาตัวแปร ในสมการที่ (30)-(32) โดยใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ดังนี้

4.2.1 การคำนวณหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จากสมการที่ (30) มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัว คือ $\bar{\mu}$ และ C_1 ก่อนการโก่งเดาะของเสา $C_1 = 0$ ในการคำนวณเพื่อหาน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาสามารถกระทำได้โดยการกำหนดค่า C_1 ที่เข้าใกล้ศูนย์ลงในสมการที่ (30)

ในที่นี้กำหนดให้ $C_1 = 0.001$ จากนั้นสมมติค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตเริ่มต้นลงในสมการที่ (30) และใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันเพื่อปรับแก้น้ำหนักบรรทุกวิกฤต โดยกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ แสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงขั้นตอนการคำนวณน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

4.2.2 การคำนวณมุมลาดเอียง

กำหนดมุมลาดเอียงที่ปลายเสา C_1 จากนั้นใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน เพื่อคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกัน จากสมการที่ (30) ด้วยจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงเท่ากับที่ได้จากหัวข้อ 4.2.1 จากนั้นนำค่า $\bar{\mu}$ และ C_1 แทนลงในสมการที่ (27) และรวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงโดยใช้การแปลงผกผันในสมการที่ (4) สุดท้ายจะได้สมการมุมลาดเอียงตลอดความยาวเสาที่สอดคล้องกับมุมลาดเอียง C_1

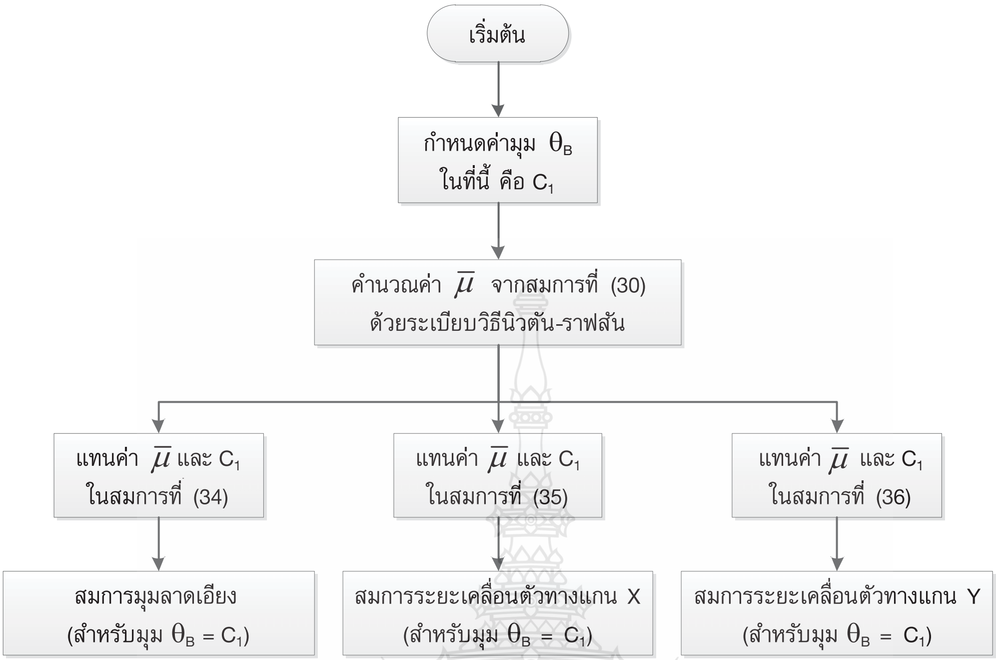
4.2.3 การคำนวณระยะเคลื่อนตัวทางแกน X

จากผลการคำนวณ $\bar{\mu}$ และ C_1 จากขั้นตอนที่ 4.2.2 สามารถคำนวณค่า C_2 ได้จากสมการที่ (31) และใช้การแปลงผกผันในสมการที่ (4) รวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงในสมการที่ (28) จะได้สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ตลอดความยาวเสาเช่นเดียวกัน

4.2.4 การคำนวณระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y

จากผลของ $\bar{\mu}$ และ C_1 ในขั้นตอนที่ 4.2.2 จากนั้นแทนลงในสมการที่ (32) จะสามารถคำนวณค่า C_3 ได้ และใช้การแปลงผกผันในสมการที่ (4) รวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงในสมการที่ (29) จะได้สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ตลอดความยาวเสาเช่นเดียวกัน

ขั้นตอนการคำนวณแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงขั้นตอนการคำนวณมุมลาดเอียงและระยะเคลื่อนตัว

5. ผลและการวิเคราะห์ผล

5.1 ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา

ในส่วนของผลและการวิเคราะห์ผลเป็นการนำผลการคำนวณที่ได้จากวิธี DTM ไปทำการเปรียบเทียบกับผลคำตอบด้วยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล (Elliptical Integral Method, EIM) ซึ่งปรากฏอยู่ในตำราของ Timoshenko และ Gere [21] และผลการคำนวณด้วยวิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) และได้นำผลมาแสดงไว้ในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา

Number of terms	$\bar{\mu}$ EIM [21]	$\bar{\mu}$ SM	$\bar{\mu}$ DTM$^{(3)}$(17)	Relative error
3	2.4674011002	2.4674011005	2.0000003333	2.00000E-00
5			2.5358984981	2.67949E-01
7			2.4646046852	2.81138E-02
9			2.4674791152	1.16628E-03
11			2.4673999522	3.20825E-05
13			2.4674014281	5.98145E-07
15			2.4674014085	7.92911E-09
17			2.4674014086	6.48576E-11
19			2.4674014087	6.88973E-13

จากตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบจะเห็นได้ว่า วิธี DTM ให้ผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องเป็นอย่างดี การคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะพบว่าผลรวมของจำนวนเทอมฟังก์ชันแปลงวิธี DTM ต้องใช้จำนวน 17 เทอม จึงทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าน้อยกว่า $\varepsilon_r = 10^{-10}$ และน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ได้เท่ากับ 2.4674014086 มีค่าเข้าใกล้ค่าแม่นตรงซึ่งมีค่าเท่ากับ π^2 / 4 นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าจำนวน

เทอมที่นำมาใช้ในการคำนวณหากมีไม่มากพอจะทำให้ผลที่ได้มีความคลาดเคลื่อนสูง แต่ถ้าหากเพิ่มจำนวนเทอมให้มากขึ้นผลคำตอบที่คำนวณได้จะลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรง โดยมีสมการสำหรับการคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ได้จากการศึกษานี้ (ใช้ 17 เทอม) โดยกำหนดให้มุมลาดเอียงที่ปลายมีค่าน้อยมากในที่นี้กำหนดให้ $C_1 = 0.001$ ในสมการที่ (30) ซึ่งภายหลังจากการกำหนดค่า $C_1 = 0.001$ แล้วสามารถเขียนแสดงไว้ในสมการที่ (33)

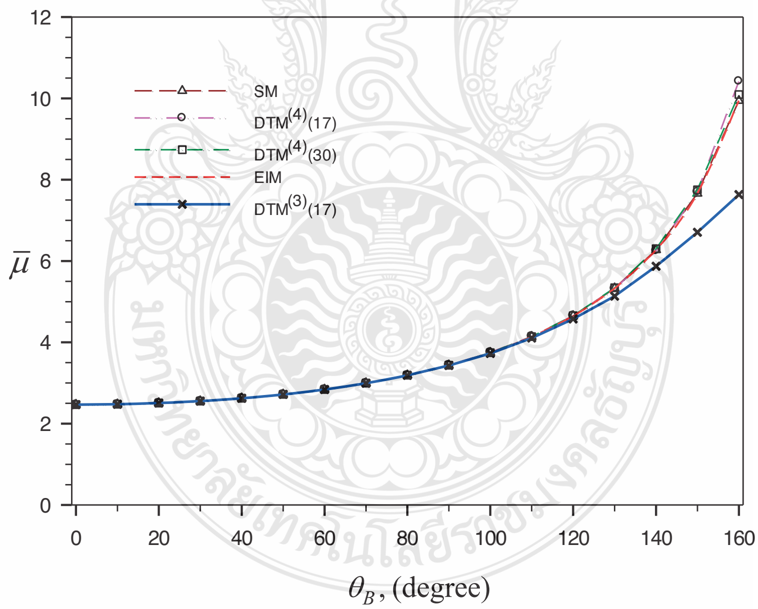
$$\begin{aligned}
&0.001 - 0.0004999999167\bar{\mu} + 0.00004166663889\bar{\mu}^2 - 0.000001388883102\bar{\mu}^3 \\
&+2.480072751\times10^{-8}\bar{\mu}^4 - 2.7548826991\times10^{-10}\bar{\mu}^5 + 2.0818956501\times10^{-12}\bar{\mu}^6 \\
&-1.1184988121\times10^{-14}\bar{\mu}^7 + 3.7079423831\times10^{-17}\bar{\mu}^8 = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(33)}$$

5.2 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ

การศึกษาพฤติกรรมของเสายื่นหลังจากเกิดการโก่งเดาะแบ่งออกเป็น 2 กรณี

5.2.1 ความสัมพันธ์ของมุมลาดเอียงกับน้ำหนักบรรทุก

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุมลาดเอียงที่ปลายของเสา θ_B ที่มีจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลง 17 เทอม ดังแสดงไว้ในสมการที่ (30) เมื่อนำมาเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\mu}$ และ θ_B แสดงในรูปที่ 4

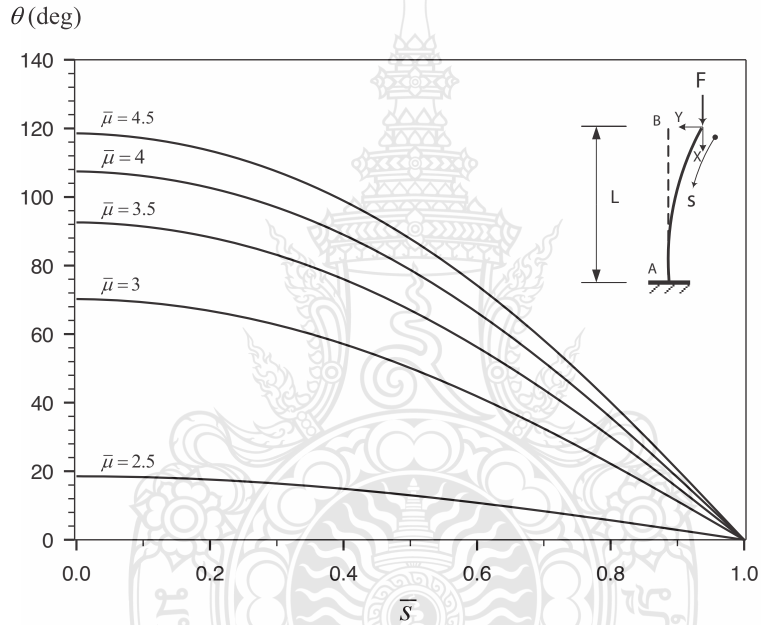


รูปที่ 4 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกกับมุมลาดเอียง

ผลการวิเคราะห์ในรูปที่ 4 ซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบผลของน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุมลาดเอียงที่ปลาย θ_B ด้วยวิธี DTM ในรูปแบบต่างๆ กับวิธี EIM [21] และวิธี SM โดยรูปแบบของ DTM กำหนดได้ดังสัญลักษณ์ต่อไปนี้ $DTM^{(m)}(n_k)$ โดยที่ m คือจำนวนเทอมในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ในขณะที่ n_k คือจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธี DTM ซึ่งพบว่าการคำนวณด้วยวิธี DTM ให้คำตอบค่าของน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุมลาดเอียง θ_B ที่สอดคล้องกันดีและเมื่อเปรียบเทียบผลคำนวณวิธี DTM แบบ $DTM^{(3)}(17)$

(อนุกรมเทย์เลอร์ จำนวน 3 เทอม, จำนวนเทอมที่ใช้ในวิธี DTM 17 เทอม) กับวิธี EIM [21] และวิธี SM พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากจนถึงค่ามุม θ_B ประมาณ 100 องศา หลังจากนั้นการคำนวณด้วยวิธี DTM จะทำให้น้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ เริ่มลู่ออกอย่างชัดเจน เมื่อเปรียบเทียบผลคำนวณแบบ DTM(4)(17) และ DTM(4)(30) ค่าของ $\bar{\mu}$ และ θ_B มีความถูกต้องและใกล้เคียงกับวิธี EIM และ SM มากกว่าการคำนวณแบบ DTM(3)(17) แต่อย่างไรก็ตามการคำนวณด้วยวิธี DTM แบบ DTM(4)(17) และ DTM(4)(30) จะมีภาระในการคำนวณมากกว่าแบบ DTM(3)(17) ซึ่งไม่เหมาะสมต่อการนำไปใช้งาน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอสมการมุมลาดเอียงแบบ DTM(3)(17) สามารถเขียนได้ดังแสดงในสมการที่ (34)

รูปที่ 5 แสดงให้เห็นมุมลาดเอียงตลอดความยาวเสาที่มีน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu} = 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5$ กระทำ ซึ่งมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี กล่าวคือ เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำมากมุมลาดเอียงที่ปลายก็มีมากเช่นกัน



รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับมุมลาดเอียง

5.2.2 ความสัมพันธ์ระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X และแกน Y

เมื่อทำการแทนค่า $\bar{\mu}$ และ C_1 ในสมการที่ (28) และ (29) และใช้สมการที่ (4) คำนวณหาคำตอบระยะเคลื่อนตัวของเสา ซึ่งจะได้สมการระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X แสดงในสมการที่ (35) และสมการระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน Y แสดงในสมการที่ (36) ตามลำดับ

$$\theta(\bar{s}) = C_1 + \left(-\frac{\bar{\mu}C_1}{240}\left(-20C_1^2 + C_1^4 + 120\right)\right)\bar{s}^2 + \left(\frac{\bar{\mu}^2 C_1}{69120}\left(-1920C_1^2 + 384C_1^4 - 32C_1^6 + C_1^8 + 2880\right)\right)\bar{s}^4$$
$$+\left(-\frac{\bar{\mu}^3 C_1}{248832000}\left(-1440000C_1^2 + 694080C_1^4 - 140160C_1^6 + 14520C_1^8 - 772C_1^{10} + 17C_1^{12} + 345600\right)\right)\bar{s}^6 + \dots \quad \textbf{(34)}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(\bar{s}) = {} & C_2 + \left(1 - \frac{1}{2}C_1^{\,2} + \frac{1}{24}C_1^{\,4}\right)\bar{s} + \left(\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1^{\,2} - \frac{1}{18}\bar{\mu}C_1^{\,4} + \frac{13}{2160}\bar{\mu}C_1^{\,6} - \frac{1}{4320}\bar{\mu}C_1^{\,8}\right)\bar{s}^{\,3} + \left(-\frac{1}{30}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,2} + \frac{1}{36}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,4} - \frac{79}{10800}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,6}\right. \\ & \left. + \frac{13}{14400}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,8} - \frac{71}{1296000}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,10} + \frac{7}{5184000}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,12}\right)\bar{s}^{\,5} + \left(\frac{1}{315}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,2} - \frac{59}{7560}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,4} + \frac{911}{226800}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,6} - \frac{109}{113400}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,8}\right. \\ & \left. + \frac{697}{5443200}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,10} - \frac{359}{36288000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,12} + \frac{137}{326592000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,14} - \frac{1}{130636800}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,16}\right)\bar{s}^{\,7} + \ldots \end{aligned} \quad \textbf{(35)}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}(\bar{s}) = {} & C_3 + \left(C_1 - \frac{1}{6}C_1^{\,3} + \frac{1}{120}C_1^{\,5}\right)\bar{s} + \left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1 + \frac{1}{9}\bar{\mu}C_1^{\,3} - \frac{1}{45}\bar{\mu}C_1^{\,5} + \frac{1}{540}\bar{\mu}C_1^{\,7} - \frac{1}{17280}\bar{\mu}C_1^{\,9}\right)\bar{s}^{\,3} + \left(\frac{1}{120}\bar{\mu}^{\,2}C_1 - \frac{5}{144}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,3}\right. \\ & \left. + \frac{241}{14400}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,5} - \frac{73}{21600}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,7} + \frac{121}{345600}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,9} - \frac{193}{10368000}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,11} + \frac{17}{41472000}\bar{\mu}^{\,2}C_1^{\,13}\right)\bar{s}^{\,5} + \left(-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^{\,3}C_1\right. \\ & + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,3} - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,5} + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,7} - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,9} + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,11} - \frac{1}{243000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,13} + \frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,15} \\ & \left. - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^{\,3}C_1^{\,17}\right)\bar{s}^{\,7} + \ldots \end{aligned} \quad \textbf{(36)}$$

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนตัวของเสา (ที่จุดปลายเสา) ทางแกน X และแกน Y

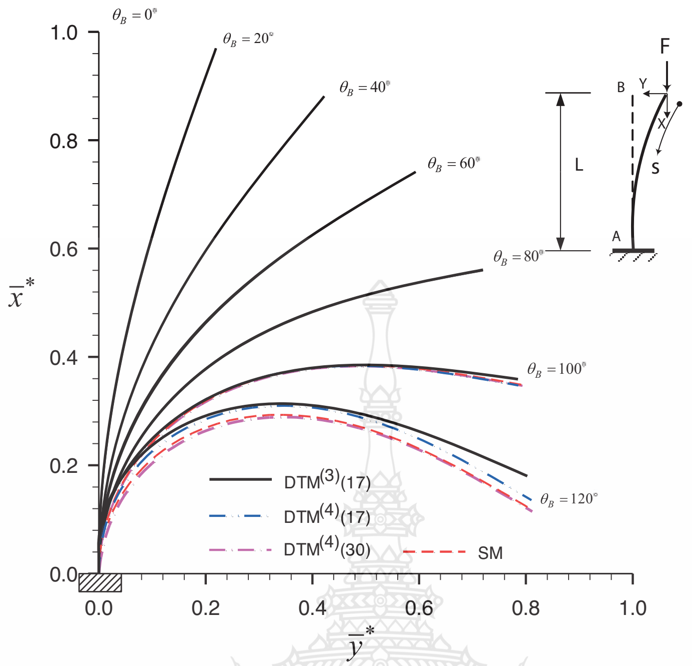
θ_B	$\bar{x}^*\ (\bar{s}=0)$			$\bar{y}^*\ (\bar{s}=0)$		
(deg)	DTM(3)(17)	EIM [21]	SM	DTM(3)(17)	EIM [21]	SM
0	0	0	0	0	0	0
20	0.96973	0.970	0.96973	0.21941	0.220	0.21941
40	0.88129	0.881	0.88120	0.42226	0.422	0.42224
60	0.74141	0.741	0.74101	0.59366	0.593	0.59320
80	0.56084	0.560	0.55939	0.71967	0.719	0.71949
100	0.35897	0.349	0.34898	0.78537	0.792	0.79153
120	0.18012	0.123	0.12315	0.80263	0.803	0.80317

$\bar{x}^*(\bar{s}=0) = 1 - \bar{x}(\bar{s}=0),\ \bar{y}^*(\bar{s}=0) = \bar{y}(\bar{s}=0)$

จากตารางที่ 3 แสดงผลการคำนวณระยะการเคลื่อนตัวของปลายเสา B ที่สอดคล้องกับมุมลาดเอียง $.\theta_B = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$ จากผลในตารางที่ 3 พบว่าวิธี DTM ที่ใช้การแปลงฟังก์ชัน sine และ cosine ในอนุกรมเทย์เลอร์ จำนวน 3 เทอมและ ใช้จำนวนเทอมฟังก์ชันแปลงวิธี DTM จำนวน 17 เทอม (DTM(3)(17)) ให้คำตอบสอดคล้องกับวิธี EIM และ วิธี SM โดยเฉพาะในช่วงมุม $\theta_B = 0^\circ$ ถึง 100° เมื่อ $\theta_B \geq 100^\circ$ ค่าการเคลื่อนตัวเริ่มมีความแตกต่าง และเห็นความแตกต่างได้อย่างชัดเจนที่มุม $\theta_B = 120^\circ$

รูปที่ 6 แสดงผลการคำนวณรูปร่างสมดุลของการเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X และแกน Y ตลอดความยาวเสา โดยการเคลื่อนตัวทางแกน X และแกน Y แสดงอยู่ในรูปของ ค่า $\bar{x}^*$ และ $\bar{y}^*$ ตามลำดับ พบว่าการคำนวณด้วยวิธี DTM แบบ DTM(4)(17) และ DTM(4)(30) ให้ผลคำตอบใกล้เคียงกับวิธี SM มากที่สุดซึ่งเป็นผลมาจากการเพิ่มจำนวนเทอมในการคำนวณ DTM

แต่ในขณะเดียวกันการเพิ่มจำนวนเทอมมีผลต่อความสะดวกในการใช้งานที่ลดลงเช่นกัน



$\bar{x}^* = 1 - \bar{x}, \ \bar{y}^* = \bar{y}$

รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{x}^*$ กับ $\bar{y}^*$

6. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย ซึ่งปัญหาสามารถเขียนได้ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์และใช้วิธี Differential Transformation Method (DTM) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ผลการคำนวณน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสายื่นที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะจากวิธี DTM มีความสอดคล้องกับผลการคำนวณโดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้าเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะเมื่อจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงในวิธี DTM มีจำนวนเทอมตั้งแต่ 17 เทอมเป็นต้นไป

2. ผลการคำนวณระยะเคลื่อนตัวของเสายื่นทั้งแกน X และแกน Y มีความสอดคล้องกับผลการคำนวณโดยวิธียิงเป้าเช่นเดียวกับการคำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา โดยเฉพาะในช่วงที่มุมลาดเอียงที่ปลายเสามีค่าน้อยกว่า 100 องศา

3. การเพิ่มจำนวนเทอมของอนุกรมเทย์เลอร์และจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธี DTM มีผลทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นแต่ในขณะเดียวกันภาระในการคำนวณจะเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน

7. เอกสารอ้างอิง

1. Yaemchinda, P. and Chucheepsakul, S., 2014, "Static Analysis of Deep Water Mooring Lines using Elastic Rod Model," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (3), pp. 313-329. (In Thai)

2. Klaycham, K., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2014, "Finite Element Method for Critical Top Tension Analysis of Neutrally Buoyant Raiser," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (4), pp. 429-446. (In Thai)

3. Kuznetsov, V.V. and Levyakov, S.V., 2002, "Complete Solution of the Stability Problem for Elastica of Euler's Column," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37 (6), pp. 1003-1009.

4. Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2005, "Post-Buckling of an Elastic Column with Various Rotational End Restraints," *International*

Journal of Structural Stability and Dynamics, 5 (1), pp. 113-123.

5. Venkateswara, G.R. and Raju, P.C., 1977, "Post-Buckling of Uniform Cantilever Column Gerakin Finite Element Solution," *Engineering Fracture Mechanics*, 9 (1), pp. 1-4.

6. Lee, K., 2009, "Post-Buckling of Uniform Cantilever Column Under a Combined Load," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36 (5), pp. 813-816.

7. Wang, J., Chen, J. and Liao, S., 2008, "An Explicit Solution of the Large Deformation of a Cantilever Beam Under Point Load at the Free Tip," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), pp. 320-330.

8. Tolou, N. and Herder, J.L., 2009, "A Semianalytical Approach to Large Deflections in Compliant Beams under Point Load," *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 910896, 13 p.

9. Shin, Y.J. and Yun, J.H., 2006, "Trans-verse Vibration of a Uniform Euler Bernoulli Beam Under Varying Axial Force using Differential Transformation Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 20 (2), pp. 191-196.

10. Chai, Y.H. and Wang, C.M., 2006, "An Application of Differential Transformation to Stability Analysis of Heavy Columns," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6 (3), pp. 317-332.

11. Catal, S., 2014, "Buckling Analysis of Semi-Rigid Connected and Partially Embedded Pile in Elastic Soil using Differential Transform Method," *Structural Engineering and Mechanics*, An International Journal, 52 (5), pp. 971-995.

12. Phungpaingam, B., 2016, "Application of Differential Transformation Method to Determine Buckling Load of an Elastic Column with Various Rotational Restraints," *Proceedings of the 21st National Convention on Civil Engineering*, 28-30 June 2016, Songkhla, Thailand, 6 p. (In Thai)

13. Salehi, P., Yaghoobi, H. and Torabi, M., 2012, "Application of the Differential Transformation Method and Variational Iteration Method to Large Deformation of Cantilever Beams Under Point Load," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26 (9), pp. 2879-2887.

14. Boyle, P., Richard, R.A. Syms and Moore, D.F., 2002, "Packaging Solutions for MEMS/ MOEMS using Thin Films as Mechanical Com-ponents," *Proceeding SPIE 4755, Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, 19 April 2002, France, 12 p.

15. Pukhov, G.E., 1982, "Differential Transforms and Circuit Theory," *Circuit Theory and Applications*, 10 (3), pp. 265-276.

16. Zhou, J.K., 1986, Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China (In Chinese).

17. Chen, C.L. and Liu, Y.C., 1998, "Differential Transformation Technique for Steady Nonlinear Heat Conduction Problems," *Applied Mathematics and Computation*, 95 (2-3), pp. 155-164.

18. Joneidi, A.A., Ganji, D.D. and Babaelahi, M., 2009, "Differential Transformation Method to Determine Fin Efficiency of Convective Straight Fins with Temperature Dependent Thermal Conductivity," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36 (7), pp. 757-762.

19. Yaghoobi, H. and Torabi, M., 2011, "The Application of Differential Transformation Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38 (6), pp. 815-820.

20. Shin, Y.J. and Yun, J.H., 2006, "Trans-verse Vibration of a Uniform Euler-Bernoulli Beam under Varying Axial Force using Differential Transformation

Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 20 (2), pp. 191-196.

21. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 1961, Theory of Elastic Stability, Mc Graw Hill, New York, pp. 76-81.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล	นายสุรชัย ทรัพย์เพิ่ม
วัน เดือน ปีเกิด	19 กันยายน 2511
ที่อยู่	38/36 หมู่ 8 ตำบลนาวุ้ง อำเภอเมือง จังหวัดเพชรบุรี 76000
การศึกษา	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล 2539
ประสบการณ์การทำงาน	ตำแหน่ง อาจารย์ คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี พ.ศ. 2543 – ปัจจุบัน
เบอร์โทรศัพท์	083 607 3978
อีเมล์	surachai@pbru.ac.th