เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลข

The Rectangular Elements for Electric Field Calculation by using Numerical Methods

นิติพงศ์ ปานกลาง[1]

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูงที่ใช้เป็นตัวอย่างศึกษาในบทความนี้ ได้แก่ การคำนวณสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ จากผลการคำนวณสนามไฟฟ้าในแนวแกน Z พบว่า กรณีที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย ของสนามไฟฟ้าลดลงเหลือ 0.72% หรือลดลง 55.3%

คำสำคัญ : วิธีประจุพื้นผิว เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี วิธีเกรเดียนต์สังยุคคู่แบบเสถียร

Abstract

This paper presents the application of linear rectangular elements and 12-DOF elements for electric field calculation by using surface charge method. The high voltage engineering problem which is used as a case study in this paper is electric field calculation on a dielectric spherical under the uniform electric field. The result from calculating the electric field on z-axis shows that when using linear rectangular elements, the average error of electric field is equal to 1.61%, while 12-DOF elements can reduce the average error to 0.72% or 55.3% reduction.

Keywords: Surface Charge Method, 12-DOF Element, Biconjugate Gradient Stabilized Method.

1. บทนำ

การจำลองสนามไฟฟ้าบนอุปกรณ์ทางวิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง อาทิเช่น ลูกถ้วยฉนวน โดยวิธีเชิงตัวเลขวิธีต่าง ๆ ที่นิยมใช้ในปัจจุบัน เช่น วิธีชิ้นประกอบขอบเขต (Boundary Element Method) หรือวิธีประจุพื้นผิว (Surface Charge Method)นั้น การคำนวณจำเป็นต้องแบ่งพื้นผิวของแบบจำลองเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ กรณีแบบจำลองมีรูปร่างที่ซับซ้อน เรานิยมใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในการคำนวณ เนื่องจากการสร้างแบบจำลองมีความละเอียดมากกว่า โดยเฉพาะบริเวณรอยต่อหรือบริเวณมุมของแบบจำลอง แต่กรณีที่แบบจำลองมีรูปร่างไม่ซับซ้อน เช่น สายเคเบิลทรงกระบอกแกนร่วม การสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแทนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมช่วยลดจำนวนเอลิเมนต์ลงได้ โดยที่ผลการคำนวณยังมีความถูกต้องอยู่ในเกณฑ์ที่ต้องการ

บทความนี้เสนอวิธีการเบื้องต้นในการสร้างและประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ใช้ประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้ง

[1]ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
จังหวัดปทุมธานี 12110 Email : p_nitipong@rmut.ac.th

สิบสองระดับชั้นความเสรี ปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้าในบทความนี้ได้แก่ การคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคทรงกลมฉนวนที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยรายละเอียดของบทความที่นำเสนอประกอบด้วย วิธีการสร้างเอลิเมนต์และประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเพื่อสร้างแบบจำลอง รวมถึงผลการคำนวณสนามไฟฟ้า

2. เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นเป็นเอลิเมนต์พื้นฐานเช่นเดียวกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเชิงเส้น ซึ่งใช้ในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลข การสร้างเอลิเมนต์อาศัยเฉพาะพิกัดที่ปมทั้ง 4 ของเอลิเมนต์เท่านั้น ฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นประกอบด้วย

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-L_1)(1-L_2) \qquad (1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+L_1)(1-L_2) \qquad (2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+L_1)(1+L_2) \qquad (3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-L_1)(1+L_2) \qquad (4)$$

เมื่อ L_1 และ L_2 เป็นพิกัดเฉพาะที่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม[1] โดยที่ $(1- \le L_1 \le 1)$, $(1- \le L_2 \le 1)$

3. เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีมีลักษณะพื้นผิวที่โค้งมนดังรูปที่ 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีสามารถสร้างจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น โดยอาศัยพิกัด เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปมทั้งสี่ของเอลิเมนต์ [2] สมการที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์ผิวโค้งแสดงดังสมการที่ (5)

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{12} N_i \mathbf{v}_i \qquad (5)$$

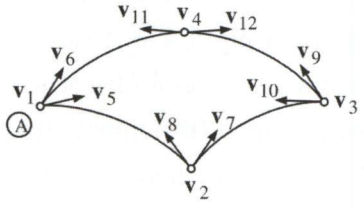
เมื่อ N_i คือฟังก์ชันรูปร่างและ v_i คือเวกเตอร์พิกัดและเวกเตอร์สัมผัสที่ปมทั้งสี่ของเอลิเมนต์

ฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีมีทั้งหมด 12 สมการ ตัวอย่างสมการฟังก์ชันรูปร่าง N_1, N_5 และ N_6 และ ณ ปมที่ A ของเอลิเมนต์แสดงดังสมการที่ (6) ถึง (8)

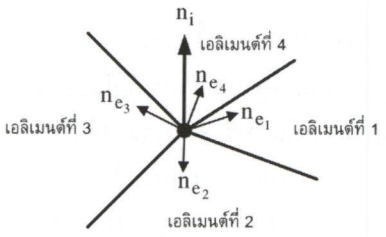
$$N_1 = (1-L_1)(1-L_1) + (1-L_1)^2 L_1(1-L_2) - (1-L_1)L_1^2(1-L_2) + (1-L_2)^2 L_2(1-L_1) - (1-L_2)L_2^2(1-L_1) \qquad (6)$$

$$N_5 = (1-L_1)^2 L_1(1-L_2) \qquad (7)$$

$$N_6 = (1-L_2)^2 L_2(1-L_1) \qquad (8)$$



รูปที่ 1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี



รูปที่ 2 การคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมที่ i ใดๆ

การคำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ปมทั้งสี่ของเอลิเมนต์ใดๆ ทำโดยรวมเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมของเอลิเมนต์ที่มีพิกัดเดียวกัน จากนั้นหารผลรวมของเวกเตอร์ดังกล่าวด้วยจำนวนเอลิเมนต์ที่ต่อร่วมอยู่กับปมดังกล่าว สมการที่ใช้คำนวณเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ณ ปมที่ i คือ

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mathbf{n}_{e_j}}{m} \qquad (9)$$

เมื่อ n_{e_j} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเอลิเมนต์ที่ใด ๆ ที่ต่อร่วมอยู่กับปมที่ i และ m คือจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ต่อร่วมอยู่กับปมที่ i แสดงดังรูปที่ 2

4. การประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับการคำนวณสนามไฟฟ้า

บทความนี้ ผู้เขียนประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้าบนทรงกลมฉนวนที่อยู่

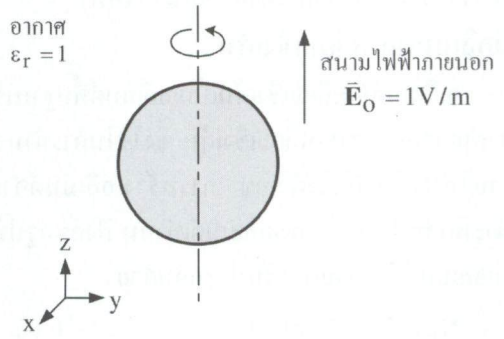
ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ แบบจำลองมีลักษณะดังรูปที่ 3 ทรงกลมฉนวนมีรัศมีเท่ากับ 1 เมตรและมีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ภายในทรงกลมเท่ากับ 4 จุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่พิกัด (0,0,0) บริเวณภายนอกทรงกลมเป็นอากาศค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 1 และมีสนามไฟฟ้าภายนอก, $\overline{E}_0$ เท่ากับ 1V/m ในทิศทาง +z การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิวกระทำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการลินุกซ์ ซีพียู Pentuim 4 ความเร็ว 3.0GHz และมีหน่วยความจำเท่ากับ 1.5GB

การคำนวณสนามไฟฟ้า พื้นผิวของทรงกลมฉนวนถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 1,512 เอลิเมนต์ ตัวอย่างการแบ่งพื้นผิวของทรงกลมฉนวนเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม แสดงดังรูปที่ 4

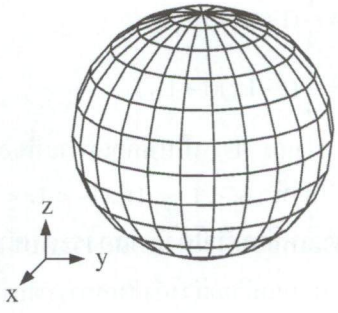
5. ผลการคำนวณสนามไฟฟ้า

จากหลักการคำนวณของวิธีประจุพื้นผิว เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น $A\sigma = b$ เราจะได้ค่าความหนาแน่นประจุเชิงผิวเพื่อนำไปคำนวณสนามไฟฟ้า ณ จุดต่างๆ บนแบบจำลอง ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่คำนวณได้ แสดงดังรูปที่ 5 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวจะสัมพันธ์กับทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอกที่พุ่งผ่านทรงกลมฉนวน บริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งเข้าทรงกลมฉนวนความหนาแน่นประจุเชิงผิวมีค่าเป็นลบ ส่วนบริเวณที่สนามไฟฟ้าพุ่งออกจากทรงกลมฉนวนความหนาแน่นประจุเชิงผิวมีค่าเป็นบวก

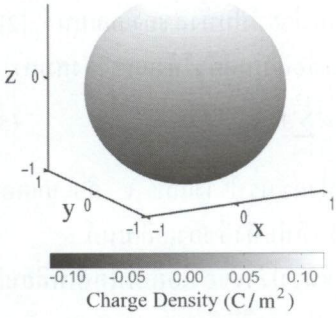
การคำนวณสนามไฟฟ้า จุดที่คำนวณ, z_m เริ่มจากจุด (0,0,0) จนถึง (0,0,2) สนามไฟฟ้าที่คำนวณได้ภายในทรงกลมมีค่าคงที่เท่ากับ 0.5V/m สนามไฟฟ้าภายนอกมีค่าสูงสุดบริเวณผิวของทรงกลมเท่ากับ 2V/m และมีค่าลดลงตามระยะ z_m ที่เพิ่มขึ้นจนมีค่าเท่ากับ 1V/m จนมีค่าเท่ากับ ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่จุด z_m ตามแนวแกน z เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ [3] แสดงดังรูปที่ 6 โดยมีเส้นประแสดงขอบเขตของทรงกลมฉนวน เมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นในการคำนวณความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% ส่วนกรณีใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าลดลงเหลือ 0.72% ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยที่ลดลงคิดเป็น 55.3% รูปที่ 7 แสดงทิศทางสนามไฟฟ้าบริเวณภายในและภายนอกทรงกลมฉนวนที่ระนาบ y=0 เมื่อ $(-2 \le x \le 2)$ และ $(-2 \le z \le 2)$ และมีรูปวงกลมแสดงขอบเขตของทรงกลมฉนวน



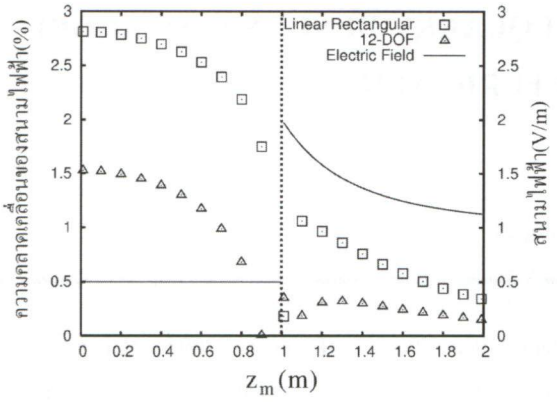
รูปที่ 3 แบบจำลองทรงกลมฉนวนในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ



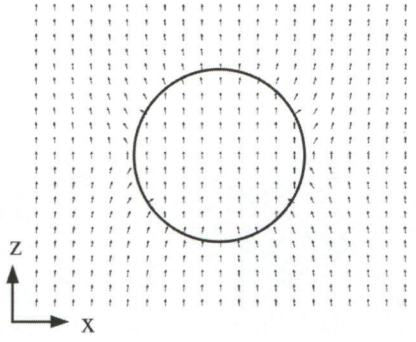
รูปที่ 4 ทรงกลมฉนวนที่พื้นผิวแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม



รูปที่ 5 ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่คำนวณได้



รูปที่ 6 ความผิดพลาดของสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z และลักษณะของสนามไฟฟ้า เมื่อ $(0 < z_m < 2)$ เมตร



รูปที่ 7 เวกเตอร์สนามไฟฟ้าบนระนาบ y=0 เมื่อ $(-2 \le x \le 2)$ และ $(-2 \le z \le 2)$ เมตร

6. สรุป

บทความนี้เสนอผลการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้นและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีกับการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีประจุพื้นผิว จากการคำนวณสนามไฟฟ้าที่จุด z_m เมื่อ $(0 \le z_m \le 2)$ พบว่า การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรีให้ผลการคำนวณที่แม่นยำกว่าการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น กรณีของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 1.61% ส่วนกรณีใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผิวโค้งสิบสองระดับชั้นความเสรี ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าลดลงเหลือ 0.72%

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำวิจัยและเขียนบทความฉบับนี้ รวมถึงอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าทุกท่าน ที่กรุณาให้คำแนะนำและความคิดเห็นต่างๆที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง

เอกสารอ้างอิง

[1] ปราโมทย์ เดชอำไพ, "ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2545.

[2] Boonchai Techaumnat, "12-DOF Element for Electric Field Calculation by the Boundary Element Method", International Symposium on High Voltage Engineering, Netherlands, 2003.

[3] Z. Haznadar and Z. Stih, "Electromagnetic Fields, Wave and Numerical Methods", IOS Press, Netherlands, 2000.

ประวัติผู้เขียน

นิติพงศ์ ปานกลาง วศ.บ. สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล พ.ศ. 2542 วศ.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ. 2547 ปัจจุบันเป็นอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล สาขางานวิจัยที่สนใจได้แก่ วิศวกรรมไฟฟ้าแรงสูง การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงตัวเลข